

## Tema 2: probabilidad

1. [Spiegel 1.7] Se saca una bola al azar de una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules. Determina la probabilidad de que la bola sea (a) roja, (b) blanca, (c) azul (d) no sea roja (e) sea roja o blanca.

**Solution:** (a)  $2/5$  (b)  $4/15$  (c)  $1/3$  (d)  $3/5$  (e)  $2/3$ .

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un 3 en dos lanzamientos de un dado balanceado? (nos referimos al número de 3s sacados, no a la suma).

**Solution:**  $11/36$

3. [Ross, 3.18] Un grupo de 5 chicos y 10 chicas quieren sentarse en un banco.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cuarta persona sea un chico?
  - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la decimo-segunda posición esté ocupada por un chico?
  - (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un chico en particular esté en la tercera posición?

**Solution:** (a)  $1/3$  (b)  $1/3$  (c)  $1/15$ .

4. Una caja A contiene cinco canicas rojas y tres azules, una caja B contiene dos rojas y tres azules. Se coje una canica al azar de cada caja:
- (a) Halla la probabilidad  $p$  de que ambas sean rojas.
  - (b) Halla la probabilidad  $p$  de que una sea roja y otra azul.

**Solution:** (a)  $1/4$  (b)  $21/40$ .

5. Un tipo de misil alcanza su objetivo con probabilidad  $p = 1/3$ .
- (a) Si se lanzan 3 misiles, halla la probabilidad de que se alcance el objetivo al menos una vez.
  - (b) Hallar el número de misiles que se deben lanzar de tal forma que haya al menos un 90% de probabilidad de alcanzar el objetivo.

**Solution:** (a)  $19/27$  (b)  $n \geq 6$ .

6. Una mujer tiene  $n$  llaves, una de las cuales abre su casa. Si prueba las llaves al azar, descartando las que no funcionan, ¿Cuál es la probabilidad de que abra su puerta al intento  $k$ -ésimo? ¿Y si no hubiese descartado llaves?

**Solution:** (a)  $1/n$  (b)  $(1 - \frac{1}{n})^{k-1} \frac{1}{n}$ .

7. Cuando los caballos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  corren juntos, sus respectivas probabilidades de ganar son 0.3, 0.5 y 0.2. Si los caballos corren 3 veces,
- (a) Halla la probabilidad de que el mismo caballo gane las 3 carreras.
  - (b) Halla la probabilidad de que cada uno gane una carrera.

**Solution:** (a)  $4/25$  (b)  $9/50$ .

8. [Ross, 3.22,3° ed.] Un armario tiene 10 pares de zapatos. Si seleccionamos 8 zapatos al azar, Cuál es la probabilidad de (a) no seleccionar un par completo, (b) seleccionar exactamente un par completo.

**Solution:** (a)  $\frac{\binom{10}{s} 2^s}{\binom{20}{s}}$   
(b)  $10 \frac{\binom{9}{6} 2^6}{\binom{20}{s}}$

9. [Spiegel 1.25] En una línea están acomodadas cinco canicas rojas, 2 blancas y 3 azules. Si las canicas del mismo color son indistinguibles. ¿Cuántas ordenaciones distintas existen?

**Solution:** 2520.

10. ¿Cuántas “hamburguesas” distintas pueden hacerse con carne, lechuga, tomate, queso, cebolla y bacon? Entiéndase por hamburguesa la combinación de los anteriores ingredientes, habiendo al menos uno de ellos presente.

**Solution:** 31.

11. [Spiegel 1.26] ¿De cuántas maneras posibles se pueden sentar 7 personas alrededor de una mesa redonda si (a) se pueden sentar en cualquier lugar, (b) 2 personas se llevan mal y no pueden sentarse juntas.

**Solution:** (a) 720 (b) 480

12.  $a$  cartas rojas idénticas y  $b$  cartas negras idénticas se barajan al azar, de manera que se suceden rachas de cartas rojas y rachas de cartas negras. Hallar la probabilidad de que se presenten.
- (a)  $k$  rachas de cartas rojas y  $k$  de cartas negras.
  - (b)  $k$  rachas de cartas rojas y  $k + 1$  de cartas negras.
  - (c)  $k$  rachas de cartas rojas.

**Solution:** (a)

$$2 \frac{\binom{a-1}{k-1} \binom{b-1}{k-1}}{\binom{a+b}{a}}$$

(b)

$$\frac{\binom{a-1}{k-1} \binom{b-1}{k}}{\binom{a+b}{a}}$$

(c)

$$\frac{\binom{a-1}{k-1}}{\binom{a+b}{a}} \left[ \binom{b-1}{k-2} + 2 \binom{b-1}{k-1} + \binom{b-1}{k} \right]$$

13. [Spiegel 1.35] Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se sacan 3 bolas al azar sin reemplazamiento, determina la probabilidad de que (a) las 3 sean rojas, (b) las 3 sean blancas, (c) 2 sean rojas y 1 blanca, (d) al menos 1 sea blanca, (e) se saque una de cada color, (f) se saquen en el siguiente orden: roja, blanca, azul.

**Solution:** (a) 14/285 (b) 1/1140 (c) 7/95 (d) 23/57 (e) 18/95 (f) 3/95.

14. a tarjetas blancas y b tarjetas negras se barajan conjuntamente.

- (a) Calcular la probabilidad de que la primera tarjeta blanca esté en la posición  $k$ .  
(b) En general, calcular la probabilidad de que la  $i$ -ésima tarjeta blanca ocupe la posición  $k$ .

**Solution:** (a)  $\frac{\binom{b}{r-1} a}{\binom{a+b}{r}} \frac{1}{r}$  (b)  $\binom{a}{i-1} \binom{b}{k-i} \frac{(k-1)!(a-i+1)(a+b-k)!}{(a+b)!}$

15.  $n$  tarjetas numeradas de 1 a  $n$  se barajan y se sitúan alineadas sobre la mesa. Se produce coincidencia en el lugar  $i$ , si la tarjeta que ocupa tal lugar, lleva el número  $i$ . ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una coincidencia en el lugar  $i$ ? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan coincidencias en los lugares  $i$  y  $j$ ? (c) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca *alguna* coincidencia?

**Solution:** (a)  $1/n$ . (b)  $\frac{1}{n(n-1)}$ . (c)  $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ .

16. Se lanzan dos monedas y se tira un dado tantas veces como caras se hayan obtenido. (a) Halla la probabilidad de que la suma de las puntuaciones sea 6. (b) Si sabemos que el resultado del juego es que los dados han sumado 6, ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido 0 caras, 1 cara o 2 caras?

**Solution:** (a) 17/144 (b) 0, 12/17, 5/17

17. [Ross 3.25] El 52% de los estudiantes de una universidad son mujeres. El 5% de los estudiantes estudian informática. El 2% de los estudiantes son mujeres que estudian informática. Si un estudiante es elegido al azar, calcula la probabilidad de que

- (a) el estudiante sea mujer, dado que el estudiante hace informática.
- (b) el estudiante hace informática, dado que el estudiante sea mujer.

**Solution:** (a)  $2/5$  (b)  $1/26$ .

18. [Ross, 3.29] Pides a tu amigo que riegue tu planta mientras estás de vacaciones. Sin agua, la planta morirá con probabilidad 0.8, mientras que con agua las probabilidades se reducen al 0.15. Estas seguro al 90% de que tu amigo se acordará de regar la planta.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la planta viva cuando vuelvas?
  - (b) Si la planta está muerta, ¿cuál es la probabilidad de que tu amigo se haya olvidado de regar la planta?

**Solution:** (a) 0.785 (b)  $16/43 \approx 0.37$ .

19. [Ross, 3.34] El cáncer de próstata es muy común entre los hombres. Para intentar detectarlo, los médicos miden los niveles de la proteína llamada antígeno prostático específico (PSA). Aunque niveles altos de PSA suelen indicar cáncer, el test es poco fiable. La probabilidad de que un hombre sano sea diagnosticado con niveles altos de PSA es aproximadamente 0.135, y esta probabilidad se incrementa hasta 0.268 si el hombre tiene cáncer. Si un médico, basándose en otros factores, cree que un hombre tiene cáncer con probabilidad 0.7, cuál es la probabilidad condicional de que tenga cáncer dado que
- (a) el test indica un nivel elevado de PSA.
  - (b) el test no indica un nivel elevado de PSA.

**Solution:** (a) 0.822 (b) 0.6638.

20. [Ross, 3.36] Se tiran dos dados. Sea  $E$  el evento “La suma de los dos dados es 7”:
- (a) Muestra que  $E$  es independiente del evento “el primer dado es 4”.
  - (b) Muestra que  $E$  es independiente del evento “el segundo dado es 3”.
21. *Problema de Monty Hall:* En un concurso de televisión, el concursante elige una puerta entre tres y su premio consiste en lo que se encuentre detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Antes de abrir la elección del concursante, el presentador, que sabe donde esta el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. El presentador le da entonces al concursante la opción de cambiar la puerta escogida (a) ¿Debe el concursante mantener su elección original o debe escoger la otra puerta? (b) ¿Hay alguna diferencia? Resuelve el problema matemáticamente y mediante simulaciones.

**Solution:** (a) Debe cambiar (b)  $P(\text{Ganar si cambia}) = 2/3$ ,  $P(\text{Ganar si no cambia}) = 1/3$ .

22. [Ross, 3.42] Un organismo tiene 5 genes que denotamos con las 5 primeras letras del alfabeto. A su vez, cada gen tiene dos formas que distinguiremos usando mayúsculas o minúsculas. La letra mayúscula denotará un gen dominante, mientras que la letra minúscula denotará un gen recesivo. Suponemos que nuestro organismo es diploide, por lo que cada organismo tiene dos series de genes de cada tipo. Por ejemplo, si  $A$  denota el gen de “ojos marrones” y  $a$  el gen de “ojos azules”, se pueden dar los siguientes resultados:

- aa → ojos azules.
- aA, Aa o AA → ojos marrones.

La expresión física de los genes se suele llamar fenotipo, mientras que la configuración genética sería el genotipo.

El hecho de que cada tipo de gen aparezca “repetido” es consecuencia de que, durante el apareamiento de 2 organismos, cada progenitor contribuye al material genético de sus hijos con un elemento de su par de genes. Esta contribución se supone al azar. Además, en el organismo que nos ocupa, las contribuciones de los 5 genes se suponen independientes.

En un apareamiento entre organismo con genotipos  $aA, bB, cC, dD, eE$  y  $aa, bB, cc, Dd, ee$ , cuál es la probabilidad de que un hijo en concreto se parezca (1) genotípicamente o (2) fenotípicamente a:

- El primer padre.
- El segundo padre.
- Alguno de los padres.
- A ninguno de los padres.

**Solution:** (a) genotípicamente:  $1/32$ ; fenotípicamente:  $9/128$ ,  
 (b) genotípicamente:  $1/32$ ; fenotípicamente:  $9/128$ ,  
 (c) genotípicamente:  $1/16$ ; fenotípicamente:  $18/128$ ,  
 (d) genotípicamente:  $15/16$ ; fenotípicamente:  $110/128$ ,

23. [Ross, 3.43] Tres prisioneros son informados de que uno de ellos ha sido elegido al azar para ser liberado, mientras que a los otros dos solo se les rebajará la condena. El prisionero A pregunta al carcelero en privado a cuál de sus compañeros se le rebajará la condena, afirmando que puede divulgar la información sin problemas ya que él ya sabe que al menos uno de sus compañeros estará menos tiempo en la cárcel. El carcelero se niega a contestar, razonando que si A conoce cuál de sus compañeros tendrá una rebaja en la condena, sus probabilidades de ser liberado se incrementan de  $1/3$  a  $1/2$ , ya que el estaría en el grupo de dos prisioneros que pueden ser liberados. ¿Es correcto el razonamiento del carcelero?

**Solution:** No, la probabilidad sigue siendo la misma, que es  $1/3$ . Por ejemplo:

$$P(A \text{ libre} \mid \text{Carcelero dice B}) = 1/3.$$

24. [Ross, 3.45] En una competición al mejor de 7, el primer equipo que llegue a 4 victorias gana. Supón que en cada partido el equipo  $A$  gana de forma independiente con probabilidad  $p$ .
- Si un equipo va ganando 3 a 0, ¿cuál es la probabilidad de que sea el equipo A el que va ganando?
  - Si un equipo va ganando 3 a 0, ¿cuál es la probabilidad de que sea este equipo el que gane la competición?
  - Si  $p = 1/2$ , ¿cuál es la probabilidad de que el equipo que gane el primer juego gane la competición?

**Solution:** (a)  $p_A = P(A \mid \text{Resultado}=3-0) = \frac{p^3}{p^3 + (1-p)^3}$ ,  
 (b)  $p_A (1 - (1-p)^4) + p_B (1 - p^4)$ .  
 (c)  $21/32$ .

25. De una urna, que contiene inicialmente 1 bola blanca y otra negra, un jugador realiza dos extracciones con reemplazamiento. Si obtiene dos bolas blancas, gana y, en caso contrario, vuelve a intentarlo tras introducir una bola negra a la urna. Hallar la probabilidad de que el jugador gane.

**Solution:**  $\frac{1}{2}$

26. Dos urnas contienen, respectivamente,  $N - 1$  bolas blancas y una negra y  $N$  bolas blancas. Se extrae una bola de cada urna y se intercambian. Si repetimos  $n$  veces la operación, ¿cuál es la probabilidad de que la bola negra esté en la urna A?

**Solution:**

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n$$

27. [Ross, 3.47] Sean  $A, B, C$  eventos tales que  $P(A) = .2, P(B) = .3, P(C) = .4$ . Calcula la probabilidad de que ocurra al menos un evento de  $A$  o  $B$  si:

- (a)  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes.  
(b)  $A$  y  $B$  son independientes.

Calcula la probabilidad de que ocurran los eventos  $A, B, C$  si

- (c)  $A, B, y C$  son independientes.  
(d)  $A, B y C$  son mutuamente excluyentes.

**Solution:** (a) 1/2 (b) 0.44 (c) 0.024 (d) 0.

28. [Dobrow, 1.41] Calcula mediante simulaciones la probabilidad de obtener exactamente una cara en cuatro lanzamientos de una moneda.

**Solution:** 1/4

29. [Dobrow, 1.42] Calcula matemáticamente y mediante simulaciones la probabilidad de obtener un número entero entre 1 y 5000 que sea divisible por 4, 7, o 10.

**Solution:** 0.4

30. [Dobrow, 1.43] Calcula matemáticamente y con simulaciones cuál es la probabilidad de obtener al menos un 8 en la tirada de dos dados (es decir, que la suma de ambos dados  $\geq 8$ ).

**Solution:** 15/36

31. [Dobrow, 1.45] Lee la ayuda del comando *sample*. Imagínate un dado de 4 lados cargado, de forma que toma los valores 1, 2, 3, 4 con probabilidades 0.1, 0.2, 0.3, 0.4.
32. Calcula matemáticamente y con simulaciones las siguientes probabilidades, relacionadas con una baraja francesa (4 palos de 13 cartas cada uno). Considera que una mano consiste en 5 cartas.
- (a) Un póker (4 cartas del mismo valor)
  - (b) Un full (un trío y una pareja de cartas del mismo valor).
  - (c) Un trío (Ojo con los pókers y los fulls).
  - (d) Una escalera (cinco cartas de valores consecutivos). Se admite que el as vaya antes del dos o después del rey.
  - (e) Una escalera de color (cinco cartas del mismo palo y valores consecutivos).
- ¿Tienen sentido las puntuaciones del póker?

**Solution:** (a)  $\approx 2.4 \cdot 10^{-4}$  (b)  $\approx 1.4 \cdot 10^{-3}$  (c)  $\approx 2.11 \cdot 10^{-2}$  (d)  $\approx 3.9 \cdot 10^{-3}$  (e)  $\approx 1.5 \cdot 10^{-5}$

## Fuentes

- [Ross]: Ross, Sheldon M. Introduction to probability models. Academic press, 2014.
- [Dobrow]: Dobrow, Robert P. Probability: with applications and R. John Wiley & Sons, 2013.
- [Spiegel]: Spiegel et al. Probabilidad y estadística, Schaum, segunda edición, 2003.