

ELECTROMAGNETISMO Septiembre 2014- Reserva

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas en un cuadernillo de examen como máximo. Procure ser claro y conciso.

1.- ¿En qué consiste el principio de superposición de campos? Analice si existe límite de aplicabilidad para dicho principio.

2.- En la aproximación de orden cero del desarrollo multipolar de la radiación electromagnética los campos vienen dados por

$$\mathbf{H}_o = \frac{j\omega}{4\pi} e^{-jkr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) \mathbf{p}^{(1)} \times \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{E}_o = \frac{e^{-jkr}}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) [3\mathbf{u}_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}^{(1)}) - \mathbf{p}^{(1)}] - \frac{k^2}{r} [\mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{p}^{(1)})] \right\}$$

Explique el significado de cada uno de los términos y de las magnitudes que en ellos aparecen y analice las expresiones en la zona lejana.

3.- Describa el movimiento de una carga con velocidad uniforme v en el seno de un campo magnético uniforme ¿Qué es la frecuencia de ciclotrón? ¿Qué leyes de conservación se verifican? (no se precisa deducción matemática)

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1: Determine el potencial en el interior de la región cilíndrica indefinida de radio a que se muestra en la figura 1. Como puede verse, está dividida en cuatro secciones iguales de longitudes $\pi a/2$. Dos de ellas conectadas a tierra y las otras a potenciales V_o y $-V_o$.

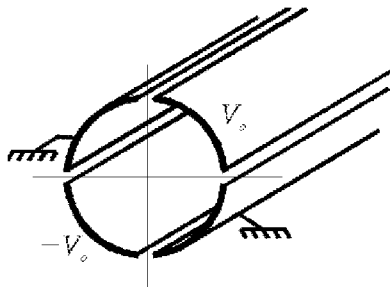


Figura 1

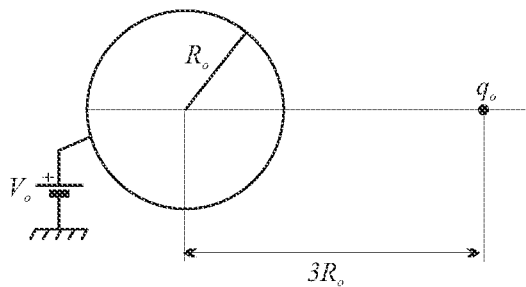


Figura 2

FORMULARIO

1. Operadores diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z$$
$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$
$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\theta & (r \sin \theta) \mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & r A_\theta & (r \sin \theta) A_\varphi \end{vmatrix}$$

2. Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_o \mathbf{J} \quad ; \quad \nabla^2 \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

3. Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)]$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos(n\pi x/L) dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sin(n\pi x/L) dx$$

4. Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$k_x^2 > 0 \Rightarrow X = A_1 \exp(k_x x) + A_2 \exp(-k_x x) = A_3 \sinh(k_x x) + A_4 \cosh(k_x x)$$

$$k_x^2 < 0 \Rightarrow X = A_1 \exp(j|k_x|x) + A_2 \exp(-j|k_x|x) = A_3 \sin(|k_x|x) + A_4 \cos(|k_x|x)$$

$$k_x^2 = 0 \Rightarrow X = A_1 x + A_2$$

5. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho \partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

a) Simetría axial con invarianza longitudinal: $\phi = k_1 \ln \rho + k_2$

b) Invarianza longitudinal

$$\phi = (C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}) (A_1 \cos(n\varphi) + A_2 \sin(n\varphi))$$

o bien, si $n = 0$:

$$\phi = (k_1 \ln \rho + k_2) (A_1 \varphi + A_2)$$

c) Simetría axial

$$\phi = (B_1 J_0(k\rho) + B_2 N_0(k\rho)) (A_1 \sinh(kz) + A_2 \cosh(kz))$$

ó

$$\phi = (C_1 I_0(k\rho) + C_2 K_0(k\rho)) (D_1 \sin(kz) + D_2 \cos(kz))$$

6. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

a) Asimetría total

$$\phi = (A_1 r^n A_2 r^{-(n+1)}) (A_1 \sin(m\varphi) + A_2 \cos(m\varphi)) P_n^m(\cos \theta)$$

b) Simetría alrededor de z

$$\phi = (A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

7. Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma x}{2} \right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_0(x) = J_0(jx) \quad ; \quad K_0(x) = N_0(jx)$$

8. Polinomios de Legendre

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{d}{d(\cos \theta)} \right]^n (\cos^2 \theta - 1)^n$$

$$P_0(\cos \theta) = 1 \quad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

ELECTROMAGNETISMO F.I.A. RESERVA

INSTRUCCIONES:

El examen consta de dos partes: Teoría (6ptos) y Problemas (4ptos). Para aprobar será necesario, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 2ptos en la de Problemas. MATERIAL: Calculadora no programable.

TEORIA

1.- Para un sistema de radiación transversal (tipo “broadside”) compuesto de un número elevado de antenas isotropas en línea, la directividad puede aproximarse como

$$D \simeq \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

siendo Ω_A el ángulo sólido que abarca el haz principal (se ignoran los lóbulos menores). A partir de la definición de esta magnitud, justifique dicha expresión e indique, de manera genérica, la expresión de Ω_A .

2.- Carta de Smith. Describa brevemente en qué consiste y cite cuales son sus principales aplicaciones.

3.- Factor de calidad Q. ¿Cómo se define y qué información puede proporcionarnos acerca del comportamiento de una cavidad resonante y de los materiales que la constituyen?

PROBLEMA 1

Una línea de transmisión de impedancia característica $Z_o = 50\Omega$, cerrada por una impedancia $Z_L = (150 + j100)\Omega$ está alimentada por un generador de frecuencia 10 kHz. Ha sido adaptada, como se muestra en la figura 1, mediante un “stub” formado por una sección de línea de longitud $0,237\lambda$ y de impedancia característica $Z'_o = 100\Omega$ terminada por una autoinducción L . a) Determine a qué distancia de la carga hay que colocar el “stub” y el valor de la autoinducción L que lo cierra. b) Determine la longitud del “stub” necesaria para adaptar la carga si sustituimos la autoinducción por un cortocircuito.

PROBLEMA 2

En una guía rectangular de dimensiones $a = 2b$ y dieléctrico aire, las líneas de campo de un cierto modo tienen el aspecto que se representa en la figura 2. a) De qué modo se trata, razone la respuesta. Se observa que la distancia entre dos ceros consecutivos de la componente de campo longitudinal es de 10 cm cuando la frecuencia de trabajo es 4,5 GHz. Determine las dimensiones de la guía.

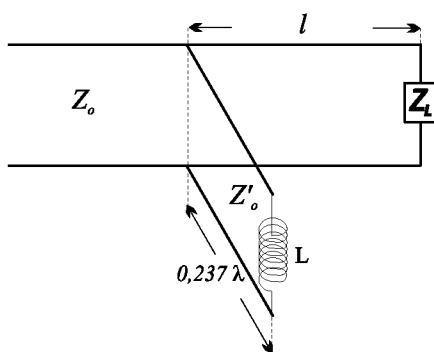


Figura 1

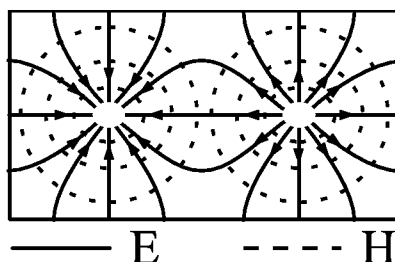


Figura 2

FORMULARIO

1.- Sistemas de transmisión con simetría traslacional

$$E_t = \frac{1}{k^2 - \beta^2} (j\omega\mu\vec{u}_z \times \nabla_t H_z \mp j\beta\nabla_t E_z) \quad H_t = \frac{1}{k^2 - \beta^2} (-j\omega\varepsilon\vec{u}_z \times \nabla_t E_z \mp j\beta\nabla_t H_z)$$

2.- Líneas de transmisión

$$Z_N = \frac{Z_{LN} + j \tan(\beta l)}{1 + j Z_{LN} \tan(\beta l)} \quad v(l) = a_o^+ e^{j\beta l} (1 + \rho) \quad I(l) = \frac{1}{2Z_o} a_o^+ e^{j\beta l} (1 - \rho)$$

3.- Guías rectangulares

Modos TE

$$H_{zmn} = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$H_{xmn} = \left(j \frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2} \frac{m\pi}{a} \right) A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$H_{ymn} = \left(j \frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2} \frac{n\pi}{b} \right) A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$E_{xmn} = \left(j \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k}{\gamma_{mn}^2} \frac{n\pi}{b} \right) A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$E_{ymn} = \left(-j \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k}{\gamma_{mn}^2} \frac{m\pi}{a} \right) A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

Modos TM

$$E_{zmn} = B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$E_{xmn} = \left(-j \frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2} \frac{m\pi}{a} \right) B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$E_{ymn} = \left(-j \frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2} \frac{n\pi}{b} \right) B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$H_{xmn} = \left(j \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k}{\gamma_{mn}^2} \frac{n\pi}{b} \right) B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$H_{ymn} = \left(-j \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k}{\gamma_{mn}^2} \frac{m\pi}{a} \right) B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{S_t} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{S_t} (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot d\vec{s} \right]$$

$$[Q]_{101} = \frac{\mu}{\mu_o \delta_p} \frac{\ln[ab(a^2 + b^2)]}{aL(a^2 + L^2) + 2b(a^3 + L^3)}$$

$$\delta_p = \left[\frac{2}{\omega\mu_o\sigma} \right]^{1/2}$$

4.- Radiación

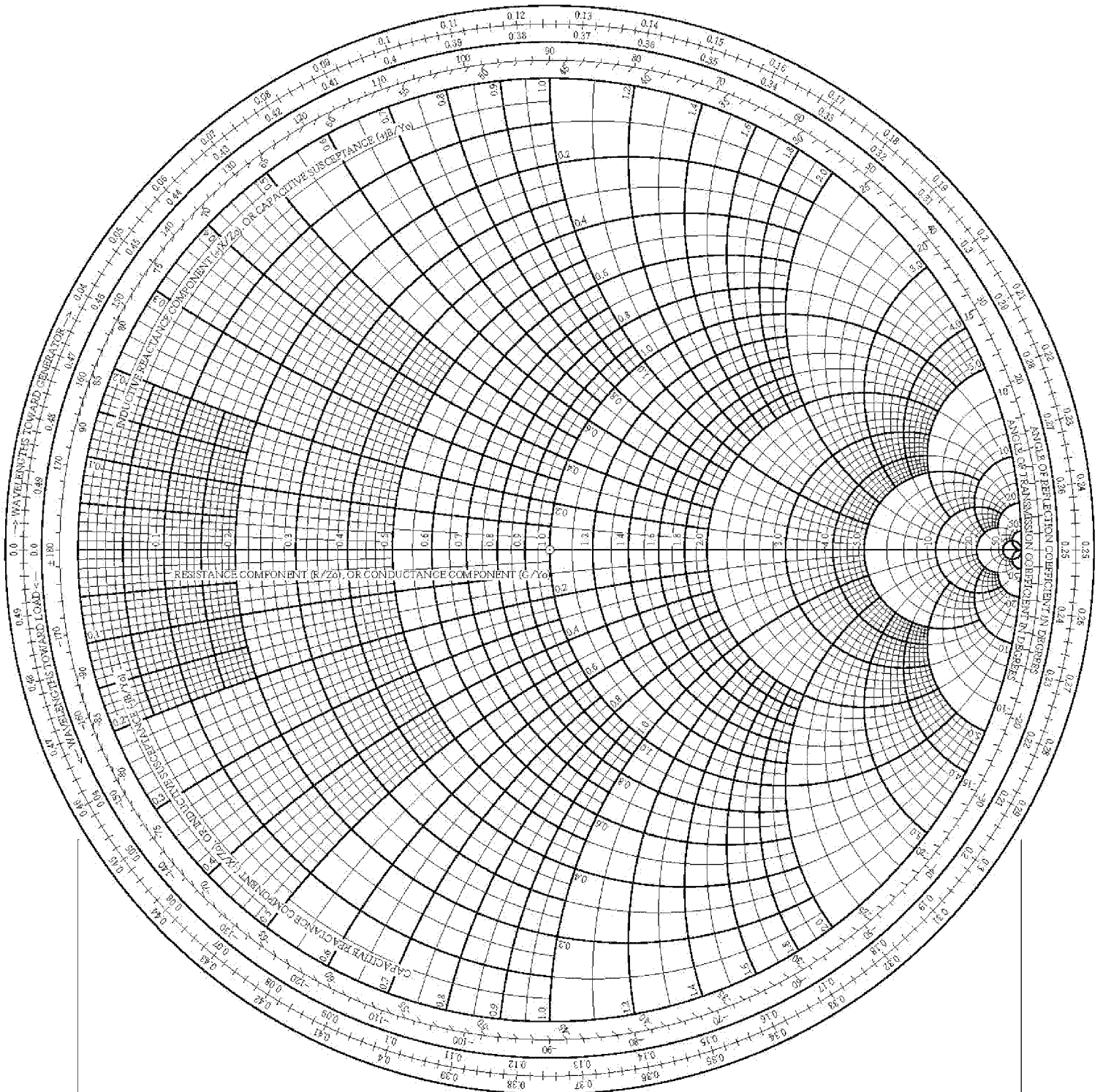
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{j\omega t} e^{-jkR}}{R} dV'$$

$$R \cong r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} + \frac{1}{2r} \left[r'^2 - \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \right)^2 + \dots \right]$$

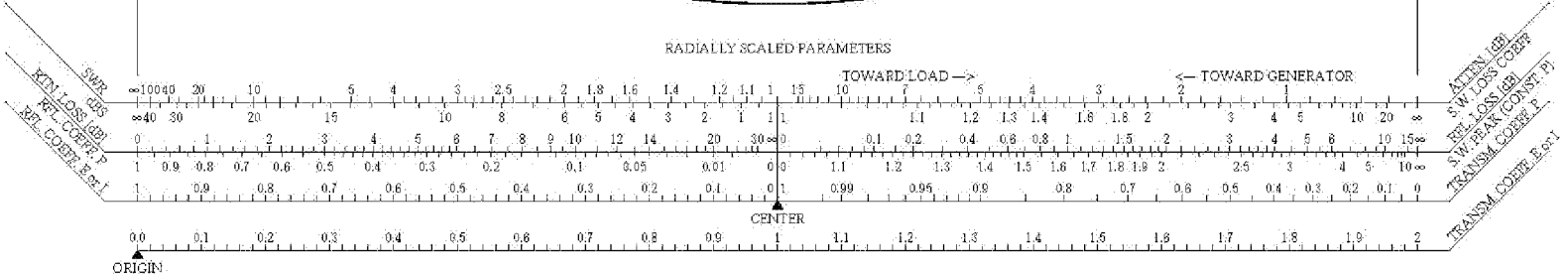
Para una antena lineal

$$\vec{A}(r) = \vec{u}_z \frac{\mu_o}{2\pi} I_m \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos(kh \cos \theta) - \cos kh}{k \sin^2 \theta} ; \quad \vec{E}(r) = \vec{u}_\theta j \frac{Z_o I_o}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{\cos(kh \cos \theta) - \cos kh}{\sin \theta} \right]$$

The Complete Smith Chart



RADIALLY SCALED PARAMETERS



ATTEN. (dB)
S.W. LOSS COEFF.
S.W. LOSS (CONST. P.)
TRANSM. COEFF. P.
TRANSM. COEFF. E. & P.