AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen final: 5 de Febrero de 2014

1.- Calcula la serie de Fourier de la función

$$f(x) = 1 + \cos(x) + x \quad x \in [-\pi, \pi].$$

2.- a) Halla la solución general de la E.D.O.

$$y'x^2sen(y) = 1$$

b) Calcula la única solución del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'x^2sen(y) = 1 \\ \lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

3.- Resuelve el problema de valor inicial:

$$\left. \begin{array}{r} y'' - 6y' + 9y = 27t^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{array} \right\}$$

4.- Resuelve el sistema de congruencias:

$$\left. \begin{array}{rcrlr} 2x & \equiv & 7 & \text{mod} & 9 \\ x & \equiv & 0 & \text{mod} & 5 \\ x & \equiv & 3 & \text{mod} & 16 \end{array} \right\}$$

5.- Se considera el grupo aditivo $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{35} \times \mathbb{Z}_{121}$. Encuentra un elemento de G de orden máximo. Otro de orden 60 ¿Puedes encontrar otro de orden 37?

6.- Considera el polinomio $p = x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

a) Determina si p es irreducible. ¿Es $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5[x]/\langle p \rangle$ un cuerpo?

b) Determina si existe $[x + x^2]^{-1} \in \mathbb{K}$ y halla su valor.

Observaciones:

.- En el examen sólo se puede utilizar papel y bolígrafo.

.- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.

.- Cada pregunta se puntua con un máximo de 1,5 puntos.

.- La **revisión del examen** será el próximo jueves 13 de Febrero a las 12h en el aula 11.

PROBLEMA: Sea $f(x) = 1 + \cos x + x \quad x \in [-\pi, \pi]$

LA FUNCIÓN $h(x) = 1 + \cos x$ ES IGUAL A SU SERIE DE FOURIER OBVIAMENTE

CALCULEMOS LA SERIE DE FOURIER DE LA FUNCIÓN

$$g(x) = x \quad \text{con } x \in [-\pi, \pi]$$

g ES IMPAR ($g(-x) = -g(x)$) LUEGO LOS COEFICIENTES

$a_n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2 \ldots$

POR OTRO LADO $\quad b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \underset{\text{por partes}}{=}$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \right] \underset{\text{LA INTEGRAL ES NULA}}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left(-2\pi \cos n\pi \right) = \frac{2}{n} (-1)(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1} 2}{n}.$$

COMO g ES CONTINUA Y DERIVABLE EN $(-\pi, \pi)$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$$

Y POR TANTO:

$$f(x) = \underbrace{1 + \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx}_{\text{SERIE DE FOURIER QUE BUSCAMOS.}} \qquad \forall x \in (-\pi, \pi)$$

PROBLEMA La E.D.O de 1: orden

$$y' x^2 \operatorname{sen} y = 1$$ es una ecuación

de variables separadas, así

$$y' \operatorname{sen} y = \frac{1}{x^2}$$

Integrando respecto de x

$$\int y' \operatorname{sen} y \, dx = -\cos y(x)$$

$$\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + k$$

Observemos que para $x = 0$ la ecuación no está definida

$$y \quad \cos y(x) = \frac{1}{x} - k = \frac{1}{x} + k'$$

Por tanto se tiene que verificar que

$$\frac{1}{x} + k' \in [-1, 1],$$ para que la

igualdad tenga sentido así

$$\frac{1}{x} \in [-1 - k', 1 - k']$$

Luego $y(x) = \text{Arc.}\left(\frac{1}{x} + k'\right)$ $\forall x$ tal que $\frac{1}{x} \in [-1-k', 1-k']$

solución general.

Ahora si $y(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \pi/2$

$$\lim_{x \to \infty} \cos y(x) = 0 \quad y \text{ así } \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} + k' = k'$$

se tiene que $k' = 0$

Luego la única solución que verifica $y(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \pi/2$

es $\text{Arc cos} \frac{1}{x}$ con $|x| > 1$

PROBLEMA:
$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 27t^2 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

ESTE PROBLEMA SE PUEDE RESOLVER DE VARIAS MANERAS. VEAMOS UNA DE ELLAS.

LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA ES
$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \iff (\lambda - 3)^2 = 0$$
LUEGO $\lambda = 3$ ES RAÍZ DOBLE DE LA ECUACIÓN Y POR TANTO $x(t) = Ae^{3t} + Bte^{3t}$ ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA.

COMO $h(t) = 27t^2$ ES UN POLINOMIO DE GRADO 2 Y $\lambda = 0$ NO ES RAÍZ DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA PROBAREMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL TIPO
$$y_0(t) = a + bt + ct^2$$
ASÍ $y_0'(t) = b + 2ct$

Y $y_0''(t) = 2c$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN CON y_0
$$2c - 6(b + 2ct) + 9(a + bt + ct^2) = 27t^2$$
LUEGO
$$\begin{cases} 2c - 6b + 9a = 0 \\ -12c + 9b = 0 \\ 9c = 27 \end{cases}$$
ASÍ $c = 3$, $b = 4$ Y $a = 2$

LUEGO $y(t) = (2 + 4t + 3t^2) + Ae^{3t} + Bte^{3t}$ ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA.

COMO $y(0) = 2 + A = 1 \Rightarrow A = -1$

Y $y'(t) = (4 + 6t) + 3Ae^{3t} + Be^{3t} + 3Bte^{3t}$.

Y COMO $y'(0) = 4 - 3 + B = 2 \Rightarrow B = 1$

SE TIENE QUE
$$\boxed{y(t) = (2 + 4t + 3t^2) - e^{3t} + te^{3t}}$$
ES LA SOLUCIÓN BUSCADA

PROBLEMA

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 7 \mod 9 \\ x &\equiv 0 \mod 5 \\ x &\equiv 3 \mod 16 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

$9 = 3 \times 3 \qquad 5 \qquad 16 = 4 \times 4$ LUEGO $9, 5$ y 16 SON PRIMOS ENTRE SI. COMO $m.c.d\,(2, 9) = 1$

EXISTE $2^{-1} \in \mathbb{Z}_9$ y $2^{-1} = 5$

ASI $(*) \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} x &= 5 \times 7 = 35 = 8 \mod 9 \\ x &= 0 \mod 5 \\ x &\equiv 3 \mod 16 \end{aligned}$$

APLICANDO EL TEOREMA CHINO DEL RESTO

$$x = 8 \times a \times 5 \times 16 + 3 \times b \times 9 \times 5$$

DONDE $a \equiv (80)^{-1} = 8^{-1} \mod 9$ ASI $a = 8$

y $b = (45)^{-1} = (13)^{-1} \mod 16$ ASI $b = 5$

USANDO EL ALGORITMO DE EUCLIDES

16		1	0
13		0	1
3	1	1	-1
1	4	-4	5

LUEGO $x = 8 \times 8 \times 80 + 3 \times 5 \times 45 =$

$= 5120 + 675 = 5795 \mod 9 \times 5 \times 16 = 720$

LUEGO $\boxed{x \equiv 35 \mod 720}$

PROBLEMA Sea $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{35} \times \mathbb{Z}_{121}, +) = G$

Como $12 = 2^2 \times 3$
$35 = 7 \times 5$
$121 = 11 \times 11$

12, 35 y 121 son primos entre sí, por tanto G es un grupo cíclico de orden $12 \times 35 \times 121$

Así $(1, 1, 1) \in G$ es un elemento de orden máximo ya que $m.c.m[12, 35, 121] = 12 \times 35 \times 121$ es decir $(1, 1, 1)$ tiene orden $12 \times 35 \times 121$, luego es un elemento de orden máximo.

37 es primo y 37 no divide a $12 \times 35 \times 121$, luego no existe un elemento en G de orden 37 (según el teorema de Lagrange).

Por otro lado $60 = 12 \times 5 \mid 12 \times 35 \times 121$ luego se puede encontrar un elemento de este orden en G. Sea $x = (1, 7, 0)$.

$1 \in \mathbb{Z}_{12}$ tiene orden 12 en $(\mathbb{Z}_{12}, +)$
$7 \in \mathbb{Z}_{35}$ " " 5 en $(\mathbb{Z}_{35}, +)$
$0 \in \mathbb{Z}_{121}$ " " 1 en $(\mathbb{Z}_{121}, +)$

Luego como $mcm(12, 5) = 60$
$(1, 7, 0)$ tiene orden 60 en $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{35} \times \mathbb{Z}_{121}$.

PROBLEMA SEA $f(x) = x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

f ES IRREDUCIBLE SOBRE $\mathbb{Z}_5$ SI NO TIENE RAICES EN $\mathbb{Z}_5$ (YA QUE ES UN POLINOMIO DE GRADO 2)

ASI
$$f(0) = 4$$
$$f(1) = 1 + 3 + 4 \equiv 3 \mod 5$$
$$f(2) = 4 + 6 + 4 \equiv 4 \mod 5$$
$$f(3) = 9 + 9 + 4 = 2 \mod 5$$
$$f(4) = 16 + 12 + 4 = 2 \mod 5$$

LUEGO COMO f NO TIENE RAICES EN $\mathbb{Z}_5$ ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Z}_5[x]$. POR TANTO $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5[x]/f$ ES UN CUERPO DE $5^2 = 25$ ELEMENTOS.

EL ELEMENTO $x + x^2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ ES EL ELEMENTO $2x+1+x = 3x+1 \in \mathbb{Z}_5[x]/f$

(COMO $x^2 = -3x - 4 = 2x + 1$)

COMO $3x+1 \neq 0$ Y $\mathbb{K}$ ES UN CUERPO, EXISTE EL INVERSO. PARA HALLAR $[x+x^2]^{-1} = [3x+1]^{-1}$ SE PUEDE USAR EL LEMA DE BEZOUT.

x^2+3x+4		1	0
$3x+1$		0	1
2	$2x+2$	1	$3x+3$

LUEGO $2^{-1}(3x+3) = 4x+4$ ES EL INVERSO DE x^2+x

COMPROBACIÓN:

$$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \times \quad 3x + 3 \\ \hline 3x^2 + 3x \\ 3x^3 + 3x^2 \quad \\ \hline 3x^3 + x^2 + 3x \end{array} = x[3x^2 + x + 3] =$$

$$= x[2x+1] = 2x^2 + x = 2[2x+1] + x =$$

$$= 4x + x + 2 = 2$$