ELECTROMAGNETISMO Febrero 2010- 2^a Semana

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas.

MATERIAL: Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas en un cuadernillo de examen como máximo. Procure ser claro y conciso.

1.- Describa las ecuaciones de Maxwell para medios materiales analizando el significado de cada uno de las magnitudes vectoriales que aparecen. ¿Con qué conjunto de ecuaciones se completa la descripción macroscópica del campo electromagnético?

2.- En el estudio del campo electromagnético con frecuencia nos limitamos a ondas monocromáticas ¿Constituye esto una restricción? Razone la respuesta.

3.- Las soluciones para las ecuaciónes de los potenciales vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{V'}\frac{[\rho(\mathbf{r}')]_{\tau^-}}{R}\,dV' \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V'}\frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}')]_{\tau^-}}{R}\,dV'$$

¿Como se denominan estos potenciales? Discuta el significado físico de estos resultados y razone si son solución única a las ecuaciones de los potenciales.

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1

Determine el potencial en el interior de una región cilíndrica con las bases $z = 0$ y $z = l$ a potencial cero y la superficie cilíndrica de radio a dividida en dos partes. Desde $z = 0$ hasta $z = l/2$, se encuentra a potencial V_o; y desde $z = l/2$ hasta $z = l$, a potencial $-V_o$, tal como se muestra en la figura 1

PROBLEMA 2

Tenemos una esfera conductora hueca en cuyo centro existe una carga q, en presencia de un campo uniforme $\mathbf{E} = E_o\mathbf{u}_y$. Encuentre el potencial tanto en el interior como en el exterior de la esfera.

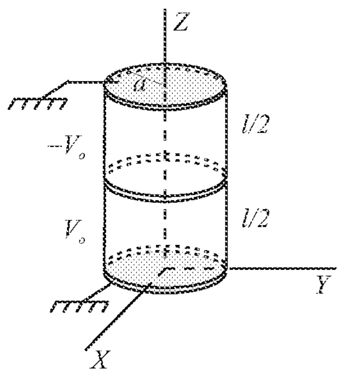

Figura 1

FORMULARIO

(1) **Operaciones diferenciales vectoriales**

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \qquad ; \qquad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{\partial U}{\rho \partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{\partial U}{r\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad ; \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r \operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & rA_\theta & (r \operatorname{sen}\theta)\,A_z \end{vmatrix}$$

(2) **Ecuación de los potenciales**

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A}$$

(3) **Desarrollo de Fourier**

$$F(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)\right)$$

$$a_n = 1/L \int_{-L}^{L} F(x)\cos(n\pi x/L)\,dx$$

$$b_n = 1/L \int_{-L}^{L} F(x)\operatorname{sen}(n\pi x/L)\,dx$$

(4) **Ecuación de Laplace en c. cartesianas**

$$\triangle\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad ; \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$k_x^2 > 0 \qquad X = A_1 \exp(k_x x) + A_2 \exp(-k_x x) = A_3 \sinh(k_x x) + A_4 \cosh(k_x x)$

$k_x^2 < 0 \qquad X = A_1 \exp(j\,|k_x|\,x) + A_2 \exp(-j\,|k_x|\,x) = A_3 \operatorname{sen}(|k_x|\,x) + A_4 \cos(|k_x|\,x)$

$k_x^2 = 0 \qquad X = A_1 x + A_2$

Soluciones análogas para Y, Z

(5) **Ecuación de Laplace en c. cilíndricas**

$$\triangle\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

(a) Simetría axial con invarianza longitudinal

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\phi = \left(C_1 r^n + C_2 r^{-n}\right)\left(A_1 \cos n\varphi + A_2 \operatorname{sen} n\varphi\right)$$

o bien , si $n = 0$

$$\phi = \left(k_1 \ln r + k_2\ \right)\left(A_1 \varphi + B_2\right)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = \left(B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr)\right)\left(A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz\right)$$

ó

$$\phi = \left(C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)\right)\left(D_1 \cos kz + D_2 \operatorname{sen} kz\right)$$

(6) **Ecuación de Laplace en c. esféricas**

$$\triangle \phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = \left(B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}\right)\left(A_1 \cos m\varphi + A_2 \operatorname{sen} m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta)$$

– –

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{m}\right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \qquad ; \qquad K_o(x) = N_o(jx)$$

Polinominos de Legendre

$$P_m(\cos\theta) = \frac{1}{2^m m!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^m \left(\cos^2\theta - 1\right)^m$$

$$\begin{aligned} P_o(\cos\theta) &= 1 \\ P_1(\cos\theta) &= \cos\theta \\ P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\ P_3(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \end{aligned}$$