SISTEMAS LINEALES			PRUEBA 3		20/12/2012
APELLIDOS:	SOLUCIÓN	**NOMBRE:**		**DNI:**	

LEA ATENTAMENTE ESTAS INSTRUCCIONES Y NO DE LA VUELTA A ESTA HOJA HASTA QUE SE LE INDIQUE

PARA LA REALIZACIÓN DE ESTE EXAMEN NO SE PERMITE EL USO DE LIBROS NI APUNTES
NI LA UTILIZACIÓN DE CALCULADORAS

Este examen consta de dos partes:

La primera parte consiste en un *test* de carácter eminentemente teórico. Su objetivo es hacer una evaluación general y homogénea sobre todos los conceptos explicados. Su valor sobre la nota total del examen es de **2 puntos** como máximo. Es imprescindible obtener **al menos 0,7 puntos** en esta parte para que se evalúe el resto del examen.

La segunda parte consta de ejercicios de carácter eminentemente práctico. Su objetivo es evaluar la capacidad del alumno para resolver problemas de análisis con un nivel de dificultad similar al de los problemas propuestos en la asignatura. Su valor sobre la nota total del examen es de **8 puntos**. Es imprescindible obtener **al menos 3 puntos** en esta parte para que se evalúe el resto del examen.

Primera parte (20'):

- La prueba consta de 15 enunciados que deberá designar como **V** o **F** según considere que son verdaderos o falsos. La contestación ha de figurar **con letra clara** en la casilla que se encuentra a la **izquierda** de cada enunciado.
- Cualquier contestación que no sea **V** o **F**, o que no sea perfectamente legible será considerada nula. Si desea rectificar la contestación hágalo de forma clara y limpia.
- Las respuestas contestadas correctamente se evaluarán como **1**, las no contestadas o nulas como **0** y las contestadas incorrectamente como **-0.5** (es decir, puntuarán negativo). No se evaluará ningún tipo de explicación, operación o demostración: únicamente la respuesta **V** o **F**.

V o **F**

V	Dada una señal $x[n]$ de duración finita, el valor de su DTFT en el origen es igual a la suma de todos los valores de $x[n]$.
V	El ancho de banda de una asociación en cascada de filtros paso-bajo ideales es igual al del filtro de la asociación con menor ancho de banda.
F	El diezmado o escalado de una señal discreta es una operación teóricamente irreversible, ya que se eliminan definitivamente valores de la señal.
F	La convolución de dos señales periódicas es siempre igual al resultado de convolucionar un periodo de una con uno de la otra y repetir el resultado periódicamente.
V	La convolución de un tren de impulsos discreto de periodo $N=4$ con una señal real $x[n]$ no periódica limitada en banda por $\omega_M < \pi/2$, es una señal constante.
V	La DTFT de la señal $x[n]=u[n+2]-u[n-3]$ es una función real.
V	La energía de una señal de tiempo continuo es proporcional a la energía de su FT, y la de una señal de tiempo discreto es igual a la potencia de su DTFT.
V	La operación de interpolación y diezmado permite realizar un muestreo efectivo sin *aliasing* de cualquier señal discreta limitada en banda.
V	La serie de coeficientes del FS o DTFS de un tren de deltas periódico es una serie periódica, tanto si el tren de deltas es de tiempo continuo como de tiempo discreto.
V	Si $h[n]$ es la respuesta al impulso de un filtro paso banda ideal, $e^{j\pi n} \cdot h[n]$ es también la respuesta al impulso de un filtro paso banda ideal.
F	Si $x[n]$ periódica tiene doble periodo que $y[n]$, entonces $X(e^{j\omega})$ tiene mitad de periodo que $Y(e^{j\omega})$.
F	Si el módulo de los coeficientes del FS de una señal periódica forma una serie par, dicha señal es necesariamente real o imaginaria pura.
F	Si se muestrea la señal $x(t)=(sen(100t)/\pi t)^2$ a $\omega_s = 320$ no se produce *aliasing*.
F	Si una señal $x(t)$ se submuestrea a ω_s y luego se hace pasar por un filtro paso bajo ideal de pulsación de corte $\omega_c = \omega_s/2$, la señal resultante es idéntica a $x(t)$.
V	Si una señal real $x[n]$ limitada en banda por $\omega_M < \pi/4$ se diezma por cuatro y se interpola por dos, es posible recuperar de algún modo la señal inicial $x[n]$.

SISTEMAS LINEALES		PRUEBA 3	20/12/2012
APELLIDOS: Solución	NOMBRE:	DNI:	

Segunda parte (90')

Problema 1 (3 puntos)

Sea el sistema de tiempo discreto S, LTI estable y causal, definido por la relación entrada-salida:

$$S:\ 3y[n]-2y[n-1]=7x[n]-5x[n-1]$$

El objetivo de este ejercicio es caracterizar el comportamiento de este sistema y obtener así su respuesta a diferentes entradas. Teniendo en cuenta que debe enunciar todas las propiedades que utilice, y deducir todos los pares transformados que aplique:

1. Obtenga $X\left(e^{j\omega}\right)$, la DTFTde la señal $x[n]=a^n u[n]$, $|a|<1$. Demuestre razonadamente, sin calcularlo, si $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ presenta o no algún tipo de simetría.

- $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n =$$

$$\underset{|a|<1}{=} \frac{1-0}{1-ae^{-j\omega}} \Rightarrow x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}}$$

- PROPIEDADES: $x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})$

$$x^*[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-j\omega})$$

$x[n]$ REAL $\Rightarrow x[n]=x^*[n] \Rightarrow$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |X(e^{j\omega})| = |X^*(e^{-j\omega})| \\ |X^*(e^{-j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \Rightarrow \underline{\text{PAR}}$$

2. Enuncie las propiedades convolución y desplazamiento en 'n' de la DTFT. Demuestre esta última propiedad.

- $y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{DTFT} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$

- $x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$

  $x[n-n_0] \longrightarrow e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})$

DEMO:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \Rightarrow x[n-n_0] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})e^{j\omega(n-n_0)}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \underbrace{X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}}\, e^{j\omega n}d\omega$$

$$\Rightarrow x[n-n_0] \xrightarrow{DTFT} e^{-j\omega_0 n} X(e^{j\omega})$$

3. Obtenga, aplicando exclusivamente linealidad y las propiedades del apartado anterior, la expresión de la respuesta en frecuencia, $H(e^{j\omega})$, del sistema S. A partir de ella, y aplicando los resultados del primer apartado, obtenga la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema y represéntela en el intervalo $n \in [-5,5]$.

$$3y[n] - 2y[n-1] = 7x[n] - 5x[n-1]$$

$$\downarrow DTFT$$

$$\left.\begin{array}{l} 3Y(e^{j\omega}) - 2e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = 7X(e^{j\omega}) - 5X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \\ H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

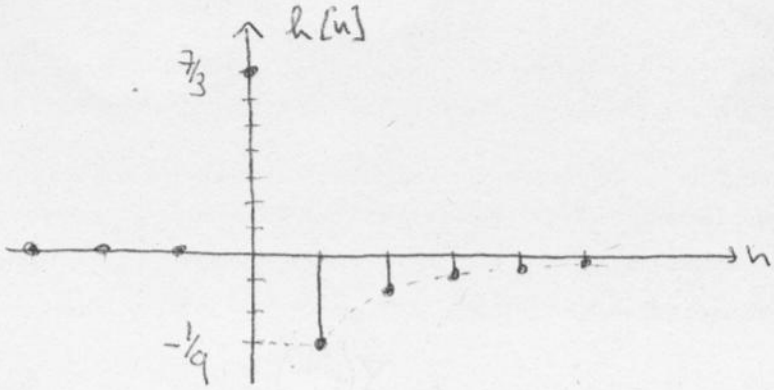
$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{7-5e^{-j\omega}}{3-2e^{-j\omega}} = \frac{7}{3}\,\frac{1-\frac{5}{7}e^{-j\omega}}{1-\frac{2}{3}e^{-j\omega}} = \frac{7}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{5}{7}e^{-j\omega}}{1-\frac{2}{3}e^{-j\omega}}\right]$$

POR ANALOGÍA CON EL PRIMER APARTADO:

$$h[n] = \frac{7}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] - \frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}u[n-1] =$$

$$= \frac{7}{3}\cdot\delta[n] + \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n} u[n-1] - \frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u[n-1] =$$

$$= \frac{7}{3}\,\delta[n] - \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$



4. Obtenga, aplicando la propiedad de convolución, la respuesta del sistema S a la señal $x_1[n] = \delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1]$.

· $\delta[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1\ ,\ \forall n$

· PROPIEDADES DE LINEALIDAD Y DESPLAZAMIENTO:

$$x[n] = \delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = 1 - \frac{2}{3}e^{-j\omega}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\cdot X(e^{j\omega}) = \frac{7}{3}\left(1 - \frac{5}{7}e^{-j\omega}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = \frac{7}{3}\delta[n] - \frac{5}{3}\delta[n-1]}$$

FIN PROBLEMA 1

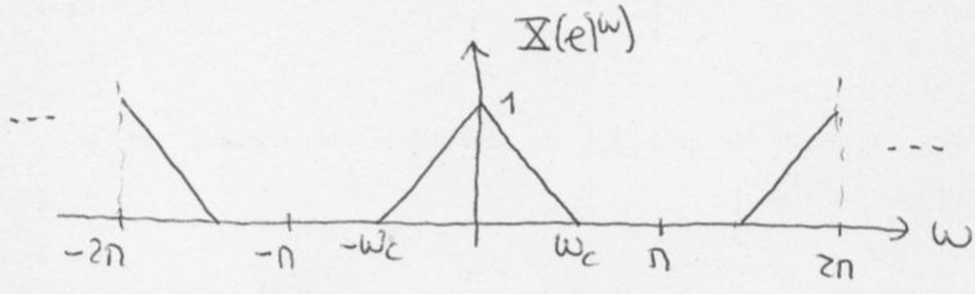
Problema 2 (5 puntos)

Sea una señal $x[n]$ cuya Transformada de Fourier (DTFT) viene definida en el intervalo $-\pi \le \omega \le \pi$ por la expresión:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{-|\omega|}{\omega_c}+1 & ,|\omega|<\omega_c \\ 0 & ,resto \end{cases}, \text{ con } \omega_c \in [0,\pi].$$

Se desea analizar el resultado de muestrear la señal $x[n]$ con distintos intervalos de muestreo, *N*. Resuelva las siguientes cuestiones (enuncie cualquier propiedad que utilice y deduzca cualquier par transformado que aplique):

1. Represente $X(e^{j\omega})$ indicando sus valores más representativos. A continuación deduzca y obtenga el máximo valor de *N* que verifica el Teorema de *Nyquist* para cada uno de los valores de ω_c que indica la tabla adjunta. Por último, indique razonadamente cuál es el máximo valor de ω_c que permitiría reducir mediante muestreo ideal sin *aliasing* el número de valores de $x[n]$.



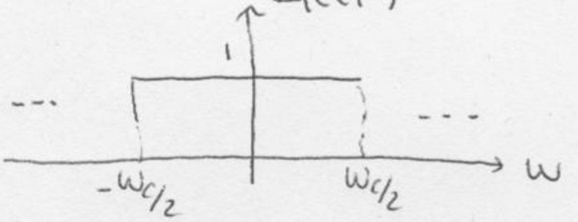
TEOREMA DE NYQUIST: $\omega_s > 2\omega_m = 2\omega_c \Rightarrow \dfrac{2\pi}{N} \geq 2\omega_c \Rightarrow N \leq \dfrac{\pi}{\omega_c}$, $N \in \mathbb{Z}^+$

DANDO VALORES A ω_c:

ω_c	π	$2\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/5$	$\pi/3$	$2\pi/7$
N	1	1	2	2	3	3

$\omega_{c\,MAX} = \pi/2$

2. Obtenga, en función de expresiones de tipo 'sinc', la señal $x_1[n]$ cuya DTFT viene dada por la expresión $X_1(e^{j\omega}) = u(\omega+\omega_c/2) - u(\omega-\omega_c/2)$. A continuación, obtenga la DTFT de la señal $x_1[n]\cdot x_1[n]$, y represéntela en el intervalo $\omega \in [-\pi,\pi]$.

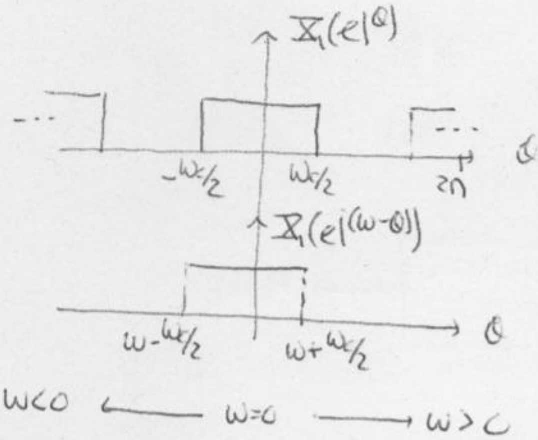


$\xrightarrow{DTFT^{-1}} x_1[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\omega_c/2}^{\omega_c/2} e^{j\omega n}\,d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{j\frac{\omega_c}{2}n} - e^{-j\frac{\omega_c}{2}n}}{jn} = \frac{sen\left(\frac{\omega_c}{2}n\right)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{2\pi}\, sinc\left(\frac{\omega_c}{2\pi}n\right)$$

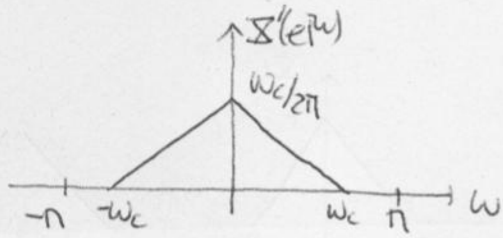
POR LA PROPIEDAD DE MULTIPLICACIÓN:

$$x_1[n]\cdot x_1[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega}) \circledast X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega}) * \hat{X}_1(e^{j\omega}) = X'(e^{j\omega})$$



$\frac{\omega_c}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow X_1(e^{j(\omega-\theta)})$ SÓLO SOLAPA CON UN PERIODO DE $X_1(e^{j\omega})$

- $-\pi < \omega < -\omega_c \Rightarrow X'(e^{j\omega}) = 0$
- $-\omega_c < \omega < 0 \Rightarrow X'(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c/2}^{\omega+\omega_c/2} d\theta = \frac{1}{2\pi}(\omega+\omega_c)$
- $0 < \omega < \omega_c \Rightarrow X'(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}(\omega_c-\omega)$
- $\omega_c < \omega < \pi \Rightarrow X'(e^{j\omega}) = 0$



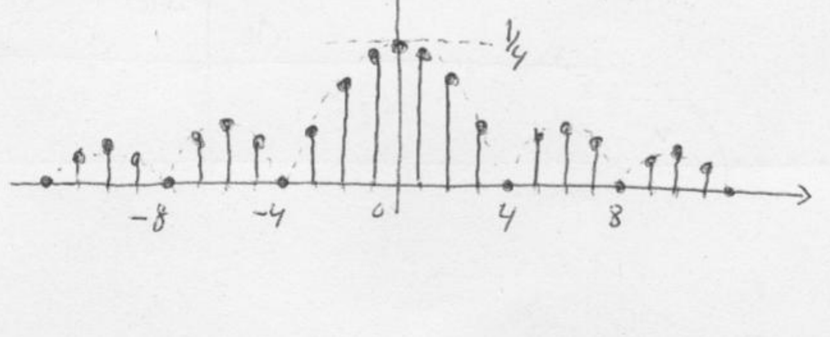
3. A partir de las conclusiones del apartado anterior, obtenga, en función de ω_c, la expresión analítica de la señal $x[n]$ y represéntela detalladamente para $\omega_c = \pi/2$ indicando sus valores más representativos: valor en el origen, signo, posición de los ceros, etc.

COMPARANDO $X(e^{j\omega})$ CON $X'(e^{j\omega})$ (APARTADO 2) $\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{\omega_c} X'(e^{j\omega}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (LINEALIDAD DTFT) $x[n] = \frac{2\pi}{\omega_c}\cdot x_1[n]\cdot x_1[n] \Rightarrow$

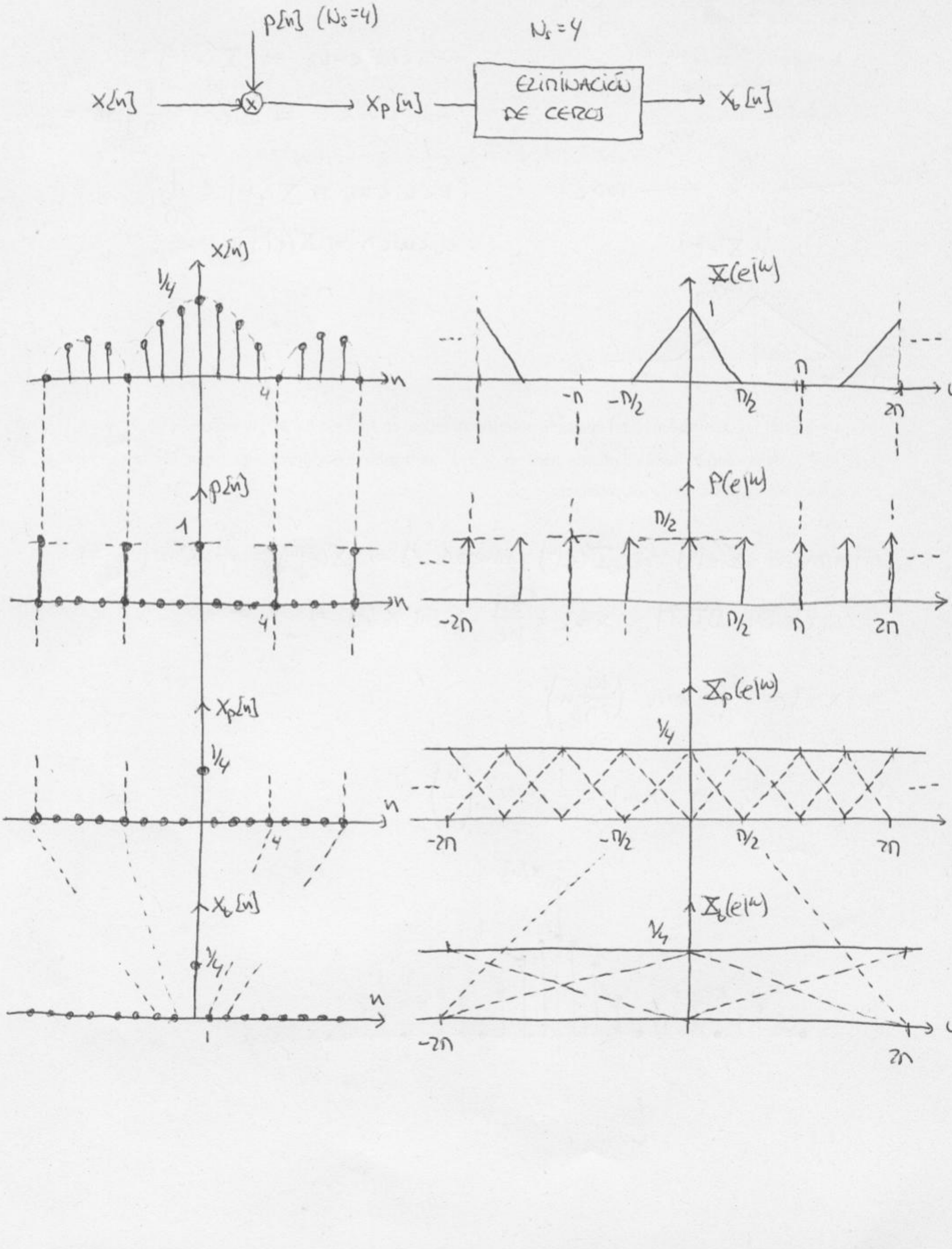
$$\Rightarrow x[n] = \frac{\omega_c}{2\pi}\cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega_c}{2\pi}n\right)$$

PARA $\omega_c = \pi/2 \Rightarrow x[n] = \frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right)$



4. Suponga que $\omega_c = \pi/2$ y que se diezma la señal $x[n]$ por un factor $N=4$. Dibuje un diagrama de bloques detallado de las etapas del modelo de un proceso de diezmado. A continuación represente gráficamente en dos columnas (en 'n' y 'ω') todas las señales involucradas en el proceso (es decir, la señal de partida $x[n]$, la señal muestreadora, $p[n]$, la señal muestreada, $x_p[n]$ y la señal diezmada, $x_b[n]$, así como sus respectivas DTFTs), indicando sus valores más representativos.

MODELO DE DIEZMADO:



5. Deduzca razonada y detalladamente la expresión analítica de las funciones y transformadas del apartado anterior.

$$\cdot\ x[n] = \frac{1}{4}\,sinc^2\left(\frac{n}{4}\right) \xrightarrow{\quad DTFT \quad} X(e^{j\omega})$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k] \xrightarrow{\quad DTFT \quad} P(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta(\omega - k\frac{\pi}{2}) \\ \quad \xrightarrow{\quad DTFS \quad} a_k = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=\langle 4\rangle} p[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4},\ \forall k \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{\pi}{2})$$

$$\cdot\ x_p[n] = x[n] \cdot p[n] = \frac{1}{4}\delta[n] \xrightarrow{\quad DTFT \quad} X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \cdot X(e^{j\omega}) \circledast P(e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{3} X(e^{j(\omega - k\frac{\pi}{2})}) = \frac{1}{4}$$

$$\cdot\ x_b[n] = x_p[4n] \xrightarrow{\quad DTFT \quad} X_b(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/4}) = \frac{1}{4}$$

FIN EXAMEN