

ELECTROMAGNETISMO Febrero 2011- 1ª Semana

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas en un cuadernillo de examen como máximo. Procure ser claro y conciso.

1.- 3.- La densidad de corriente media de un cuerpo sometido a un campo electromagnético externo variable, en principio, es función de los siguientes parámetros:

$$\mathbf{E}, \quad \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial H_i}{\partial x_k}$$

a) Explique cómo se llega a la expresión de la densidad de corriente en la materia:

$$\rho \mathbf{v} = \sigma \mathbf{E} + \chi_e \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \alpha c (\nabla \times \mathbf{B})$$

b) Indique el significado físico de cada símbolo y término de esta expresión. (No se precisa deducción) c) Explique la aplicabilidad de este desarrollo en el caso de un campo de alta frecuencia.

2.- Defina los siguientes conceptos: velocidad de fase, índice de refracción de un medio, vector de propagación complejo e impedancia característica de un medio.

3.- Defina lo que es un contraste de potenciales. El contraste de Lorentz y las características de los potenciales electrodinámicos que se obtienen con este contraste.

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1

Sea un conductor hueco de sección rectangular e indefinido en la dirección Z. Las dos paredes más estrechas, de 4cm de longitud cada una, están a un potencial de 5Voltios; y las otras dos de 10cm cada una están conectadas a tierra. Estimar el potencial y el campo eléctrico en el interior. Determinar su valor en el centro

PROBLEMA 2

Tenemos dos cargas de igual magnitud y distinto signo dispuestas frente a un plano conductor indefinido, conectado a tierra, como indica la figura 2. La distancia entre las cargas es $2d$ y la distancia al plano es d . Determinar de forma aproximada el potencial en cualquier punto suficientemente alejado del origen ($r \gg l$), a la derecha del plano indefinido.

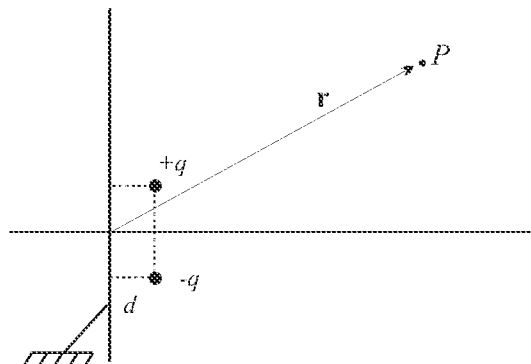


Figura 2

FORMULARIO

(1) Operaciones diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{\partial U}{\rho \partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{\partial U}{r \partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\theta & (r \operatorname{sen} \theta) \mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & r A_\theta & (r \operatorname{sen} \theta) A_z \end{vmatrix}$$

(2) Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}$$

(3) Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L))$$

$$a_n = 1/L \int_{-L}^L F(x) \cos(n\pi x/L) dx$$

$$b_n = 1/L \int_{-L}^L F(x) \operatorname{sen}(n\pi x/L) dx$$

(4) Ecuación de Laplace en c. cartesianas

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$k_x^2 > 0 \quad X = A_1 \exp(k_x x) + A_2 \exp(-k_x x) = A_3 \sinh(k_x x) + A_4 \cosh(k_x x)$$

$$k_x^2 < 0 \quad X = A_1 \exp(j|k_x| x) + A_2 \exp(-j|k_x| x) = A_3 \operatorname{sen}(|k_x| x) + A_4 \cos(|k_x| x)$$

$$k_x^2 = 0 \quad X = A_1 x + A_2$$

Soluciones análogas para Y, Z

(5) Ecuación de Laplace en c. cilíndricas

$$\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

(a) Simetría axial con invarianza longitudinal

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

o bien, si $n = 0$

$$\phi = (C_1 r^n + C_2 r^{-n}) (A_1 \cos n\varphi + A_2 \sin n\varphi)$$

$$\phi = (k_1 \ln r + k_2) (A_1 \varphi + B_2)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = (B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr)) (A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz)$$

ó

$$\phi = (C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)) (D_1 \cos kz + D_2 \sin kz)$$

(6) Ecuación de Laplace en c. esféricas

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = (A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = (B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}) (A_1 \cos m\varphi + A_2 \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta)$$

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma x}{2} \right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_0(x) = J_0(jx) \quad ; \quad K_0(x) = N_0(jx)$$

Polinomios de Legendre

$$P_m(\cos \theta) = \frac{1}{2^m m!} \left[\frac{d}{d(\cos \theta)} \right]^m (\cos^2 \theta - 1)^m$$

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$