ELECTROMAGNETISMO Febrero 2011- 2^a Semana

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas en un cuadernillo de examen como máximo. Procure ser claro y conciso.

1.- ¿Qué es un medio dispersivo? ¿Tiene sentido la definición de velocidad de grupo y paquete de ondas para tales medios? Razone la respuesta.

2.- Defina lo que es un contraste de potenciales. El contraste de Coulomb y las características de los potenciales electrodinámicos que se obtienen con este contraste.

3.- Las soluciones para las ecuaciónes de los potenciales vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{V'}\frac{[\rho(\mathbf{r}')]_{\tau^-}}{R}\,dV' \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V'}\frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}')]_{\tau^-}}{R}\,dV'$$

¿Como se denominan estos potenciales? Discuta el significado físico de estos resultados y razone si son solución única a las ecuaciones de los potenciales.

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1

Dos planos metálicos, indefinidos y separados una distancia $3a$, se encuentran a potencial cero. En el punto P se coloca una carga q. Hallar la fuerza sobre la carga con un error menor que el 1%.

PROBLEMA 2

Sea un conductor cilíndrico coaxial indefinido en la dirección Z, cuya sección se muestra en la Figura 2. La capa conductora interior se encuentra a potencial nulo mientras la campa externa, está dividida en dos secciones a potenciales $\pm V_o$. Se pide encontrar la función potencial en el espacio comprendido entre los cilindros.

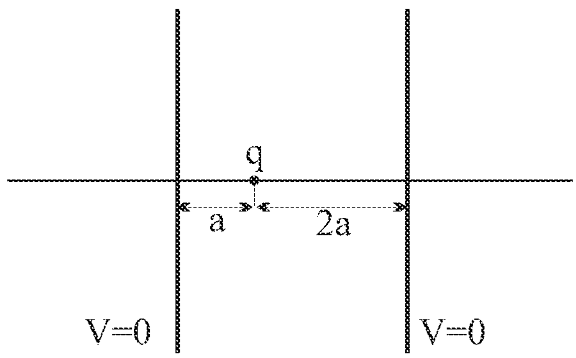

Figura 1

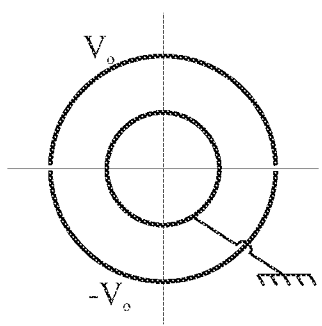

Figura 2

FORMULARIO

(1) **Operaciones diferenciales vectoriales**

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \qquad ; \qquad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{\partial U}{\rho\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{\partial U}{r\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad ; \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r \operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & rA_\theta & (r \operatorname{sen}\theta)\,A_z \end{vmatrix}$$

(2) **Ecuación de los potenciales**

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}$$

(3) **Desarrollo de Fourier**

$$F(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(n\pi x/L\right) + b_n \operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)\right)$$

$$a_n = 1/L\int_{-L}^{L} F(x)\cos\left(n\pi x/L\right)dx$$

$$b_n = 1/L\int_{-L}^{L} F(x)\operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)dx$$

(4) **Ecuación de Laplace en c. cartesianas**

$$\triangle\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad ; \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$k_x^2 > 0 \qquad X = A_1\exp(k_x x) + A_2\exp(-k_x x) = A_3\sinh(k_x x) + A_4\cosh(k_x x)$

$k_x^2 < 0 \qquad X = A_1\exp(j\left|k_x\right|x) + A_2\exp(-j\left|k_x\right|x) = A_3\operatorname{sen}(\left|k_x\right|x) + A_4\cos(\left|k_x\right|x)$

$k_x^2 = 0 \qquad X = A_1 x + A_2$

Soluciones análogas para Y, Z

(5) **Ecuación de Laplace en c. cilíndricas**

$$\triangle\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

(a) Simetría axial con invarianza longitudinal

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\phi = \left(C_1 r^n + C_2 r^{-n}\right)\left(A_1 \cos n\varphi + A_2 \operatorname{sen} n\varphi\right)$$

o bien , si $n = 0$

$$\phi = (k_1 \ln r + k_2 \,)\,(A_1 \varphi + B_2)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = (B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr))\,(A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz)$$

ó

$$\phi = (C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr))\,(D_1 \cos kz + D_2 \operatorname{sen} kz)$$

(6) **Ecuación de Laplace en c. esféricas**

$$\triangle \phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = \left(B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}\right)\left(A_1 \cos m\varphi + A_2 \operatorname{sen} m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta)$$

– –

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{m}\right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \qquad ; \qquad K_o(x) = N_o(jx)$$

Polinominos de Legendre

$$P_m(\cos\theta) = \frac{1}{2^m m!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^m \left(\cos^2\theta - 1\right)^m$$

$$\begin{aligned} P_o(\cos\theta) &= 1 \\ P_1(\cos\theta) &= \cos\theta \\ P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\ P_3(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \end{aligned}$$