ELEMENTOS DE TOPOLOGÍA

(grupo D) Junio 2007

I) 1) Enunciar y demostrar el Lema del número ρ de Lebesgue.

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X$, $b \in Y$. Entonces $\Pi_1(X \times Y, (a,b))$ es isomorfo a $\Pi_1(X, a) \times \Pi_1(Y, b)$.

II) 1) Sea (X, T) espacio topológico, $A, B \subset X$. Probar:

$$A \cup B = X \Rightarrow \bar{A} \cup \mathring{B} = X$$ y

$$A \cap B = \phi \Rightarrow \bar{A} \cap \mathring{B} = \phi$$ ¿Se verifican las recíprocas?

2) Sean (X, T), (Y, S) espacios topológicos conexos, $A \subsetneq X$, $B \subsetneq Y$. Probar que $X \times Y \setminus (A \times B)$ es conexo

III) Sean C_1 y C_2 dos circunferencias concéntricas de $\mathbb{R}^2$. Sea $X = C_1 \cup C_2$ y T la topología en X que tiene como subbase los conjuntos unitarios de C_2 y los arcos abiertos de C_1 junto con su proyección desde el centro común sobre C_2, excluido el punto medio.

Probar que (X, T) es compacto y T_2, la inclusión de $\mathbb{R}$ con la topología discreta en (X, T) es un homeomorfismo sobre su imagen y C_2 es denso en (X, T).

Estudiar los axiomas de numerabilidad de (X, T).

Scanned by CamScanner

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

(grupo C) Junio 2000 Lupiáñez

I) 1) Sean (X,T), (Y,S) espacios topológicos, A compacto, $A\subset X$, B compacto, $B\subset Y$ „ $A\times B\subset W$ abierto de $X\times Y$. Entonces existen abiertos U, V de (X,T) e (Y,S) respectivamente „ $A\times B\subset U\times V\subset W$.

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a\in X$, $b\in Y$. Entonces $\Pi_1(X\times Y,(a,b))$ es isomorfo a $\Pi_1(X,a)\times\Pi_1(Y,b)$.

II) 1) Sea (X,T) un espacio topológico, $p\in X$. Probar que son equivalentes

(a) $\{p\}\in T$

(b) Para todo espacio (Y,S), toda aplicación $f: X\to Y$ es continua en p.

(c) Toda aplicación $f:(X,T)\to(X,T_D)$ es continua en p (T_D es la top. discreta)

2) Probar que un espacio en el que todo abierto no vacío es denso, no es T_2. Dar un ejemplo de un espacio T_1 con esta propiedad

3) Sea $\{(X_j,T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq\phi$ de espacios topológicos y $a=(a_j)_{j\in J}\in\prod_{j\in J}X_j$. Si C_a es la componente de a en $\prod_{j\in J}X_j$ y C_{a_j} la componente de a_j en X_j ($\forall j\in J$), probar que $C_a=\prod_{j\in J}C_{a_j}$.

III) 1) Sobre $\mathbb{R}$ consideramos $\forall x\in\mathbb{R}$ la familia $\mathcal{N}_x=\{N\subset\mathbb{R}\mid \exists\varepsilon>0$ „ $(x-1-\varepsilon, x+1+\varepsilon)\subset N\}$ ¿Es $\mathcal{N}_x$ sistema de entornos de x en algún espacio topológico?

2) En $\mathbb{R}^2$, sean $\mathcal{S}_1=\{r_x\mid x\in\mathbb{R}\}$ donde $r_x=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\mid t\in\mathbb{R}\}$ $\mathcal{S}_2=\mathcal{S}_1\cup\{S\}$ „ $S=\{(t,1)\in\mathbb{R}^2\mid t\in\mathbb{R}\}$. Denotamos $T(\mathcal{S}_1)$ y $T(\mathcal{S}_2)$ las topologías engendradas por $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ respectivamente. Dado $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$, hallar el interior y la adherencia de A en $(\mathbb{R}^2,T(\mathcal{S}_1))$ y $(\mathbb{R}^2,T(\mathcal{S}_2))$.

3) Sea $A=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ y $p: I\to I/A$ la proyección canónica. Probar que $U=[0,\frac{1}{2}]\cup\{1\}$ es un entorno saturado de 0, pero que $p(U)$ no es entorno de $p(0)$.

$i \to [i]$

ELEMENTOS GEOM. DIF. Y TOPOLOGIA

(grupo B) Septiembre 1999 LUPIAÑEZ

I) 1) Sean (X,T), (Y,S) espacios topológicos, $A\times B$ compacto de $X\times Y$ tal que $A\times B\subset W$ abierto de $X\times Y$, entonces existen abiertos U, V de (X,T) e (Y,S) respectivamente tales que $A\times B\subset U\times V\subset W$.

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a\in X$, $b\in Y$. Entonces $\Pi_1(X\times Y,(a,b))$ es isomorfo a $\Pi_1(X,a)\times\Pi_1(Y,b)$.

II) 1) Sea U abierto en (X,T). Probar que $U\cap\overline{A}\subset\overline{U\cap A}$ para todo subconjunto $A\subset X$. Dar un ejemplo en el que no se verifique la igualdad. Probar que si D es denso en (X,T), $U\subset\overline{U\cap D}$ y $\overline{U}=\overline{U\cap D}$.

2) Sobre el intervalo $[0,1)$ consideramos la relación de orden natural y $j:[0,1)\hookrightarrow\mathbb{R}$ inclusión. Estudiar la convergencia de la red j en $(\mathbb{R},T_u)$. Análogo problema si el intervalo es el $[0,1]$.

3) Sea (X,T) espacio topológico. $\forall A\subset X$ la función característica de A es $\chi_A: X\to\mathbb{R}$, $\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x\in A\\ 0, & \text{si } x\notin A\end{cases}$ Probar que χ_A es continua si y sólo si A es abierto y cerrado.

4) Probar que $\Delta=\{(x,x)\in X\times X\}$ es abierto en $X\times X$ con la topología producto si y sólo si X es un espacio discreto.

5) Sea $X=[0,2]$ con la topología usual relativa y $A=(1,2]$. Estudiar si X/A es T_2.

III) Determinar si son homeomorfos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$:

a) $A=([0,\to)\times\{1\})\cup(\mathbb{N}\times I)$

b) $B=(I\times\{1\})\cup(\{1/n \mid n\in\mathbb{N}\}\times I)\cup(\{0\}\times I)$

c) $C=(I\times\{1\})\cup(\{1/n \mid n\in\mathbb{N}\}\times I)$

d) $D=(I\times\{1\})\cup(\{1/n \mid n\in\mathbb{N}\}\times I)\cup(\{0\}\times\{1/n \mid n\in\mathbb{N}\})$.

(Not. $I\equiv[0,1]$)

ELEMENTOS DE GEOM. DIF. Y TOPOLOGIA

(grupo B) Febrero 1999 Lupiañez

I) 1) Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \phi$ de espacios topológicos $\neq \phi$. Entonces $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} T_j)$ es localmente compacto si y sólo si (X_j, T_j) es compacto $\forall j \in J - F$ con F finito y (X_j, T_j) localmente compacto $\forall j \in J$.

2) Si f es un camino en S^1 con origen 1, existe un único camino $\tilde{f}$ en $\mathbb{R}$ con origen 0 tal que $\varphi \circ \tilde{f} = f$ ($\varphi : \mathbb{R} \to S^1$, $\varphi(x) = \cos 2\pi x + i \operatorname{sen} 2\pi x$

II) 1) En cada una de las nociones o propiedades que se indican a continuación, indicar razonadamente las que se conservan por aplicaciones continuas: punto adherente, entorno, abierto, T_2.

2) Sea $\mathbb{Q}$ con el orden natural. Encontrar los puntos límite y los puntos de aglomeración de la red $s : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ (aplicación inclusión)

3) Sea s red, $\mathcal{F}_s$ filtro engendrado por s y $s_{\mathcal{F}_s}$ red engendrada por él ¿se verifica que $s = s_{\mathcal{F}_s}$? Razonar la respuesta.

4) ¿Puede existir alguna aplicación continua e inyectiva de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$?

ELEMENTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL Y TOPOLOGIA

(grupos E y F) Septiembre 1998 LUPIAÑEZ

I) 1) Sea (X, T) espacio topológico, $x \in X$ y S red en X. Entonces x es de aglomeración de S si, y sólo si, existe una subred de S que converge a x.

2) Enunciar y demostrar el Lema del número ρ de Lebesgue.

II) 1) Sea (X, T) espacio topológico, $A \subset X$. Estudiar si $Fr.A$, $Fr.\bar{A}$ y $Fr.\mathring{A}$ coinciden. En caso negativo, mostrarlo con contraejemplos, y estudiar los contenidos.

2) Sean (X, T), (X', T') espacios topológicos y $f: X \to X'$ aplicación. Probar que: f es continua y cerrada si, y sólo si, $\forall M \subset X$ $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$

Scanned by CamScanner

TOPOLOGIA I (Secc. Astronomía, Geodesia y Mecánica)

CONVOCATORIA DE JUNIO 1997

[1er parcial]

I) Sea X conjunto, $\mathcal{F}$ filtro en X. Entonces $\mathcal{F}$ es ultrafiltro si y solo si $\forall E \subset X$ o bien $E \in \mathcal{F}$ o bien $X \setminus E \in \mathcal{F}$

II) Probar que el conjunto derivado de la unión de dos conjuntos A y B ~~es la unión de los conjuntos~~ derivados de A y B.

III) Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se considera la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}((x,y)) = \{ B_r((x,0)) \cup \{(x,y)\} \mid r > 0 \}$ donde $B_r((x,0))$ es la bola euclídea de centro $(x,0)$ y radio r. Probar que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}((x,y))$ es base de entornos de (x,y) para alguna topología T sobre $\mathbb{R}^2$. Estudiar los axiomas de numerabilidad y de separación de $(\mathbb{R}^2, T)$.

TOPOLOGIA I (Secc. Astronomía, Geodesia y Mecánica)

CONVOCATORIA DE JUNIO 1997

[2º parcial]

I) Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f_1, g_1 : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas y homótopas, $f_2, g_2 : Y \longrightarrow Z$ aplicaciones continuas y homótopas. Entonces $f_2 \circ f_1$ y $g_2 \circ g_1$ son homótopas

II) Sea X un espacio conexo tal que cada punto suyo tiene algún entorno conexo por caminos. Probar que entonces X es conexo por caminos.

III) Sean C_1, C_2 dos circunferencias concéntricas de $\mathbb{R}^2$. Sea

TOPOLOGIA I, Secc. Astronomía, Geodesia y Mecánica

1er parcial (3-II-1997)

I) 1) Un espacio topológico es T_{3a} si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de algún cubo ($\equiv$ producto de copias del intervalo unidad).

2) Todo espacio topológico metrizable es T_4.

II) 1) ¿Es toda aplicación biyectiva continua un homeomorfismo? Justificar la respuesta.

2) Sean X, Y espacios topológicos $f: X \to Y$ aplicación, $x_0 \in X$. Si para todo filtro $\mathcal{F}$ de X tal que $\mathcal{F} \to x_0$ se tiene que $f(\mathcal{F}) \to f(x_0)$, probar que f es continua en x_0.

3) Sean X, Y espacios topológicos $f: X \to Y$ aplicación. Probar que f es continua si, y sólo si, la aplicación $g: X \to G_f$, $x \longmapsto (x, f(x))$ es un homeomorfismo.

4) Sea X conjunto, T, T' topologías en X, si $(X, T \cap T')$ es espacio T_2 probar que la diagonal Δ es un cerrado en $(X, T) \times (X, T')$.

III) 1) Sean X, Y espacios topológicos, M cerrado en X, $f: M \to Y$ aplicación continua. En $X + Y$ se considera la relación de equivalencia R que consiste en identificar cada punto $y \in f(M)$ con todos los puntos $x \in f^{-1}(y)$, las clases definidas por $x \in X - M$, $y \in Y - f(M)$ consisten sólo en un punto. Se denota $X \cup_f Y \equiv X+Y/R$, $q: X+Y \longrightarrow X \cup_f Y$ es la proyección canónica. Probar que q es cerrada si, y sólo si, f es cerrada.

2) Sobre el segmento $[-1, 1]$ se considera la topología engendrada por los conjuntos de la forma $[-1, b)$ para $b > 0$ y $(a, 1]$ para $a < 0$. Estudiar los axiomas de separación y de numerabilidad en este espacio topológico.

TOPOLOGIA I (Secc. Astronomía, Geodesia y Mecánica)

2º parcial (curso 1996-97)

I) 1) Enunciar y demostrar el Teorema de Baire para un espacio localmente compacto

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X$, $b \in Y$. Entonces $\Pi_1(X \times Y, (a,b))$ es isomorfo a $\Pi_1(X,a) \times \Pi_1(Y,b)$.

II) 1) Sea X un espacio compacto T_2 con un único punto no aislado x_0. Probar que entonces si un conjunto U cumple $U \ni x_0$, se tiene que U es abierto si y solo si $X \setminus U$ finito

2) ¿Es posible que exista alguna aplicación continua e inyectiva de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$?

3) Sea $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ recubrimiento localmente finito de un espacio X y A un subconjunto compacto de X. Probar que existe un abierto G que contiene a A y sólo corta a un número finito de conjuntos de $\mathcal{U}$.

4) Sean las propiedades "conexo por caminos" y "contráctil". Mostrar que sólo se verifica que una de las propiedades implica la otra y dar un contraejemplo de que la otra implicación es falsa

III) Determinar si son homeomorfos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$.

a) $A = ([0, +\infty) \times \{1\}) \cup (\mathbb{N} \times I)$

b) $B = (I \times \{1\}) \cup (\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \times I) \cup (\{0\} \times I)$

c) $C = (I \times \{1\}) \cup (\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \times I)$

d) $D = (I \times \{1\}) \cup (\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \times I) \cup (\{0\} \times \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\})$.

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

(grupo A) Lapiñera

Febrero 2005

I) 1) Sea X conjunto no vacío. Si $\forall x \in X$ $\exists \mathcal{V}(x)$ familia de conjuntos cumpliendo

a) $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$

b) $U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$

c) $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x)$ " $\forall y \in V$ $U \in \mathcal{V}(y)$

d) $U \in \mathcal{V}(x)$, $V \supset U \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$

entonces existe una topología T para X tal que el sistema de entornos de cada punto de (X, T) es $\mathcal{V}(x)$

2) Sean X, Y espacios topologicos, $a \in X$, $b \in Y$. Entonces los grupos: $\Pi_1(X \times Y, (a, b))$ y $\Pi_1(X, a) \times \Pi_1(Y, b)$ son isomorfos.

II) 1) Sea (X, T) espacio Topológico, $A, B \subset X$. Probar: $A \cup B = X \Rightarrow \bar{A} \cup \mathring{B} = X$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$; Se verifican las implicaciones [illegible] ?

2) Sea X un espacio topológico. Probar que X es convexo si y sólo si $\forall x, y \in X$, $\exists M \subset X$ .. M convexo . $x, y \in M$.

III). Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $B_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$

a) Probar que $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ es base de alguna topología T sobre $\mathbb{R}^2$

b) Estudiar los axiomas de numerabilidad de $(\mathbb{R}^2, T)$, las propiedades T_i, regular y normal.

c) Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$. Determinar su adherencia e interior en $(\mathbb{R}^2, T)$

TOPOLOGÍA ELEMENTAL

(grupo B) Febrero 2013

I)

1) Enunciar y demostrar el Teorema de Baire para espacios localmente compactos

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X$, $b \in Y$. Entonces $\Pi_1(X \times Y, (a,b))$ es isomorfo a $\Pi_1(X, a) \times \Pi_1(Y, b)$

II) 1) Sean X, Y espacio topológicos, $f: X \to Y$ aplicación. Demostrar que son equivalentes:

a) $f: X \to Y$ es aplicación cerrada

b) si U es abierto de X, entonces $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset U\}$ es abierto de Y.

c) si C es cerrado de X, entonces $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \cap C \neq \phi\}$ es cerrado de Y

2) Sea X un espacio topológico. Probar que X es conexo si y sólo si $\forall x, y \in X$, $\exists M \subset X$ .. M conexo, $x, y \in M$.

III). Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $B_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$

a) Probar que $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ es base de alguna topología T sobre $\mathbb{R}^2$

b) Estudiar los axiomas de numerabilidad de $(\mathbb{R}^2, T)$, las propiedades T_i, regular y normal.

c) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$. Determinar su adherencia e interior en $(\mathbb{R}^2, T)$

TOPOLOGÍA ELEMENTAL

(grupo B) Febrero 2013

I) 1) Enunciar y demostrar el Teorema de Baire para espacios localmente compactos

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X$, $b \in Y$. Entonces $\pi_1(X \times Y, (a, b))$ es isomorfo a $\pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$

II) 1) Sean X, Y espacios topológicos, $f: X \to Y$ aplicación. Demostrar que son equivalentes:

a) $f: X \to Y$ es aplicación cerrada

b) si U es abierto de X, entonces $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset U\}$ es abierto de Y.

c) si C es cerrado de X, entonces $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \cap C \neq \phi\}$ ... de Y