

Análisis de Algoritmos, Gr. Ing. Informática
Examen Final, Segunda Parte, Enero 2021

Apellidos:
Grupo:

Nombre:
Aula:

Bloque:

1	2	P. 2

Preguntas

1. a. (3 puntos) i. ¿Cuál es la profundidad del árbol de decisión de QuickSort sobre tablas de 30 elementos?
- ii. Vamos a aplicar la rutina de creación de un Max Heap a una tabla con 8 elementos. Indicar cuántas comparaciones de clave se harán como máximo durante dicha creación.
- iii. ¿Cuál es la longitud de caminos externos de un árbol binario completo de profundidad 10?
- b. (3 puntos) Tras crear un max heap sobre una cierta permutación se llega a la siguiente tabla
[18 15 4 12 11 3].
Argumentar que la misma es en efecto un max heap y ordenarla según la segunda parte del algoritmo HeapSort indicando adecuadamente los pasos dados.
- c. (4 puntos) Estimar razonadamente el crecimiento de una función positiva T que cumple $T(1) = 0$ y

$$T(N) \leq \sqrt{N} + 9T\left(\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor\right).$$

Estimar primero un posible crecimiento en un caso particular adecuado y usarlo a continuación para estimar el crecimiento en el caso general.

2. a. (2 puntos) i. ¿Qué relación hay entre el caso medio $A_{XS}(N)$ sobre tablas de N elementos de un algoritmo XS de ordenación por comparación de claves y la longitud de caminos externos l_{ce} de su árbol de decisión T_{XS}^N ?
- ii. ¿Con qué permutación se alcanzaría el caso peor $W_{QS}(7)$ del algoritmo QuickSort?
- b. (4 puntos) El siguiente pseudocódigo corresponde a una versión `msort_inv` de MergeSort donde se ordena **primero la segunda** tabla y luego la primera.

```
def msort_inv(tabla t, indice p, indice u):  
    if p == u:  
        return OK  
  
    else:  
        m = (p+u)/2          //division entera  
        t_1 = msort_inv(t, m+1, u)  
        t_2 = msort_inv(t, p, m)  
        return combinar(t_1, t_2, t)
```

Dar el subárbol de decisión para tablas de 4 elementos cuando se aplica a permutaciones σ en las que $\sigma(2) = 4$.

- c. (4 puntos) El siguiente pseudocódigo recursivo calcula el valor del n -ésimo número de Fibonacci:

```
int fib(int t):  
    if n == 0 or n == 1:  
        return 1  
    else:  
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

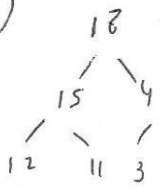
Queremos estimar razonadamente en función de n cuántas **sumas** efectuará dicho algoritmo para calcular el n -ésimo número de Fibonacci. Para ello, dar en primer lugar dichos números de sumas para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 y estimar a continuación el valor del número general de sumas.

1) a) i) $P_{rot}(T_{RS}^{30}) = W_{RS}(30) = \frac{30^2}{2} - \frac{30}{2} = 435$

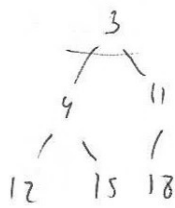
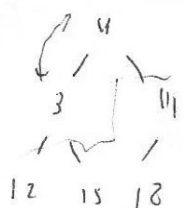
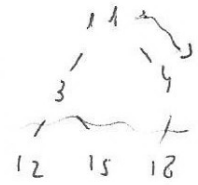
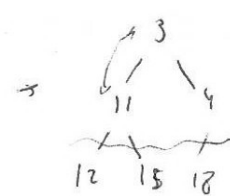
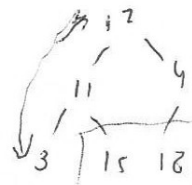
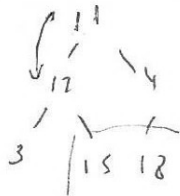
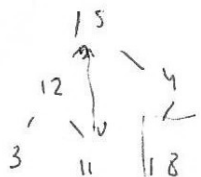
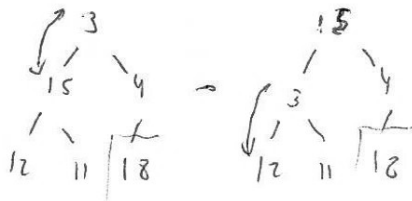
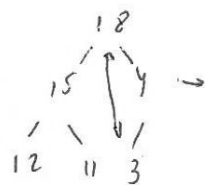
ii) $W_{CREAR(N)} \leq \frac{N}{2} \cdot \log_2 N = \frac{8}{2} \cdot \log_2 8 = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ TAMBIÉN VALE LA SOLUCIÓN $W_{CREAR(8)} \leq 7$

iii) $LGE = 102^{10} \approx 10240$

b)



Es max heap
 $18 > 15, 4$
 $15 > 12, 11$
 $4 > 3$



c) Sea $N = 3^k$

Si $N = 3^k$ $T(N) \leq \sqrt{N} + 3^k T\left(\frac{N}{3}\right) \leq \sqrt{N} + 3^k \left[\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{3}} + 3^k T\left(\frac{N}{3^2}\right) \right] =$

$T\left(\frac{N}{3}\right) \leq \sqrt{\frac{N}{3}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^2}\right) = \sqrt{N} + \sqrt{N} \cdot \frac{3^2}{\sqrt{3}} + 3^4 T\left(\frac{N}{3^2}\right) \leq$

$T\left(\frac{N}{3^2}\right) \leq \sqrt{\frac{N}{3^2}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^3}\right) = \sqrt{N} + \sqrt{N} \cdot \frac{3^2}{\sqrt{3}} + 3^4 \left[\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{3^2}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^3}\right) \right] =$

$T\left(\frac{N}{3^3}\right) \leq \sqrt{\frac{N}{3^3}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^4}\right) = \sqrt{N} + \sqrt{N} \cdot \frac{3^2}{\sqrt{3}} + \sqrt{N} \cdot \frac{3^4}{\sqrt{3^2}} + 3^6 T\left(\frac{N}{3^3}\right) \leq$

Si $N = 3^k$

$\sqrt{N} = \sqrt{3^k}$

$(3\sqrt{3})^k (N\sqrt{N})$

$\sqrt{N} + 3^{\frac{3}{2}} \sqrt{N} + 3^3 \sqrt{N} + 3^6 \left[\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{3^3}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^4}\right) \right] =$

$\sqrt{N} + 3^{\frac{3}{2}} \sqrt{N} + 3^{\frac{4}{2}} \sqrt{N} + 3^{\frac{5}{2}} \sqrt{N} + 3^8 T\left(\frac{N}{3^4}\right) \leq \dots \text{reces} \leq$

$\sqrt{N} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} 3^{2i} \cdot 3^{-1/2} + 3^{2k} T\left(\frac{N}{3^k}\right) = \sqrt{N} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 3^{3i/2} =$

$\sqrt{N} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (3^{3/2})^i = \sqrt{N} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (3\sqrt{3})^i = \sqrt{N} \cdot \left(\frac{(3\sqrt{3})^k - 1}{3\sqrt{3} - 1} \right) =$

Caso general

$$= \sqrt{N} \left(\frac{N\sqrt{N} - 1}{3\sqrt{3} - 1} \right) = \left[\frac{1}{3\sqrt{3} - 1} \cdot (N^2 - \sqrt{N}) \right]$$

$$T(N) \leq \sqrt{N} + 9T\left(\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor\right)$$

$$T(1) = \frac{1}{3\sqrt{3}-1} (1^2 - 1) = 0 \text{ ok}$$

Sup cierto que $T(N') \leq \frac{1}{3\sqrt{3}-1} (N'^2 - \sqrt{N'})$ si $N' < N$

$$T(N) \leq \sqrt{N} + 9T\left(\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor\right) \leq \sqrt{N} + 9 \left(\frac{1}{3\sqrt{3}-1} \left(\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor^2 - \sqrt{\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor} \right) \right) \stackrel{\leq}{\leq} \sqrt{N} + 9 \left(\frac{1}{3\sqrt{3}-1} \left(\frac{N^2}{9} - \sqrt{\frac{N}{3}} \right) \right)$$

$\wedge$ N hyp Induction

$x^2 \leq \sqrt{x}$
coeficiente
 $\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x}$

$$\sqrt{N} + 9 \left[\frac{1}{3\sqrt{3}-1} \left(\frac{N^2}{9} - \sqrt{\frac{N}{3}} \right) \right] = \sqrt{N} + \left[\frac{1}{3\sqrt{3}-1} (N^2 - 9\sqrt{\frac{N}{3}}) \right] =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}-1} N^2 + \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}-1} \cdot \frac{9}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}-1} N^2 + \left(1 - \frac{9}{9-\sqrt{3}} \right) \sqrt{N} =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}-1} N^2 + \left(\frac{9-\sqrt{3}-9}{9-\sqrt{3}} \right) \sqrt{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}-1} N^2 + \frac{-\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} \sqrt{N} =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}-1} N^2 + \frac{-1}{9/\sqrt{3}-1} \sqrt{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}-1} N^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}-1} \sqrt{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}-1} (N^2 - \sqrt{N})$$

$9/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

2)

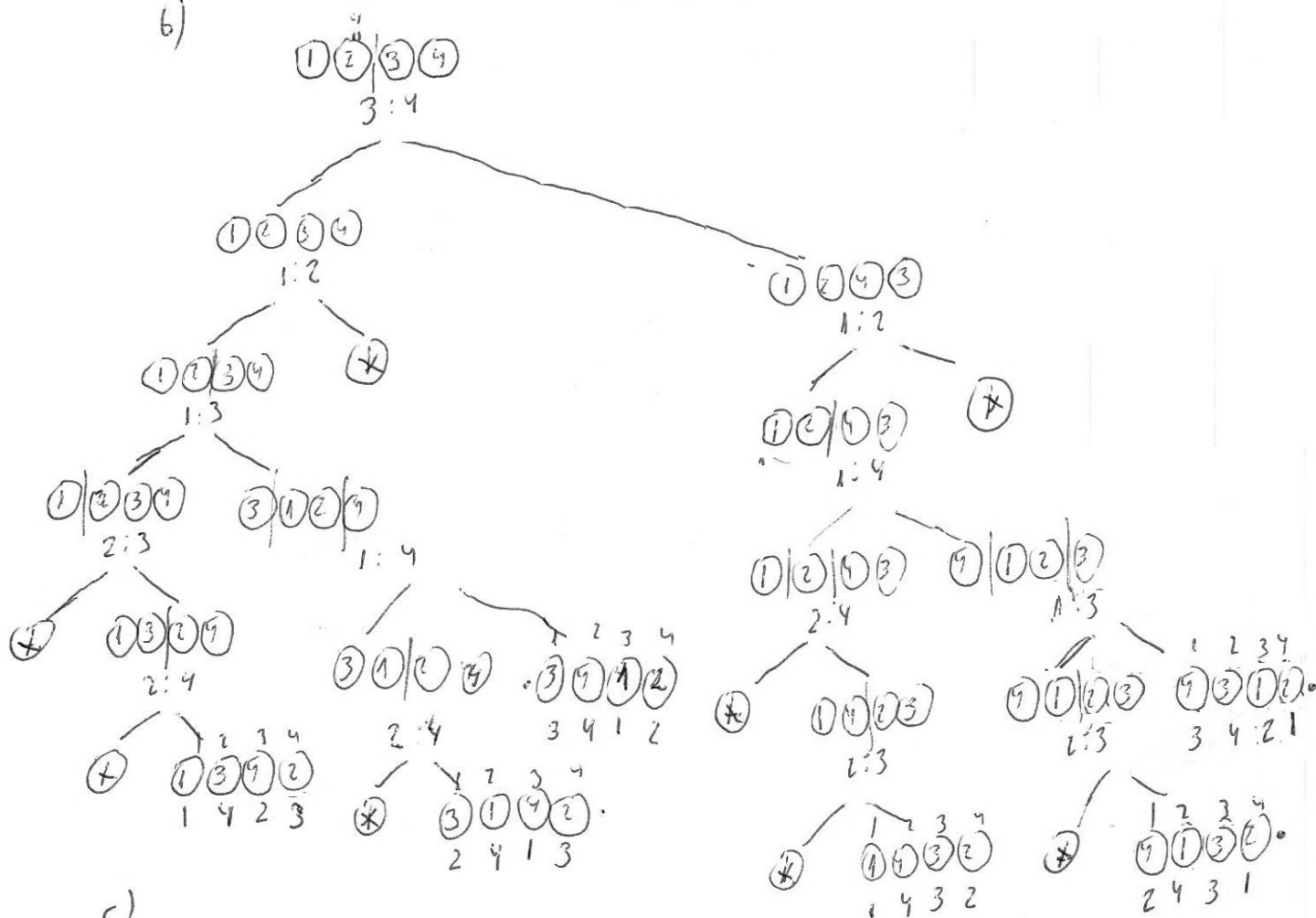
a)

$$i) \Delta_{XS}(N) = \frac{1}{N!} LCC(T_{XS}^N)$$

ii)

$$|Pos[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]| = \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} = W_{ar}(7)$$

b)



c)

$$n=0 \rightarrow 0$$

$$n=1 \rightarrow 0$$

$$n=2 \rightarrow 1$$

$$n=3 \rightarrow 2$$

$$n=4 \rightarrow 4$$

En general

$$n_{fib}(n) = n_{fib}(n-1) + n_{fib}(n-2) + 1$$

$$n_{fib}(0)=0 \rightarrow N_{fib}(0)=1$$

$$n_{fib}(1)=0 \rightarrow N_{fib}(1)=1$$

$$N_{fib}(n) = n_{fib}(n) + 1$$

$$\frac{n_{fib}(n) + 1}{N_{fib}(n)} = \frac{n_{fib}(n-1) + 1}{N_{fib}(n-1)} + \frac{n_{fib}(n-2) + 1}{N_{fib}(n-2)}$$

$$\text{Se ha: } N_{fib}(n) = N_{fib}(n-1) + N_{fib}(n-2) \quad N_{fib}(0)=1$$

$$N_{fib}(1)=1$$

$$N_{fib}(n) = F_n$$

(n-simo n° di fibonacci)

$$\Rightarrow n_{fib}(n) = N_{fib}(n) - 1 = F_n - 1$$