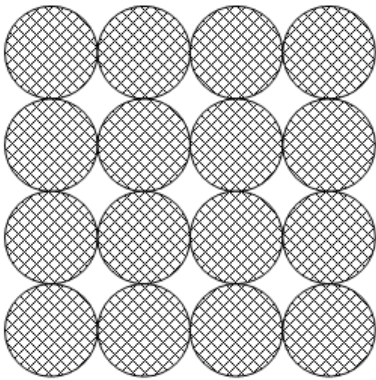


1. Calcular el módulo elástico en la dirección de las fibras de un filamento de material compuesto por fibras de una cerámica A cuyo módulo elástico es $E_f = 210 \cdot 10^9$ Pa en una matriz de metal B cuyo módulo es $E_m = 55 \cdot 10^9$ Pa. Las fibras son de sección circular, están alineadas con el eje del filamento y una sección transversal del material compuesto está dada en la figura:

- $4.464 \cdot 10^{11}$ Pa
- $1.628 \cdot 10^{11}$ Pa
- $2.949 \cdot 10^{11}$ Pa
- $1.767 \cdot 10^{11}$ Pa
- $6.902 \cdot 10^{11}$ Pa
- ninguna de las anteriores. El valor correcto es:



Sol: para el módulo elástico en dirección de las fibras, el material compuesto se encuentra en isodeformación. Por otro lado, la fracción volumétrica de fibras es igual a la fracción de sección

transversal ocupada por las mismas. De la figura se deduce que esta fracción es: $V_f = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ con lo cual

$$E_c = V_f \cdot E_f + (1 - V_f) \cdot E_m \quad E_c = 1.767 \times 10^{11} \text{ Pa}$$



2. En un semiconductor intrínseco del grupo IV, la concentración de electrones a $T_1 = 300$ K es de

$n_{i1} = 2.2 \cdot 10^{18}$ electrones/ m^3 y a $T_2 = 400$ K es de $n_{i2} = 4.7 \cdot 10^{19}$ electrones/ m^3 . Calcular la concentración de electrones a $T_3 = 350$ K.

- $5.404 \cdot 10^{20}$ electrones/ m^3
- $1.265 \cdot 10^{17}$ electrones/ m^3
- $1.265 \cdot 10^{17}$ electrones/ m^3
- $8.015 \cdot 10^{20}$ electrones/ m^3

- $1.658 \cdot 10^{20}$ electrones/m³
- ninguna de las anteriores. El valor correcto es:



Sol: en un semiconductor intrínseco, las concentraciones de portadores y de huecos son iguales entre sí y varían con la temperatura siguiendo una ley de Arrhenius. Por tanto,

$$n_{i1} = A \cdot e^{\frac{-Q}{T_1}} \quad n_{i2} = A \cdot e^{\frac{-Q}{T_2}}$$

dividiendo miembro a miembro: $\frac{n_{i1}}{n_{i2}} = e^{-Q \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)}$ de donde: $Q = \ln \left(\frac{n_{i2}}{n_{i1}} \right) \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1}$

$Q = 3.674 \times 10^3$ y por tanto A vale: $A = n_{i1} \cdot e^{\frac{Q}{T_1}} = 4.583 \times 10^{23}$ electrones/m³

La concentración de electrones a T es $A \cdot e^{\frac{-Q}{T_3}} = 1.265 \times 10^{19}$ electrones/m³



3. Calcular la densidad atómica superficial (átomos/m²) en el plano $[01\bar{1}1]$ de un material cuya estructura cristalina es análoga a la del grafito y cuyos átomos, consideramos esféricos, tienen un radio de $r_A = 0.76 \cdot 10^{-10}$ m. En los planos hexagonales, los átomos vecinos son tangentes y la distancia entre estos planos es $h = 2 \cdot r_A$.

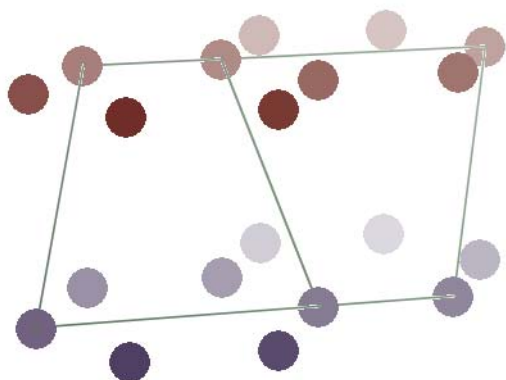
- $3.50 \cdot 10^{19}$ átomos/m²
- $5.92 \cdot 10^{19}$ átomos/m²
- $1.52 \cdot 10^{19}$ átomos/m²
- $1.42 \cdot 10^{19}$ átomos/m²
- $2.04 \cdot 10^{19}$ átomos/m²
- ninguna de las anteriores. El valor correcto es:



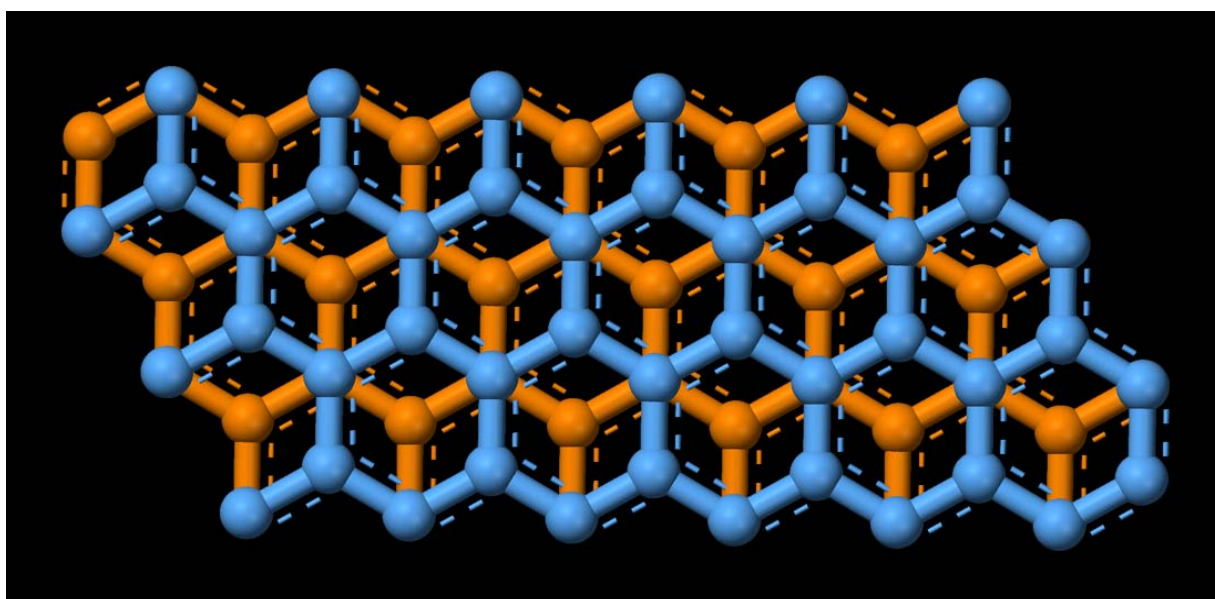
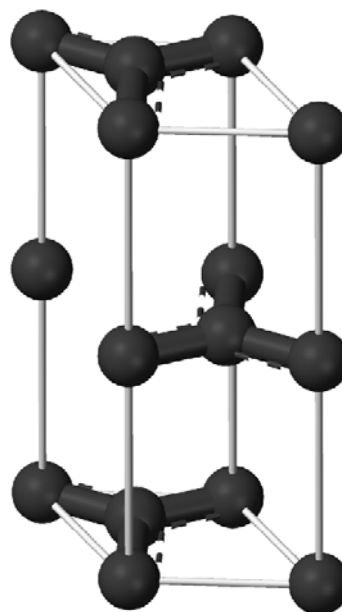
Sol: la figura representa la intersección del plano especificado con dos prismas hexagonales contiguos del cristal. Cada uno de los trapecios representados en la figura contiene $n_A = 1$

átomo del material. Sus bases son: $b_1 = 2r_A$ y $b_2 = 4r_A$ y su altura es $H = \sqrt{(2 \cdot r_A)^2 + (2h)^2} - r_A^2$

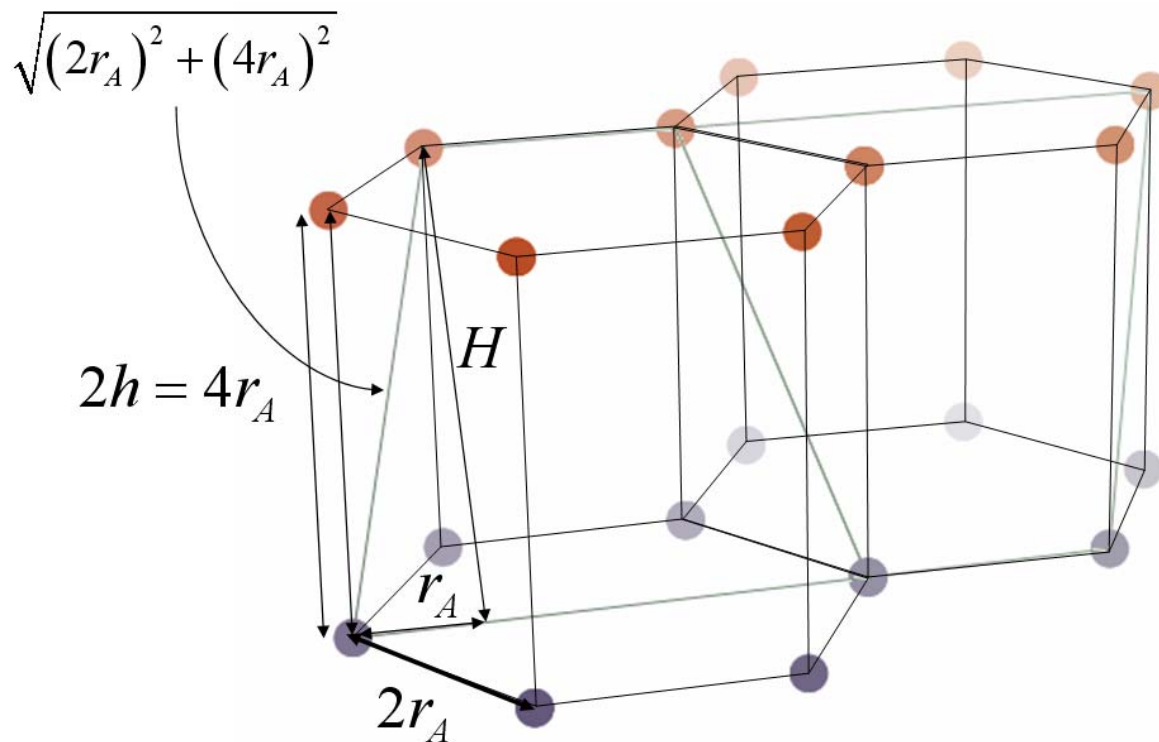
m. Su área es $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \cdot H$ y la densidad superficial es $\frac{n_A}{A} = 1.324 \times 10^{19}$ átomos/m².



celda unitaria del grafito:
(secuencia de capas A-B-A)



Vista superior de dos capas del grafito (una capa A y una capa B)



4. Calcular qué cantidades (kg) de monómeros (etileno y octeno-1) son necesarias para sintetizar un kilogramo de polietileno de baja densidad lineal (LLDPE) con una arquitectura molecular de una rama C_6 ($-C_6H_{13}$) por cada $n_C = 16$ átomos de carbono de la cadena principal.

- 0.636 kg de etileno y 0.364 kg de octeno-1.
- 0.578 kg de etileno y 0.422 kg de octeno-1.
- 0.714 kg de etileno y 0.286 kg de octeno-1.
- 0.429 kg de etileno y 0.571 kg de octeno-1.
- 0.333 kg de etileno y 0.667 kg de octeno-1.
- ninguna de las anteriores. Los valores correctos son:



Sol: para obtener la arquitectura especificada, se requieren $n_{Et} = \frac{n_C - 2}{2}$, $n_{Et} = 7$ moléculas del co-monómero etileno (cada una de ellas contribuye dos grupos metileno $-CH_2-$ a la cadena principal) y $n_{Oct} = 1$ molécula de octeno-1 (contribuye dos grupos metileno a la cadena principal y la rama C_6 completa). La unidad estructural repetitiva de polímero formado por $n_{Et} = 7$ moléculas de etileno y $n_{Oct} = 1$ molécula de octeno-1 tiene una masa total de $m_{UER} = n_{Et} \cdot (2 \cdot 12 + 4 \cdot 1) + n_{Oct} \cdot (8 \cdot 12 + 16 \cdot 1)$, $m_{UER} = 308$ umas. Por tanto, para sintetizar una tonelada métrica serán necesarios $\frac{n_{Et} \cdot (2 \cdot 12 + 4 \cdot 1)}{m_{UER}} = 0.636$ kg de etileno y $\frac{n_{Oct} \cdot (8 \cdot 12 + 16 \cdot 1)}{m_{UER}} = 0.364$ de octeno-1.



5. Un determinado material isótropo, presenta los siguientes valores de la complianza elástica (en notación de Voigt, y en unidades de 10^{-10} Pa^{-1}):

$$s_{11} = 0.85 \quad s_{12} = 0.15$$

Calcular el valor del elemento s_{3223} del tensor de complianza elástica.

- 0.15
- 0.35
- 0.50
- 0.60
- 2.00
- ninguna de las respuestas anteriores. El valor correcto es:

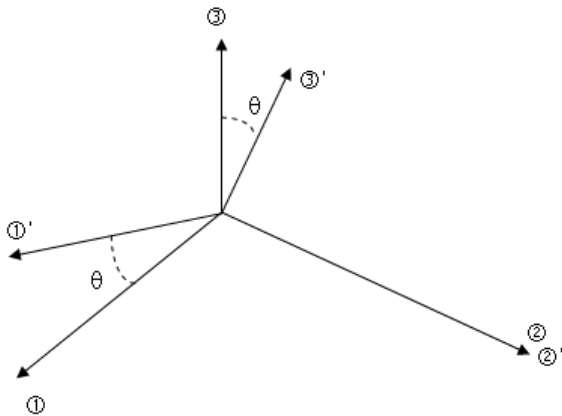


Sol.: Los subíndices 3223 corresponden, en notación de Voigt, a los subíndices 44. Como se trata de la complianza, hay que añadir un factor multiplicativo de 4. Para un sistema isótropo, se cumple (transparencia 50 del tema 8):

$$s_{55} = s_{44} = 2 \cdot (s_{11} - s_{12}) \quad \text{Por lo tanto, en las mismas unidades:} \quad s_{3223} = \frac{1}{2} \cdot (s_{11} - s_{12}) \quad s_{3223} = 0.35$$



6. Para un determinado material, se miden los coeficientes de conductividad térmica referidos a un sistema de coordenadas que está rotado con respecto a los ejes convencionales un ángulo $\theta = 30^\circ$ alrededor del eje 2, tal y como se muestra en el esquema.



El tensor de conductividad obtenido es: $k' = \begin{pmatrix} 1.3415 & 0 & -0.0915 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.0915 & 0 & 0.6585 \end{pmatrix}$
(en W/m.K)

Especificar a cuál de los siguientes tipos de material puede corresponder (redondear los resultados numéricos a cuatro cifras decimales):

- Un monocristal triclinico.
- Un material compuesto ortótropo.
- Un polímero completamente amorfo.
- Un material compuesto "desequilibrado" (monoclinico).
- Una fibra orientada.

- ninguna de las respuestas anteriores, la respuesta correcta es:



Sol.: La matriz de transformación del sistema convencional ("viejo") al sistema utilizado ("nuevo") es:

$$L = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) & 0 & \sin\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) & 0 & \cos\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 \end{pmatrix}$$

Aplicando la transformación de ejes inversa ("deshaciendo" la rotación) se obtiene el tensor de conductividad referido a la orientación convencional:

$$k_{ij} = l_{ki} l_{lj} k'_{kl} \quad k = L^T \cdot k' \cdot L \quad k = \begin{pmatrix} 1.25 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Para propiedades de segundo orden simétricas, esta estructura corresponde al sistema monoclinico.



7. El láser de rubí es un láser de tres niveles. La energía de los niveles metaestable y excitado son $E_2 = 1.789 \text{ eV}$ y $E_3 = 2.280 \text{ eV}$ respectivamente (referidos a la energía del estado fundamental E_1). Si las transiciones láser más importantes se producen entre los niveles E_2 y E_1 , ¿de qué tipo será la radiación producida?

- ultravioleta.
- visible, de color azul-verde.
- visible, de color amarillo.
- visible, de color rojo.
- infrarrojo próximo.
- ninguna de las respuestas anteriores. Especificar longitud de onda:



Sol: La longitud de onda se puede obtener a partir de la diferencia de energía de los niveles entre los que tiene lugar la transición láser, en este caso:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\Delta E = E_2 - 0 \quad \Delta E = 1.789$$

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \quad \lambda = 6.94 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Consultando la Figura 14.2 del libro, se comprueba que dicho valor de la longitud de onda corresponde a una radiación visible de color rojo.



8. Un material A inicialmente puro (considerado como un sólido semi-infinito) se enriquece con un dopante B, exponiéndolo a vapor durante $t = 3$ horas a una temperatura de $T = 900^\circ\text{C}$. ¿A qué profundidad x se tendrá una concentración $C = 3 \cdot 10^{22}$ átomos/ m^3 , si la concentración en la superficie es $C_s = 2 \cdot 10^{24}$ átomos/ m^3 ?

Para la difusión de B en A, el factor pre-exponencial es $D_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, y la energía de activación es $Q = 150 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$.

- 0.64 mm.
- 0.73 mm.
- 1.61 mm.
- 2.64 mm.
- 3.01 mm
- ninguna de las respuestas anteriores. El valor correcto es:

▢ _____

▾ _____

Sol: Aplicando la ecuación de Arrhenius, la constante de difusión a la temperatura de trabajo es:

$$D = D_0 \cdot \exp\left[\frac{-Q}{8.314 \cdot (T + 273)}\right] \quad D = 4.18 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$$

A partir de la ecuación de perfil de concentraciones

$$\frac{C_s - C_x}{C_s - C_0} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) = \text{erf } Z$$

$$\frac{C_s - C}{C_s - 0} = 0.985$$

Interpolando en la Tabla 4.5 se obtiene $Z = \text{erfinv}\left(\frac{C_s - C}{C_s - 0}\right)$, $Z = 1.72$. Y para obtener

la profundidad: $x = 2 \cdot Z \cdot \sqrt{D \cdot t \cdot 3600}$. $x = 7.309 \times 10^{-4} \text{ m}$.

▴ _____

Problema 1

Se desea preparar un material compuesto P de matriz metálica a partir de una aleación de aluminio y una fibra de refuerzo compuesta por boro depositado sobre wolframio. Para asegurar que el material compuesto presente unas buenas propiedades mecánicas, se requieren unas proporciones de aluminio y boro que den lugar (considerado como mezcla binaria, sin presencia de wolframio) a un módulo elástico $E_{\text{min}} = 93.11 \text{ GPa}$ en condiciones de isoesfuerzo. Por otro lado se desea que el coste del producto final P no sea demasiado elevado, de forma que se decide tomar una fibra con una composición de boro y tungsteno tal que el precio de la fibra es de $p = 2153.56 \text{ €/Tm}$. Calcular:

1. El contenido (en fracción másica y volumétrica) de aluminio (Al), boro (B) y wolframio (W) en el material compuesto P.
2. La densidad del producto P, y su módulo elástico en condiciones de isodeformación.

Datos: densidad de la aleación de aluminio: $\rho_{\text{Al}} = 2700 \text{ kg/m}^3$;

densidad del boro: $\rho_{\text{B}} = 2340 \text{ kg/m}^3$;

densidad del wolframio $\rho_W = 19300 \text{ kg/m}^3$;
 módulo elástico de la aleación de aluminio: $E_{Al} = 68.9 \text{ GPa}$;
 módulo elástico del boro: $E_B = 379 \text{ GPa}$;
 módulo elástico del wolframio: $E_W = 410 \text{ GPa}$;
 precio de la aleación de aluminio: $p_{Al} = 1190 \text{ €/Tm}$;
 precio del boro: $p_B = 281 \text{ €/Tm}$;
 precio del wolframio: $p_W = 6891 \text{ €/Tm}$.

(3 puntos, 50 minutos)



Sol.: 1. la primera condición requiere que el módulo elástico en condiciones de isoesfuerzo de una mezcla binaria Q de aluminio (Al) y boro (B) sea de $E_{\min} = 93.11 \text{ GP}$.

De aquí podemos obtener la proporción entre ambos (regla de mezcla de Reuss):

$$\frac{1}{E_{\min}} = \frac{1}{E_Q} = V_{AlQ} \frac{1}{E_{Al}} + (1 - V_{AlQ}) \frac{1}{E_B} \quad \text{donde } V_{AlQ} \text{ es la fracción volumétrica de aluminio en la mezcla Q. Despejando esta incógnita:}$$

$$V_{AlQ} = \frac{\frac{1}{E_{\min}} - \frac{1}{E_B}}{\frac{1}{E_{Al}} - \frac{1}{E_B}} \quad V_{AlQ} = 0.682 \quad V_{BQ} = 1 - V_{AlQ} \quad V_{BQ} = 0.318$$

La segunda condición requiere que el precio de la fibra R (mezcla binaria de boro B y wolframio W) sea $p_R = p$, $p_R = 2153.56 \text{ €/Tn}$. Puesto que el precio de la fibra está dado por:

$$p_R = m_{BR} p_B + (1 - m_{BR}) p_C$$

donde m_{BR} es la fracción másica de boro en la fibra R. Despejando, se obtiene:

$$m_{BR} = \frac{p_R - p_W}{p_B - p_W} \quad m_{BR} = 0.717 \quad m_{WR} = 1 - m_{BR} \quad m_{WR} = 0.283$$

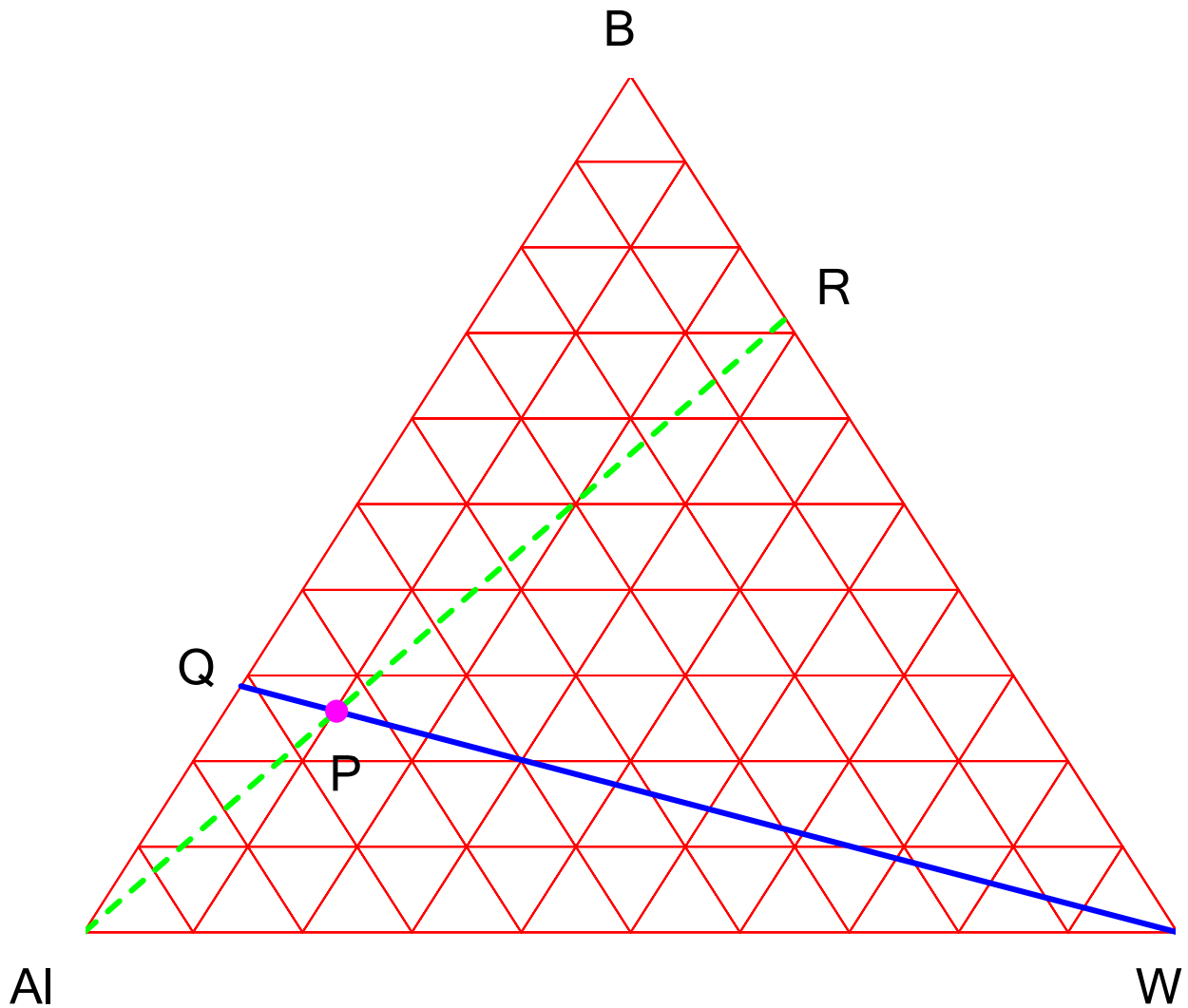
La composición del material compuesto P se obtiene de satisfacer las dos condiciones. Se puede resolver tanto gráficamente como analíticamente, y trabajando tanto en fracciones másicas como volumétricas.

RESOLUCIÓN GRÁFICA EN FRACCIONES MÁSCAS: la composición en fracciones másicas de la mezcla binaria Q es:

$$m_{AlQ} = \frac{V_{AlQ} \cdot \rho_{Al}}{V_{AlQ} \cdot \rho_{Al} + (1 - V_{AlQ}) \cdot \rho_B} \quad m_{AlQ} = 0.712 \quad m_{BQ} = 1 - m_{AlQ} \quad m_{BQ} = 0.288$$

El material compuesto P se obtendrá en el punto de corte entre las rectas correspondientes a las mezclas de W con Q y de Al con R.





$$m_{WP} = 1 - m_{AIP} - m_{BP}$$

$$m_{AIP} = 0.640$$

$$m_{BP} = 0.258$$

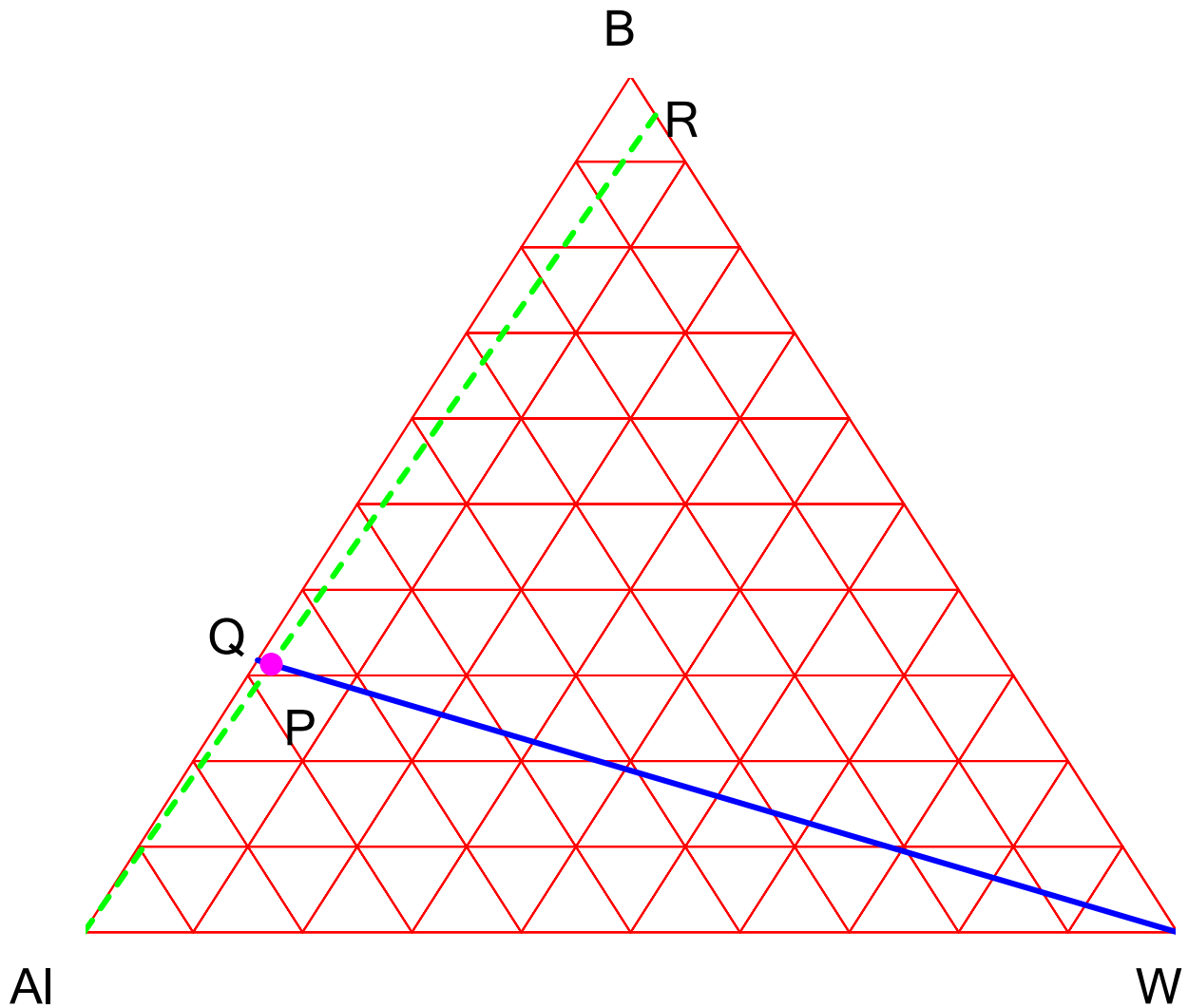
$$m_{WP} = 0.102$$

RESOLUCIÓN GRÁFICA EN FRACCIONES VOLUMÉTRICAS: la composición en fracciones volumétricas de la fibra R es:

$$V_{BR} = \frac{\frac{m_{BR}}{\rho_B}}{\frac{m_{BR}}{\rho_B} + \frac{m_{WR}}{\rho_W}} \quad V_{BR} = 0.954 \quad V_{WR} = 1 - V_{BR} \quad V_{WR} = 0.046$$

El material compuesto P se obtendrá en el punto de corte entre las rectas correspondientes a las mezclas de C con Q y de A con R.





$$V_{WP} = 1 - V_{AIP} - V_{BP}$$

$$V_{AIP} = 0.672$$

$$V_{BP} = 0.313$$

$$V_{WP} = 0.015$$

que corresponden a las mismas fracciones másicas obtenidas anteriormente:

$$\frac{V_{AIP} \cdot \rho_{AI}}{V_{AIP} \cdot \rho_{AI} + V_{BP} \cdot \rho_B + V_{WP} \cdot \rho_W} = 0.640$$

$$\frac{V_{BP} \cdot \rho_B}{V_{AIP} \cdot \rho_{AI} + V_{BP} \cdot \rho_B + V_{WP} \cdot \rho_W} = 0.258$$

$$\frac{V_{WP} \cdot \rho_W}{V_{AIP} \cdot \rho_{AI} + V_{BP} \cdot \rho_B + V_{WP} \cdot \rho_W} = 0.102$$

2. A partir de las composiciones volumétricas, puede obtenerse la densidad tomando como base de cálculo una unidad de volumen:

$$\rho_P = V_{AIP} \cdot \rho_{AI} + V_{BP} \cdot \rho_B + V_{WP} \cdot \rho_W \quad \rho_P = 2836 \text{ kg/m}^3$$

En cuanto al módulo elástico, al ser en condiciones de isodeformación, se aplica la regla de

mezcla de Voigt:

$$E_P = V_{AIP} \cdot E_{AI} + V_{BP} \cdot E_B + V_{WP} \cdot E_W$$

$$E_P = 171 \text{ GPa}$$



Problema 2

El índice de refracción de una fibra óptica multimodo varía en función de la distancia al eje de la misma según

$$n(r) = \sqrt{a - b \cdot r} \text{ con } a = 2.89 \text{ y } b = 4.0 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}. \text{ Para una fibra de radio } R_f = 25 \cdot 10^{-6} \text{ m, determinar:}$$

- qué tipo de trayectoria sigue la señal luminosa en una fibra recta.
- cuál es el ángulo de desalineación máxima admisible θ_T (definido como aquél para el que la trayectoria de la señal luminosa es tangente a la superficie de la fibra recta).

(3 puntos, 50 minutos)



Solución: (ver problema 06_14_01) la señal electromagnética sigue trayectorias que minimizan el tiempo que tarda en viajar entre dos puntos cualesquiera a través del medio. Se obtienen de minimizar el funcional:

$$t = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{c \cdot n(x, y)} dx$$

Sustituyendo la expresión dada para el índice de refracción en la ec. de Euler asociada a este funcional:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \quad \text{con} \quad f(x, y, y') = n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{a - bx} \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{a - bx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad \text{y por tanto:} \quad y' = \frac{C_1}{\sqrt{a - C_1^2 - bx}} \quad (*)$$

cuya integración es inmediata puesto que es de la forma: $\int t^{-1/2} dt$ con $t \equiv a - C_1^2 - bx$

Las trayectorias son:

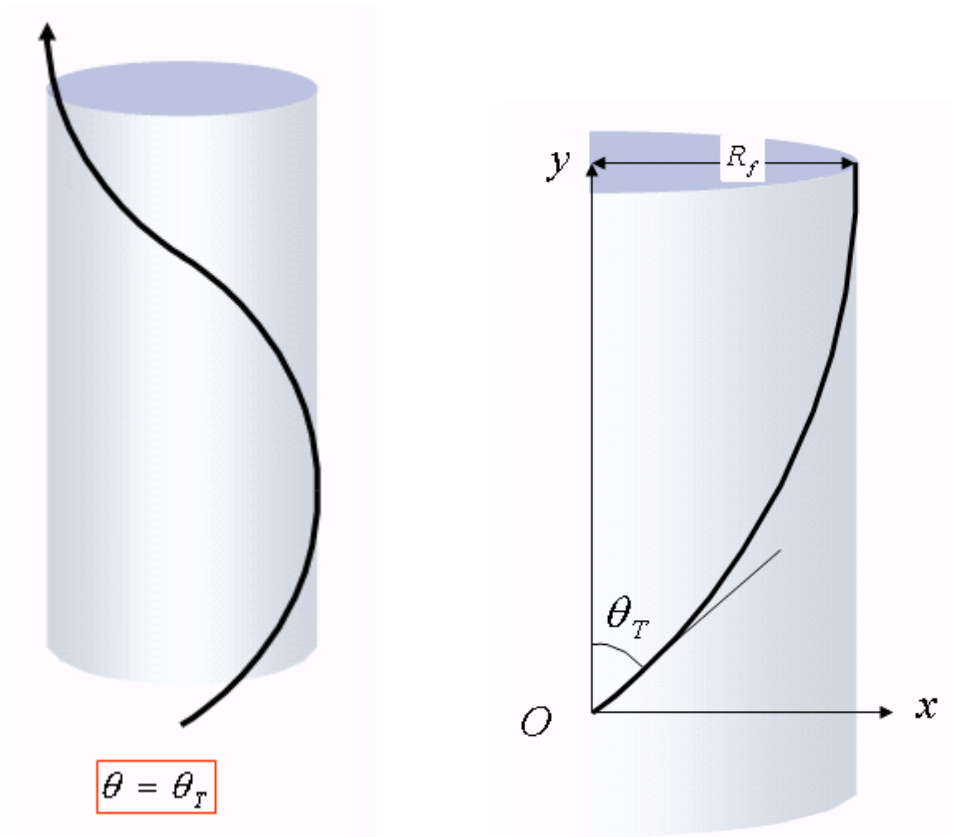
$$(y - C_2)^2 = \frac{4C_1^2}{b^2} (a - C_1^2 - bx)$$

es decir, parábolas abiertas hacia el eje x (dirección radial). Por tanto las trayectorias a lo largo de la fibra están compuestas de arcos de parábola. Variando las dos constantes de integración se obtiene una doble familia de curvas que describe todas las posibles trayectorias de la señal.

La máxima desalineación permisible se obtiene cuando la trayectoria (la parábola anterior) es tangente a la superficie de la fibra, es decir, cuando la tangente a la trayectoria es vertical en la superficie de la fibra. Esta condición (que tenga tangente vertical cuando $x = R_f$) es suficiente para determinar la constante C_1 y la desalineación máxima.

Si se deseara calcular una trayectoria concreta, la segunda constante de integración que corresponde a esta trayectoria particular se obtendría de imponer, por ejemplo, que pase por

el origen.



$$\theta = \theta_T$$

Condición: la trayectoria es tangente a la fibra para $x=R_f$; es decir la derivada (*) debe ser infinita cuando $x=R_f$:

$$y'|_{x=R_f} = \infty \Rightarrow \sqrt{a - C_1^2 - bR_f} = 0 \Rightarrow C_1 = \sqrt{a - bR_f}$$

$$C_1 = \sqrt{a - b \cdot R_f} \qquad C_1 = 1.375$$

y la desalineación se puede expresar en función de sólo una de las constantes de integración como:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \text{atan} (y'|_{x=0,y=0}) = \frac{\pi}{2} - \text{atan} \left(\frac{C_1}{\sqrt{a - C_1^2}} \right)$$

La desalineación máxima admisible es por tanto: $\theta_T = \frac{\pi}{2} - \text{atan} \left(\frac{C_1}{\sqrt{a - C_1^2}} \right)$

$$\theta_T = 0.629 \text{ radianes} \qquad \theta_T \cdot \frac{180}{\pi} = 36 \text{ grados}$$

Para obtener además una trayectoria concreta (p.ej. una trayectoria que parta del origen) la

ecuación general de la trayectoria debe ser satisfecha para $x=0, y=0$, lo que proporciona una relación entre las dos constantes de integración:

$$C_2^2 = \frac{4C_1^2}{b^2}(a - C_1^2) \quad C_2 = 2 \cdot \sqrt{R_f \cdot \left(\frac{a}{b} - R_f\right)} \quad C_2 = 6.874 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Representación gráfica de la trayectoria:

$$y_1(x) = C_2 - \frac{2C_1}{b} \cdot \sqrt{a - C_1^2 - b \cdot x} \quad y_2(x) = C_2 + \frac{2C_1}{b} \cdot \sqrt{a - C_1^2 - b \cdot x}$$

$$i = 1..101 \quad x_i = \frac{i-1}{100} \cdot R_f$$

