1. La intensidad, flujo de potencia o irradiancia, viene dada por el módulo promediado del vector de Poynting, **S**, que es igual a:

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2$$

donde c es la velocidad de la luz, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío y E_0 es la amplitud del campo eléctrico asociado a la onda electromagnética correspondiente. Obtenga la expresión anterior a partir de las ecuaciones del campo magnético y del campo eléctrico:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad B = B_0 \cos(\omega t - kx)$$

Solución:

Sabiendo que el vector de Poynting es:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Tenemos que, haciendo módulo:

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \cos^2(\omega t - kx)$$

Usando que $E_0 = cB_0$:

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{c\mu_0} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Y ahora aplicando promedios y sabiendo que el promedio del cuadrado del coseno es igual a 1/2, tenemos que:

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{c\mu_0} E_0^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2$$

donde se ha usado que $c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$.

ACLARACIONES: Esta pregunta podría haberse contestado, aunque no exactamente lo que se pide, usando la página 62 de los apuntes. En este caso, usando una sola línea y recordando de memoria un par de fórmulas:

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle \equiv S = c \langle u \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2$$

Donde hay que recordar que el promedio del módulo del vector de Poynting es igual a S. Todo lo anterior se encuentra en los apuntes de la asignatura (incluidos la definición del vector de Poynting y promedio del cuadrado del coseno para los valores medios). Además, hay que aclarar que cualquier contestación con algo de sentido debe partir de la definición del vector de Poynting, no de la solución que se proporciona en el enunciado del problema. Es decir, no es posible verificar la solución de un problema a partir de la propia solución. Aquellos estudiantes que, al menos, han escrito en el papel la definición del vector de Poynting como producto vectorial de campo eléctrico y magnético han puntuado con 3/10 el problema.

2. Dos habitaciones están separadas por un tabique de 3 cm de grosor; el material del tabique tiene una densidad de $1500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ y el sonido se propaga por él con una velocidad de $3000\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

   En una habitación una persona toca el piano, que produce un nivel sonoro promedio de 60 dB equilibrado en todas las frecuencias. El sonido se transmite por el tabique a la otra habitación siguiendo las reglas de un tabique ideal sin absorción.

$$\mathcal{T} = \left(\frac{2z_1}{z_2 \operatorname{sen}(k_2 d)}\right)^2$$

   (a) (2 puntos) Deducir la expresión aproximada de la transmitividad del tabique para el caso en que la longitud de onda en el interior de éste sea mucho mayor que su ancho, $\lambda \gg d$.

   (b) (6 puntos) A partir de la fórmula anterior, calcule cuál es la *frecuencia de corte*, f_c, del tabique, esto es, aquellos sonidos provenientes del piano, de frecuencia superior a f_c, que resultarían teóricamente inaudibles para otra persona situada en la habitación vecina, sin tener en cuenta escalas de ponderación.

   (c) (2 puntos) Compruebe que para sonidos de frecuencia f_c se cumple la condición $\lambda \gg d$.

   Datos: impedancia del aire, 400 rayls. **Ayuda**: $k = \omega/c$, $z = \rho c$.

Solución:

(a) El número de onda angular, k, no es más que la inversa de la longitud de onda por el factor 2π:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{c}\frac{c}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

por tanto:

$$\lambda \gg d \Longrightarrow \frac{d}{\lambda} \ll 1 \Longrightarrow kd \ll 1$$

En esas condiciones $\operatorname{sen} kd \simeq kd$. Sustituyendo:

$$\mathcal{T} \simeq \left(\frac{2z_1}{z_2 k_2 d}\right)^2 = \left(\frac{2z_1}{(\rho_2 c_2)(\omega/c_2)d}\right)^2 = \left(\frac{2z_1}{2\pi f \rho_2 d}\right)^2$$

que es la expresión que nos piden (también está en los apuntes).

(b) La intensidad sonora que atraviesa el tabique no es más que $I' = I\mathcal{T}$. Pasando esta expresión a niveles sonoros:

$$\begin{aligned} 10\log I' &= 10\log(I\mathcal{T}) \\ L' &= L + 10\log(\mathcal{T}) \end{aligned}$$

donde L es el nivel sonoro del piano (60 dB) y L' el nivel sonoro transmitido a la otra habitación que, para ser inaudible, tiene que ser al menos 0 para buscar la frecuencia de corte. Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 = 60 + 20\log\left(\frac{z_1}{\pi f_c \rho_2 d}\right) &\Longrightarrow \\ 60 = 20\log\left(\frac{\pi f_c \rho_2 d}{z_1}\right) & \end{aligned}$$

Operando y sustituyendo los datos:

$$\begin{aligned} 3 = \log\frac{1500 \times (3\times 10^{-2})\pi f_c}{400} &= \log(0{,}353 f_c) \\ 1000 = 0{,}353 f_c &\Longrightarrow f_c \simeq 2830\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

Es fácil ver que para $f > f_c$ el nivel sonoro en la habitación vecina está por debajo del umbral $L' < 0$.

(c) La longitud de onda de un sonido de frecuencia f_c en el interior del tabique es:

$$\lambda = \frac{c}{f_c} = \frac{3000}{2830} \simeq 1{,}06\,\mathrm{m}$$

y un metro es mucho mayor que los 3 cm que mide el tabique de grueso. Por tanto, podemos aceptar la aproximación realizada.

3. Determine el número atómico y el número másico del isótopo resultante de una cadena de desintegración natural en la que partiendo del Th_{90}^{232} se han producido, primero una desintegración α, luego 2 desintegraciones β^- sucesivas y posteriormente otras 2 α sucesivas. (8 puntos) ¿Cuántos antineutrinos se habrán emitido? (2 puntos)

Solución:

Según el enunciado, partiendo del Th_{90}^{232} se producen varias desintegraciones sucesivas

1ª Al ser una desintegración α, el núcleo hijo tiene que tener $A_1 = A - 4$ y $Z_1 = Z - 2$ con respecto al padre, por lo que será $A_1 = 228$ y $Z_1 = 88$

2ª Al ser una desintegración β^-, el núcleo siguiente tiene que tener $A_2 = A_1$ y $Z_2 = Z_1 + 1$ con respecto al anterior, por lo que será $A_2 = 228$ y $Z_2 = 89$

3ª Al ser una desintegración β^-, el núcleo siguiente tiene que tener $A_3 = A_2$ y $Z_3 = Z_2 + 1$ con respecto al anterior, por lo que será $A_3 = 228$ y $Z_3 = 90$

4ª Al ser una desintegración α, el núcleo siguiente tiene que tener $A_4 = A_3 - 4$ y $Z_4 = Z_3 - 2$ con respecto al anterior, por lo que será $A_4 = 224$ y $Z_4 = 88$.

5ª Y por último, al ser una desintegración α, el núcleo siguiente tiene que tener $A_5 = A_4 - 4$ y $Z_5 = Z_4 - 2$ con respecto al anterior, por lo que será $A_5 = 220$ y $Z_5 = 86$. Por lo que el isótopo que se pide en el enunciado es $\boxed{X_{86}^{220}}$

En cada desintegración β^- se emite un antineutrino, por lo que en esta cadena al haber 2 desintegraciones β^- se emiten 2 antineutrinos.