Nombre: **Número de matrícula:**

- **sólo una respuesta es correcta**
- **las respuestas incorrectas no restan puntos**
- **usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos**
- **60 min, 0.5 puntos cada problema**

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.

1. La temperatura de transición vítrea Tg de un homopolímero de poliestireno (1) es $Tg_1 = 128$ ºC y la de un homopolímero de polibutadieno (2) $Tg_2 = 20$ ºC. Aplicando la ecuación de Fox que se indica más abajo, calcula la Tg,c de un copolímero al azar de estireno y butadieno cuya fracción molar de estireno es del $x_{molar} = 0.802$.

Ecuación de Fox:

$$\frac{1}{T_{g,c}} = \frac{X_1}{T_{g,1}} + \frac{X_2}{T_{g,2}}$$

donde X_1 y X_2 son las fracciones en peso de estireno y butadieno en el copolímero y T la temperatura absoluta.

Sol.:

$Mw_1 = 8 \cdot 12 + 8 \cdot 1$ $\quad Mw_1 = 104$ kg/kmol de 1

$Mw_2 = 4 \cdot 12 + 6 \cdot 1$ $\quad Mw_2 = 54$ kg/kmol de 2

La composición del copolímero en fracciones molares corresponde a la siguiente composición en fracciones másicas:

$$X_1 = \frac{x_{molar} \cdot Mw_1}{x_{molar} \cdot Mw_1 + (1 - x_{molar}) \cdot Mw_2} \qquad X_2 = 1 - X_1$$

$$X_1 = 0.886 \qquad X_2 = 0.114$$

La temperatura de transición vítrea del copolímero es:

$$T_{gc} = \left(\frac{X_1}{Tg_1 + 273} + \frac{X_2}{Tg_2 + 273} \right)^{-1} \qquad T_{gc} = 385 \text{ K}$$

1

- 456 K
- 317 K
- 374 K
- 327 K
- 385 K
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

2. Se desea construir un cilindro de $L = 0.675$ m de longitud y diámetro $D = 0.074$ m de un material compuesto formado por una matriz (M) de resina epoxi reforzada con fibra de carbono (F). Se dispone de una única fibra que se corta en segmentos iguales para su utilización. Esta fibra de refuerzo posee un módulo de Young de $E_f = 527$ GPa, un diámetro de $D_f = 4.05\times 10^{-3}$ m y una longitud $L_f = 4.05$ m. Suponiendo una adhesión perfecta entre la matriz y las fibras y despreciando la contribución de la matriz, calcula el valor máximo del módulo de Young, a tracción en la dirección del eje del cilindro, del material compuesto que se puede fabricar a partir de M y F.

Sol.: la fibra se corta en 6 segmentos iguales, de longitud igual a la del cilindro. La fracción volumétrica de fibra está dada por la relación entre el área transversal de las seis fibras y el área transversal del cilindro. El módulo pedido corresponde a isodeformación, por tanto, el módulo del compuesto es:

$$\frac{6\,\pi\cdot\frac{D_f^{2}}{4}}{\pi\cdot\frac{D^{2}}{4}}\cdot E_f = 9.5 \text{ GPa}$$

- 1.88 GPa
- 182 GPa
- 9.5 GPa
- 53.9 GPa
- 134.3 GPa
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

---

3. La resistividad eléctrica de un semiconductor intrínseco a temperatura ambiente ($T = 298$ K) es $\rho = 2.250\times 10^{3}$ Ω.m y su ancho de banda prohibida ("gap") es $E_g = 0.67$ eV. Determinar a qué temperatura la conductividad eléctrica de este semiconductor será $n = 1000$ veces mayor que a temperatura ambiente.

Sol.: la dependencia de la conductividad de un semiconductor intrínseco con la temperatura está dada por

$$\sigma_T = \sigma_0 \exp(-E_g / 2kT)$$

Escribiendo esta relación para $T = 298$ **K y para una *T* genérica y dividiendo las dos expresiones, se obtiene (incluyendo el factor de conversión de unidades de E_g):**

$$T = \left(\frac{1}{298} - \frac{2k\cdot ln(n)}{E_g\cdot 1.602\cdot 10^{-19}}\right)^{-1} \qquad T = 633 \quad \text{K}$$

- 928 K
- 714 K
- 1014 K
- 633 K
- 772 K
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

---

4. Calcula la densidad (kg/m^3) de un material cerámico BAO_3 (estructura de la perovskita, B es un metal divalente y A es un metal tetravalente de transición), sabiendo que el metal de transición está en contacto con los aniones con los que está coordinado, que los radios iónicos son $r_B = 1.44\times 10^{-10}$ m, $r_A = 6.4\times 10^{-11}$ m y $r_O = 0.132\cdot 10^{-9}$m, y que las masas atómicas son $Mw_A = 178.49$ y $Mw_B = 87.62$:

- 5647 kg/m^3
- 6469 kg/m^3
- 6122 kg/m^3
- 8658 kg/m^3
- 5958 kg/m^3
- ninguna de los anteriores, la respuesta correcta es:

Sol: el A^{+4} está en coordinación octaédrica con el O^{-2}, luego la arista de la celda cúbica se calcula como :

$$a = 2(r_A + r_O)$$

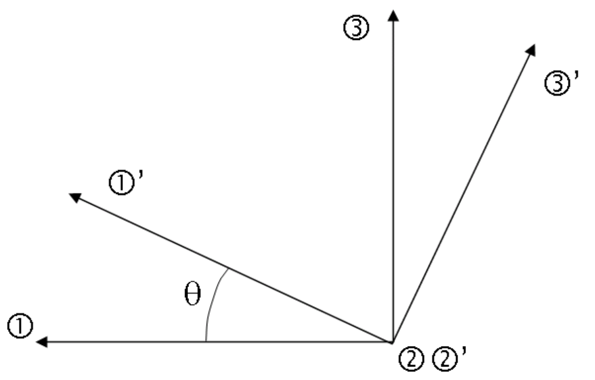
$$a = 3.92 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$V_{celda} = a^3$$

En la celda cúbica de lado ***a*** hay 8/8=1 ión B, 1 ión A y 6/2=3 iones O, de acuerdo con la fórmula estequiométrica, luego la densidad es:

$$\rho = \frac{(1\cdot Mw_A + 3\cdot 16 + 1\cdot Mw_B)\cdot 1.6603\cdot 10^{-27}}{V_{celda}} \qquad \rho = 8658 \text{ kg/m}^3$$

5. Para un determinado material compuesto se miden los coeficientes de dilatación térmica, referidos a un sistema de coordenadas que está rotado con respecto a los ejes cartesianos convencionales un ángulo $\theta = 69$ grados alrededor del eje 2, tal y como se muestra en el esquema.



El tensor de coeficientes de dilatación o expansión térmica medido en los ejes 1', 2', 3' es :

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 0.34 & 0 & -0.157 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ -0.157 & 0 & 0.69 \end{pmatrix}$$

Especificar a cuál de los siguientes tipos de material puede corresponder (redondear los resultados numéricos a dos cifras decimales):

- Un monocristal ortorrómbico.
- Un material de simetria tetragonal.
- Un material refractario isótropo.
- Un material monoclínico.
- Un material cerámico totalmente amorfo.
- ninguna de las respuestas anteriores, la respuesta correcta es:

Sol.: La matriz de transformación del sistema convencional ("viejo") al sistema utilizado ("nuevo") es:

$$L = \begin{pmatrix} cos\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) & 0 & sin\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) & 0 & cos\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0.358 & 0 & 0.934 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.934 & 0 & 0.358 \end{pmatrix}$$

Aplicando la transformación de ejes inversa se obtiene el tensor de expansión térmica referido a la orientación convencional:

$$\alpha_{ij} = l_{ki} l_{lj} \alpha'_{kl} \qquad \alpha = L^T \cdot \alpha' \cdot L$$

$$ii = 1..3 \qquad jj = 1..3$$

$$\alpha_{ii,jj} = if\left(\alpha_{ii,jj} < 10^{-15}, 0, \alpha_{ii,jj}\right)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.28 \end{pmatrix}$$

Para propiedades de segundo orden simétricas, esta estructura corresponde al sistema ortorrómbico.

6. Un material ferroeléctrico del sistema trigonal presenta, entre otros, los siguientes valores de los módulos piezoeléctricos: $d_{113} = 0.17$, $d_{211} = -0.68$, $d_{311} = 0.55$ y $d_{333} = 0.28$ pC/N. ¿Cuánto valdrá el módulo d_{112}?

- -0.27 pC/N
- 0.25 pC/N
- -0.34 pC/N
- -0.68 pC/N
- -0.39 pC/N
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:

Sol: las clases ferroeléctricas (piezo y piroeléctricas) del sistema trigonal son la 3 y la 3m. Para ambas se cumple:

$$d_{16} = 2d_{112} = -2d_{22} = 2d_{21}$$

por tanto: $d_{112} = d_{211}$ $d_{112} = -0.68$

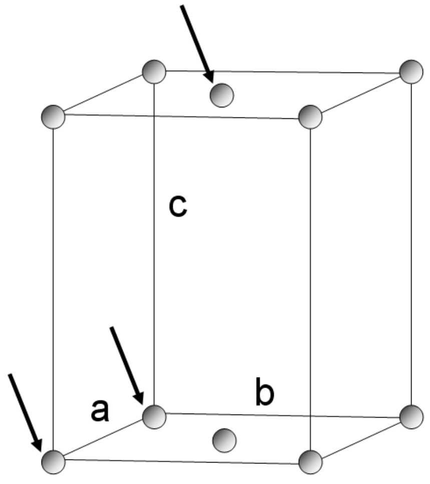
7. Una fibra óptica transmite una señal luminosa de una fuente a un sensor remoto. La señal tiene una intensidad inicial de $I_0 = 1 \times 10^{-7}$ W, y la fibra reduce la intensidad de la señal con una atenuación óptica de $At = 1.23$ dB/km. El sensor óptico remoto es sensible a intensidades luminosas iguales o superiores a $I = 1 \times 10^{-15}$ W. ¿Cuál es la máxima distancia a la que puede colocarse el sensor de la fuente para que la señal sea detectable por el sensor?

- 18.2 km
- 35.6 km
- 7.6 km
- 13.3 km
- 65.0 km
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:

Sol.: aplicando directamente la definición de atenuación óptica:

$$\frac{-1}{At}\cdot 10\cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 65 \qquad \text{km}$$

8. Determina los índices de Miller del plano que contiene los átomos marcados por flechas en la celda ortorrómbica de la figura



- $(2\,1\,1)$
- $(0\,2\,\bar{1})$
- $(3\,0\,1)$
- $(2\,\bar{1}\,1)$
- $(1\,3\,1)$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:

Sol.: las intersecciones con los ejes cristalográficos son en el infinito, en 1 y en 2. Por tanto los índices de Miller son:

$(02\,\bar{1})$

Problema 1 **Nombre:** **Número de matrícula:**

Un material cerámico utilizado como sensor de oxígeno es una solución sólida de óxido de ytrio (Y_2O_3) en óxido de thorio (ThO_2) . La estructura cristalográfica del ThO_2 puro es del tipo de la fluorita. En las soluciones sólidas ThO_2-Y_2O_3 se mantienten i) el número de posiciones catiónicas y ii) el tamaño de la celda, en los mismos valores que en la estructura del ThO_2 puro.

La solución sólida se forma por sustitución del $x = 12.3$ % de los iones Th^{+4} por iones Y^{+3} , sin dejar vacantes en las posiciones catiónicas y manteniendo la neutralidad eléctrica del cristal.

Usando los siguientes datos (con los decimales indicados):

- radios iónicos: $r_{Th} = 0.105 \cdot 10^{-9}$m, $r_O = 0.138 \cdot 10^{-9}$ m, $r_Y = 0.102 \cdot 10^{-9}$ m,
- masas atómicas : $Mw_{Th} = 232.04$, $Mw_O = 16$, $Mw_Y = 88.91$,g/mol

y considerando todos los iones como esféricos, calcular :

- la densidad cristalográfica de la solución sólida en kg/m^3
- la composición porcentual molar (es decir % molar de ThO_2 y % molar de Y_2O_3) de la solución sólida,

(3 puntos, 45 minutos)

Solución: de acuerdo con el enunciado y al tratarse de una estructura tipo fluorita los iones O^{-2} forman una estructura cúbica simple de lado a/2, con los cationes situados en la mitad de los huecos cúbicos, tanto en el ThO_2 puro como en las soluciones. Las posiciones catiónicas se mantienen siempre ocupadas, luego en la solución sólida, para mantener la neutralidad eléctrica del cristal, aparecerán vacantes aniónicas.

La arista de la celda unitaria, tanto en el ThO_2 puro como en las soluciones sólidas (ver enunciado) es:

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot (r_O + r_{Th}) \qquad a = 5.612 \times 10^{-10} \quad \text{m}$$

Tomando como base de cálculo, p.ej. 100 iones Th^{+4}, el enunciado indica que en la solución sólida de cada 100 iones Th^{+4} originales , $x = 12.3$ iones Th^{+4} son sustituidos: de esta forma quedan $100 - x = 87.7$ iones Th^{+4} , $x = 12.3$ iones Y^{+3} y ninguna vacante en posición catiónica. La condición de electroneutralidad de la solución implica que tienen que salir $\frac{x}{2} = 6.15$ iones O^{-2}, quedando sólo $200 - \frac{x}{2} = 193.85$ iones O^{-2} en lugar de los 200 originales.

Expresado en fracciones, si la celda de lado "a" del ThO_2 puro tiene 8 iones O^{-2} y 4 iones Th^{+4}, la celda de la solución sólida resultante, con una sustitución de $x = 12.3$ iones Th^{+4}, está formada por :

$$x = 0.123$$

$$n_O = \frac{4 \cdot (4 - x)}{2} \quad \text{iones } O^{-2} \qquad n_U = 4 \cdot (1 - x) \quad \text{iones } Th^{+4} \qquad n_Y = 4 \cdot x \quad \text{iones } Y^{+3}$$

La densidad se expresa en función de estos números de iones como:

$$\rho = \frac{\left(n_O \cdot Mw_O + n_{Th} \cdot Mw_{Th} + n_Y \cdot Mw_Y\right) \cdot 1.6603 \cdot 10^{-27}}{a^3} \quad \text{kg/m}^3$$

O lo que es lo mismo:

$$\rho = \frac{\left[\frac{4 \cdot (4 - x)}{2} \cdot Mw_O + 4(1 - x) \cdot Mw_{Th} + 4x \cdot Mw_Y\right] \cdot 1.6603 \cdot 10^{-27}}{a^3}$$

$$\rho = 9223.47 \quad \text{kg/m}^3$$

Por tanto, en la celda de lado "a" habrá:

$n_O = \frac{4(4-x)}{2}$ $n_O = 7.754$ iones O^{-2}

$n_{Th} = 4\cdot(1-x)$ $n_{Th} = 3.508$ iones Th^{+4}

$n_Y = 4x$ $n_Y = 0.492$ iones Y^{+3}

Verificación de la electroneutralidad: $4n_{Th} + 3n_Y - 2n_O$

Los kmoles de ThO_2 y Y_2O_3 están relacionados con los números de iones por celda:

$$kmolesThO2 = \frac{n_{Th}}{6.023\cdot10^{26}} \qquad kmoles_{Y2O3} = \frac{n_Y}{2\cdot\left(6.023\cdot10^{26}\right)}$$

$$kmolesThO2 = 5.824\times10^{-27} \qquad kmoles_{Y2O3} = 4.084\times10^{-28}$$

Y por tanto la composición porcentual molar de la solución es:

$$x_{ThO2} = \frac{kmolesThO2}{kmolesThO2 + kmoles_{Y2O3}}\cdot100 \qquad x_{Y2O3} = 100 - x_{ThO2}$$

$x_{ThO2} = 93.447$ % $x_{Y2O3} = 6.553$ %

Problema 2 **Nombre:** **Número de matrícula:**

Algunas cuerdas (las graves o bordonas) de guitarra eléctrica están fabricadas de un material compuesto por dos tipos de alambre: un alambre macizo de acero al carbono (A) alrededor del cual se enrolla apretadamente un alambre de otro material (B) (p.ej en las Fender Original 150s B es níquel), tal y como se indica en la figura.

Con muy buena aproximación, se puede suponer que la fuerza aplicada al tensar la cuerda la soporta íntegramente el componente A. El componente B sólo añade masa inerte al conjunto y tiene un módulo elástico despreciable. El compuesto de los dos alambres se encuentra en condiciones de isodeformación.

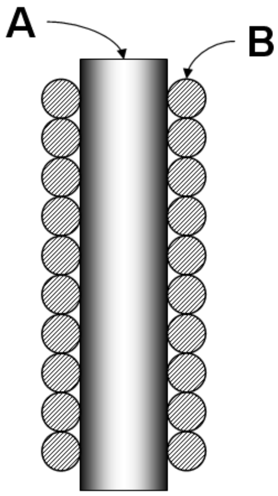
Una cuerda de este tipo, de longitud L, tensada con una fuerza F y de densidad lineal ρ (kg de cuerda/m de cuerda) tiene como frecuencia natural de vibración: $f = \frac{1}{2L}\cdot\sqrt{\frac{F}{\rho}}$

Considerando la cuerda como un material compuesto, y conocidos los diámetros de los dos tipos de alambre, D_A, D_B, sus densidades ρ_A, ρ_B, y el módulo de Young de A E_A, determinar en función de estas variables (estas deben aparecer necesariamente en la solución), de la geometría del material, y otras variables que se consideren necesarias:

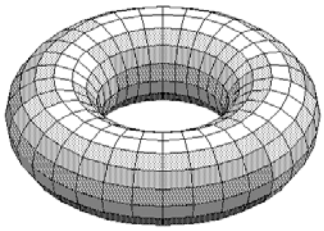
- la densidad lineal (kg de cuerda / m) de la cuerda,
- por su geometría, a qué clase pertenece este material compuesto,
- cuánto se incrementa la longitud de la cuerda al tensarla (afinarla) para que vibre con su frecuencia natural f

Por simplicidad, considerar el bobinado de B en torno a A como formado por anillos (forma de toro) y no como helicoidales.
Sugerencia: para calcular la densidad lineal, considerar un tramo de cuerda de longitud igual a un número entero cualquiera de diámetros del alambre B.
Enumerar las variables que aparezcan en las soluciones junto con sus unidades en el SI, continuando la tabla que se adjunta.

(3 puntos, 45 minutos)

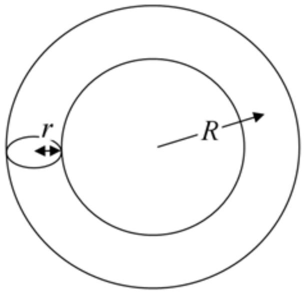


B



Volumen de un toro:

$$Volumen = (2\pi R)(\pi r^2)$$



Propiedad / magnitud	Símbolo	Unidades (SI)
Fuerza	F	N
Longitud de la cuerda	L	m
Densidad lineal de la cuerda	ρ	kg/m
Frecuencia	f	Hz

Sol.: La densidad lineal se puede obtener considerando un tramo de cuerda , p.ej., de longitud igual al diámetro del alambre de B. El volumen de cada componente en este tramo es:

$$Vol_A = \pi\left(\frac{D_A}{2}\right)^2 D_B \qquad Vol_B = 2\pi\left(\frac{D_A}{2}+\frac{D_B}{2}\right)\pi\left(\frac{D_B}{2}\right)^2$$

La masa total de este tramo dividido por su longitud es la densidad lineal (kg/m lineal de cuerda):

$$\rho = \frac{Vol_A\rho_A + Vol_B\rho_B}{D_B} = \frac{\pi}{4}\left[\rho_A D_A^2 + \pi\rho_B D_B\left(D_A + D_B\right)\right]$$

La cuerda debe afinarse (tensarse) con una fuerza dada por la fórmula: $F = \rho\left(2Lf\right)^2$

El módulo de la cuerda, considerada como material compuesto es:

$$E_C = E_A\frac{Vol_A}{Vol_A + Vol_B} = E_A\frac{D_A^2}{D_A^2 + \pi D_B\left(D_A + D_B\right)} = E_A\frac{1}{1+\pi\frac{D_B\left(D_A+D_B\right)}{D_A^2}}$$

La estructura del material tiene un eje de simetría de orden infinito, una dirección preferente (la del eje de la cuerda) y no tiene un sentido preferente, por tanto es de la clase

$$\infty / mm$$

La tensión mecánica (esfuerzo) que actúa sobre la sección transversal del compuesto es:

$$\tau_3 = \frac{F}{\pi\left(\frac{D_A}{2}+D_B\right)^2}$$

Usando la estructura de la complianza elástica de la clase a la que pertenece (ver 08_01_01):

$$\vec{\varepsilon} = \underset{\sim}{s}\vec{\tau}$$

$$\varepsilon_i = s_{ij}\tau_j$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{s}\vec{\tau} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & s_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{44} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2(s_{11}-s_{12}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{13}\tau_3 \\ s_{13}\tau_3 \\ s_{33}\tau_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde (ver 09_02_03 y examen junio 2008): $s_{33} = \frac{1}{E_C}$

Por tanto,

$$L\varepsilon_3 = Ls_{33}\tau_3 = \frac{1}{E_C}\frac{LF}{\pi\left(\frac{D_A}{2}+D_B\right)^2} = L\frac{1}{E_A\dfrac{1}{1+\pi\dfrac{D_B\left(D_A+D_B\right)}{D_A^2}}}\frac{F}{\pi\left(\frac{D_A}{2}+D_B\right)^2} =$$

$$= \frac{LF}{\pi E_A}\frac{1+\pi\dfrac{D_B\left(D_A+D_B\right)}{D_A^2}}{\left(\frac{D_A}{2}+D_B\right)^2}$$

y la cuerda se estira: $\Delta L = L\varepsilon_3$

También puede hacerse este apartado no considerando la cuerda como un compuesto, sino considerando sólo el material (A) que soporta la carga. En este caso se trata de un material homogéneo e isótropo:

$$\varepsilon_3 = \frac{\dfrac{F}{\pi\left(\frac{D_A}{2}\right)^2}}{E_A}$$ y la cuerda se estira $$L\varepsilon_3 = \frac{LF}{\pi E_A\left(\frac{D_A}{2}\right)^2}$$

Los dos resultados son válidos. La diferencia entre los dos resultados se debe a que en el primer método se usa una sección transversal que es sólo aproximada. Para la aplicación de que se trata, el error numérico que causa esta aproximación es inferior a un 10% en la elongación. La aproximación es tanto mejor cuanto más fino es el alambre B (para D_A fijo) y es exacta en el límite:

$$\lim_{D_B\to 0}\frac{LF}{\pi E_A}\frac{1+\pi\dfrac{D_B\left(D_A+D_B\right)}{D_A^2}}{\left(\frac{D_A}{2}+D_B\right)^2} = \frac{LF}{\pi E_A}\frac{1}{\left(\frac{D_A}{2}\right)^2}$$