5000017 ELECTROMAGNETISMO Examen del 3 de julio de 2013. Primera parte. Publicación de notas: 17 de julio de 2013.

Apellidos:____ **Nombre:**________________________ **Matrícula:**________________

Ajuste su respuesta al espacio disponible y escriba el resultado en el recuadro. Se considerarán correctas únicamente las respuestas en las que lo sean la solución y los cálculos indicados para su obtención a partir de los datos del enunciado.

1. Halle la capacidad de un condensador esférico de radios $R, 2R$ cuando entre sus placas se tiene un dieléctrico de permitividad ϵ.

   El campo eléctrico entre las armaduras, si Q es la carga de la interior, es:

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\boldsymbol{u}_r$$

   por lo tanto

$$V_i - V_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) \rightarrow C = 8\pi\epsilon R$$

2. Una esfera dieléctrica de radio R y susceptibilidad χ_e se sitúa entre dos planos paralelos infinitos π_1, π_2 separados una distancia d y cargados con distribuciones de carga superficial uniforme cuyas densidades son σ y $-\sigma$, respectivamente. Determine el módulo del desplazamiento eléctrico en la esfera (ayuda: una esfera dieléctrica sola en el espacio y con polarización uniforme $\boldsymbol{P}$ determinaría en su interior un desplazamiento eléctrico uniforme $\boldsymbol{D} = \frac{2}{3}\boldsymbol{P}$).

   El campo eléctrico es la suma del originado por las placas y el generado por la polarización

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}\boldsymbol{u}$$

   pero $\boldsymbol{P} = \epsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}$, de donde

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\sigma}{\epsilon_0(3+\chi_e)}\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{D} = \frac{3\sigma(1+\chi_e)}{(3+\chi_e)}\boldsymbol{u}$$

3. Determine la densidad volumínica de energía electrostática en un punto situado a una distancia r del centro de un conductor esférico de radio $R < r$ y con una carga total Q colocado en el vacío.

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0|\boldsymbol{E}|^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

4. La curva de imanación de un material magnético homogéneo e isótropo para el intervalo $|B| \leq B_0$ está dada por la expresión $H(B) = aB^3$. Determine la densidad de energía por unidad de volumen que hay que aportar para aumentar la inducción magnética desde $B = 0$ hasta $B = B_1$ $(0 \leq B_1 \leq B_0)$.

   Aplicamos la ecuación directamente

$$u = \int_0^{B_1} H\mathrm{d}B \Rightarrow u = \frac{a}{4}B_1^4$$

5. Un circuito magnético presenta un tramo de hierro de permeabilidad magnética μ_F, longitud ℓ_F y sección de área S_F y un entrehierro de espesor e, sección equivalente S_e y permeabilidad magnética μ_0. Determine el flujo magnético en el circuito si se devana un conductor, por el que circula una intensidad I, N vueltas en torno al núcleo del circuito magnético.

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{\ell_F}{\mu_F S_F} + \frac{e}{\mu_0 S_e}}$$

6. Determine la inducción magnética en un punto del eje de un solenoide cilíndrico infinito, de radio R, paso helicoidal $p \ll R$ recorrido por una intensidad I

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{p}\boldsymbol{u}_z$$

   donde z es el eje del solenoide.

7. Obtenga el coeficiente de autoinducción del bobinado de un toro de revolución de sección cuadrada de lado a, siendo el radio de revolución máximo $R + a$ y el mínimo R. El conductor se bobina N veces en torno al núcleo.

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho}\boldsymbol{u}_\varphi \Rightarrow B^2 = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{4\pi^2\rho^2} \Rightarrow L = \int_R^{R+a}\frac{\mu_0 N^2}{4\pi^2\rho^2}2\pi a\rho\mathrm{d}\rho$$

   con lo que

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\frac{R+a}{R}$$

8. Halle la componente según el eje x de la inducción magnética en una onda plana cuyo campo eléctrico es

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = E_0 \cos(\omega t + \frac{\omega}{\sqrt{3}c}[x+y+z])\,\frac{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

La onda se propaga según la dirección $\boldsymbol{u} = -\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$ de modo que

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{E} = -\frac{E_0}{c\sqrt{6}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\cos(\omega t + \frac{\omega}{\sqrt{3}c}(x+y+z))$$

de modo que

$$B_x = -\frac{E_0}{c\sqrt{6}}\cos(\omega t + \frac{\omega}{\sqrt{3}c}(x+y+z))$$

9. Una onda plana se propaga en un medio de índice de refracción n_1 incidiendo sobre otro medio de índice $n_2 = \frac{n_1}{2}$. La superficie de separación entre ambos medios es plana. Obtenga el ángulo que ha de formar la dirección de propagación de la onda incidente con la normal a la superficie de separación para que la onda no se propague en el segundo medio.

$$n_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = n_2 \operatorname{sen}\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \geq \frac{\pi}{6}\ \text{rad.}$$

10. Una onda plana incide normalmente desde el aire sobre un metal, siendo δ la profundidad pelicular. Si el módulo máximo del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ justo al entrar en el metal es E_0, determine su valor en el metal a una distancia de la superficie de separación igual a 2δ.

$$E_{2\delta} = E_0 e^{-2}$$