ELECTROMAGNETISMO Febrero 2016- 2^a Se mana

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas.

MATERIAL: Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas en un cuadernillo de examen como máximo. Procure ser claro y conciso.

1.- Discuta la consecuencia fundamental de la conservación del momento magnético de una partícula cargada en el seno de un campo magnético no homogéneo que varía lentamente.

2.- Describa las hipótesis que se aplican para poder llevar a cabo el desarrollo multipolar de la radiación electromagnética y analice cuánto de restrictivas son.

3.- ¿Qué conclusión o conclusiones se obtienen cuando se realiza el balance sobre la variación del impulso lineal de un sistema de partículas cargadas que se mueven arbitrariamente?

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1

Un conductor cilíndrico muy largo, de radio a, que no tiene carga neta, se coloca en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E_o \mathbf{u}_y$. el eje del cilindro es perpendicular a la dirección del campo. Encuentre el potencial en puntos exteriores al cilindro y halle la densidad de carga sobre la superficie cilíndrica.

PROBLEMA 2

Tenemos dos cargas de igual magnitud y distinto signo dispuestas frente a un plano conductor indefinido, conectado a tierra, como indica la figura 2. La distancia entre las cargas es *2d* y la distancia al plano es *d*. Determinar de forma aproximada el potencial en cualquier punto suficientemente alejado del origen ($r \gg l$), a la derecha del plano indefinido.

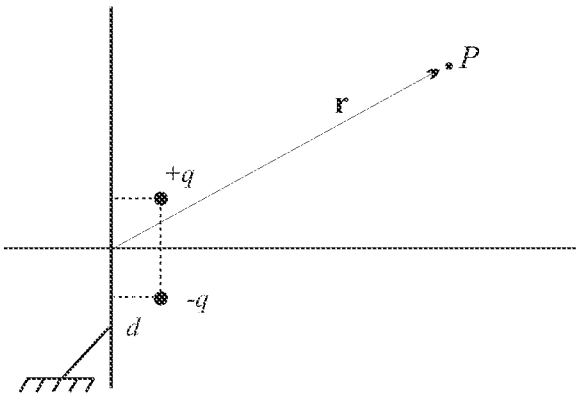

Figura 2

FORMULARIO

(1) Operaciones diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{\partial U}{\rho\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{\partial U}{r\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \; ; \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & rA_\theta & (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,A_z \end{vmatrix}$$

(2) Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A}$$

(3) Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(n\pi x/L\right) + b_n \,\mathrm{sen}\left(n\pi x/L\right)\right)$$

$$a_n = 1/L \int_{-L}^{L} F(x)\cos\left(n\pi x/L\right)dx$$

$$b_n = 1/L \int_{-L}^{L} F(x)\,\mathrm{sen}\left(n\pi x/L\right)dx$$

(4) Ecuación de Laplace en c. cartesianas

$$\triangle\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$k_x^2 > 0$ $\quad X = A_1 \exp(k_x x) + A_2 \exp(-k_x x) = A_3 \sinh(k_x x) + A_4 \cosh(k_x x)$

$k_x^2 < 0$ $\quad X = A_1 \exp(j\,|k_x|\,x) + A_2 \exp(-j\,|k_x|\,x) = A_3\,\mathrm{sen}(|k_x|\,x) + A_4 \cos(|k_x|\,x)$

$k_x^2 = 0$ $\quad X = A_1 x + A_2$

Soluciones análogas para Y, Z

(5) Ecuación de Laplace en c. cilíndricas

$$\triangle\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

(a) Simetría axial con invarianza longitudinal

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\phi = \left(C_1 r^n + C_2 r^{-n}\right)\left(A_1 \cos n\varphi + A_2 \operatorname{sen} n\varphi\right)$$

o bien , si $n = 0$

$$\phi = \left(k_1 \ln r + k_2\right)\left(A_1\varphi + B_2\right)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = \left(B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr)\right)\left(A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz\right)$$

ó

$$\phi = \left(C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)\right)\left(D_1 \cos kz + D_2 \operatorname{sen} kz\right)$$

(6) **Ecuación de Laplace en c. esféricas**

$$\triangle\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = \left(B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}\right)\left(A_1 \cos m\varphi + A_2 \operatorname{sen} m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta)$$

– –

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\frac{1}{m}\right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \qquad ; \qquad K_o(x) = N_o(jx)$$

Polinominos de Legendre

$$P_m(\cos\theta) = \frac{1}{2^m m!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^m \left(\cos^2\theta - 1\right)^m$$

$$\begin{aligned} P_o(\cos\theta) &= 1 \\ P_1(\cos\theta) &= \cos\theta \\ P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\ P_3(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \end{aligned}$$