

ELECTROMAGNETISMO Febrero 2012- 1ª Semana

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas. Procure ser claro y conciso, utilice la carilla de una hoja como máximo para cada pregunta.

- 1.- ¿En qué consiste el principio de superposición de campos? Analice si existe límite de aplicabilidad para dicho principio.
- 2.- Explique qué se entiende por polarización de una onda plana y analice los distintos casos que se pueden dar para una onda elípticamente polarizada.
- 3.- Describa el movimiento de una carga con velocidad uniforme \mathbf{v} en el seno de un campo magnético uniforme ¿Qué es la frecuencia de ciclotrón? ¿Qué leyes de conservación se verifican? (no se precisa deducción matemática)

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1

Dos cargas puntuales, $+q$ y $-q$, están situadas sobre el diámetro de una esfera conductora de radio R , a una distancia $D > R$ tal como indica la figura 1. Determinar el momento dipolar del dipolo que las cargas imagen forman en el centro de la esfera. Si hacemos tender D y q a infinito de manera que el cociente q/D^2 permanezca constante, determine el campo fuera de la esfera.

El potencial debido a un dipolo en el origen viene dado por $V_d = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r) / 4\pi\epsilon_0 r^2$

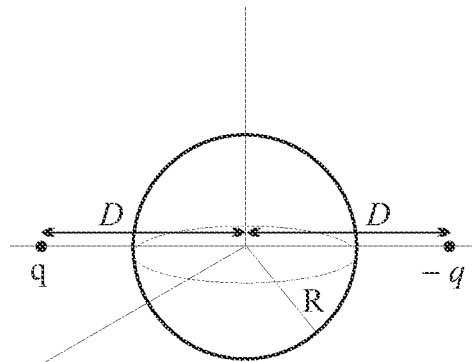


Figura 1

PROBLEMA 2

Un cilindro hueco de radio R e indefinido en la dirección Z se puede aproximar por un gran número de alambres paralelos que pueden mantenerse a potenciales arbitrarios. Si el potencial de la capa cilíndrica es $V = V_0 \sin \theta$, encuentre el potencial en puntos exteriores al cilindro. Halle la densidad de carga sobre la superficie del cilindro.

FORMULARIO

(1) Operaciones diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\begin{aligned}\nabla U &= \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z \\ \nabla U &= \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi\end{aligned}$$

Divergencia

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Rotacional

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\theta & (r \sin \theta) \mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & r A_\theta & (r \sin \theta) A_\varphi \end{vmatrix}\end{aligned}$$

(2) Ecuación de los potenciales

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\mu_o \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_o}\end{aligned}$$

(3) Desarrollo de Fourier

$$\begin{aligned}F(x) &= a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)] \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos(n\pi x/L) dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sin(n\pi x/L) dx\end{aligned}$$

(4) Ecuación de Laplace en c. cartesianas

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \\ k_x^2 > 0 &\Rightarrow X = A_1 \exp(k_x x) - A_2 \exp(-k_x x) = A_3 \sinh k_x x + A_4 \cosh k_x x \\ k_x^2 < 0 &\Rightarrow X = A_1 \exp(j |k_x| x) - A_2 \exp(-j |k_x| x) = A_3 \sin(|k_x| x) + A_4 \cos(|k_x| x) \\ k_x^2 = 0 &\Rightarrow X = A_1 x + A_2\end{aligned}$$

(4) Ecuación de Laplace en c. cilíndricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

(a) Simetría axial con invarianza longitudinal

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

o bien, si $n = 0$

$$\phi = (C_1 r^n + C_2 r^{-n}) (A_1 \cos n\varphi + A_2 \sin n\varphi)$$

$$\phi = (k_1 \ln r + k_2) (A_1 \varphi + B_2)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = (B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr)) (A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz)$$

ó

$$\phi = (C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)) (D_1 \cos kz + D_2 \sin kz)$$

(6) Ecuación de Laplace en c. esféricas

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = (A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = (B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}) (A_1 \cos m\varphi + A_2 \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta)$$

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma x}{2} \right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_0(x) = J_0(jx) \quad ; \quad K_0(x) = N_0(jx)$$

Polinomios de Legendre

$$P_m(\cos \theta) = \frac{1}{2^m m!} \left[\frac{d}{d(\cos \theta)} \right]^m (\cos^2 \theta - 1)^m$$

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$