

Electromagnetismo. Febrero 2013. 2^a Semana

Instrucciones: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas.

MATERIAL: Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas. Procure ser claro y conciso, utilice la carilla de una hoja como máximo para cada pregunta.

1.- ¿Es posible asociar un momento angular al campo electromagnético? ¿Qué ley de conservación está implicada?

2.- Demuestre que en el caso de medios anisótropos, son válidas las siguientes igualdades:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) \quad ; \quad \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right)$$

3.- Defina lo que es un contraste de potenciales. El contraste de Lorentz y las características de los potenciales electrodinámicos que se obtienen con este contraste.

PROBLEMAS: Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1 Encontrar la capacidad por unidad de longitud del sistema formado por un cilindro indefinido de radio a situado a una distancia d de un plano indefinido conectado a tierra.

PROBLEMA 2 Sobre una capa cilíndrica de radio a e indefinida en la dirección z se distribuye una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$. Encuentre el potencial dentro y fuera de la capa cilíndrica.

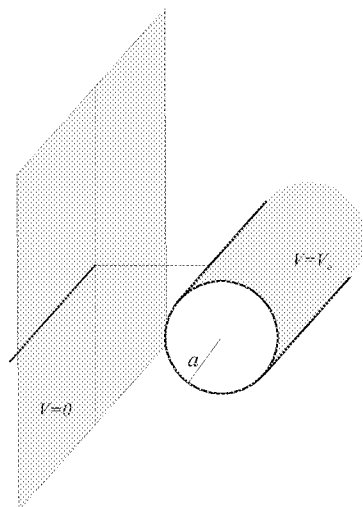


Figura 1

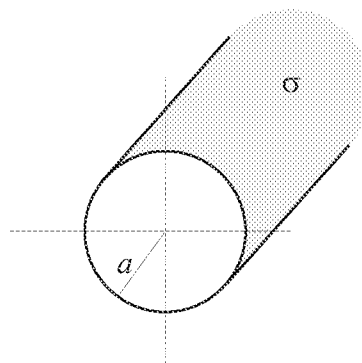


Figura 2

FORMULARIO

1. Operadores diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\theta & (r \sin \theta) \mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & r A_\theta & (r \sin \theta) A_\varphi \end{vmatrix}$$

2. Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_o \mathbf{J} \quad ; \quad \nabla^2 \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

3. Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)]$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos(n\pi x/L) dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sin(n\pi x/L) dx$$

4. Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$k_x^2 > 0 \Rightarrow X = A_1 \exp(k_x x) + A_2 \exp(-k_x x) = A_3 \sinh(k_x x) + A_4 \cosh(k_x x)$$

$$k_x^2 < 0 \Rightarrow X = A_1 \exp(j|k_x|x) + A_2 \exp(-j|k_x|x) = A_3 \sin(|k_x|x) + A_4 \cos(|k_x|x)$$

$$k_x^2 = 0 \Rightarrow X = A_1 x + A_2$$

5. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

a) Simetría axial con invarianza longitudinal: $\phi = k_1 \ln \rho + k_2$

b) Invarianza longitudinal

$$\phi = (C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}) (A_1 \cos(n\varphi) + A_2 \sin(n\varphi))$$

o bien, si $n = 0$:

$$\phi = (k_1 \ln \rho + k_2) (A_1 \varphi + A_2)$$

c) Simetría axial

$$\phi = (B_1 J_0(k\rho) + B_2 N_0(k\rho)) (A_1 \sinh(kz) + A_2 \cosh(kz))$$

ó

$$\phi = (C_1 I_0(k\rho) + C_2 K_0(k\rho)) (D_1 \sin(kz) + D_2 \cos(kz))$$

6. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

a) Asimetría total

$$\phi = \left(A_1 r^n A_2 r^{-(n+1)} \right) (A_1 \sin(m\varphi) + A_2 \cos(m\varphi)) P_n^m(\cos \theta)$$

b) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta)$$

7. Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma x}{2} \right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_0(x) = J_0(jx) \quad ; \quad K_0(x) = N_0(jx)$$

8. Polinomios de Legendre

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{d}{d(\cos \theta)} \right]^n (\cos^2 \theta - 1)^n$$

$$P_0(\cos \theta) = 1 \qquad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta \qquad P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$