Dept. de Vibraciones y Aeroelasticidad
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

08-Julio-2016

Número	

Apellidos	
Nombre	

PROBLEMA 1 (65 minutos)
CONTESTAR EN ESTA HOJA. NO SE TENDRÁN EN CONSIDERACIÓN HOJAS ADICIONALES.

Enunciado: La figura inferior representa la senda de descenso inicial de una aeronave a velocidad constante $\dot{h}_0$ y deflexión de la superficie de control $\delta_c = 0$. A una altura de vuelo determinada se encuentra con una ráfaga horizontal de velocidad u_G. Con el objeto de simplificar el análisis se asume perfil bidimensional simétrico a ángulo de ataque nulo ($\alpha = 0$) y con dos grados de libertad de movimiento: vertical de sólido rígido h (positivo hacia abajo) y deflexión de la superficie de control δ_c (positiva si el borde de de salida desciende). La velocidad horizontal de la aeronave se mantiene constante e igual a U_∞ en todo momento, la masa del perfil es M y se asume movimiento cuasi-estacionario para formular las cargas aerodinámicas. Con el objeto de controlar el movimiento de la aeronave al entrar en la ráfaga, el piloto deflecta la superficie de control un ángulo $\delta_c(t)$. Los coeficientes aerodinámicos del perfil son $C_{L\alpha}$, $C_{L\delta}$ y $C_{MAC\delta}$. Se pide:

1. (1 punto) Expresar la sustentación del perfil L_{M0} (asociada al movimiento vertical $\dot{h}_0$) que equilibra el peso antes de penetrar en la ráfaga.
2. (1 punto) Expresar la sustentación L_M asociada al movimiento vertical justo después de penetrar en la ráfaga. Utilizar $h(t)$ para denotar el movimiento del perfil respecto a la senda inicial de descenso (ver figura).
3. (1 punto) Simplificar la expresión anterior reteniendo términos de primer orden en u_G y $\dot{h}$, obteniendo una expresión del tipo $L_M \approx L_{M0} + A\dfrac{\dot{h}_0}{U_\infty} + B\dfrac{\dot{h}}{U_\infty}$
4. (1 punto) Teniendo en cuenta las hipótesis de los dos apartados anteriores, calcular la sustentación incremental ΔL que se induce al penetrar en la ráfaga incluyendo ahora la sustentación asociada a la deflexión de la superficie de control.
5. (1 punto) Plantear la ecuación diferencial de segundo orden que proporciona el movimiento relativo $h(t)$ a la senda de descenso inicial. Utilizar el tiempo físico y la notación $h(t)$, $\dot{h}(t)$ y $\ddot{h}(t)$ para expresar las derivadas respecto al tiempo.
6. (1 punto) Utilizar el tiempo adimensional $s = U_\infty t/(c/2)$ y adimensionalizar convenientemente de forma que aparezca el parámetro másico $\mu = M/\left[\rho_\infty C_{L\alpha}(c/2)^2\right]$. Utilizar la notación $h(s)$, $\dot{h}(s)$ y $\ddot{h}(s)$ para expresar las derivadas respecto al tiempo adimensional s. Adimensionalizar las dimensiones con la semicuerda $c/2$.
7. (1 punto) Formular la ecuación diferencial anterior en el plano de Laplace, utilizando una línea superior (por ejemplo $\overline{h}$) para indicar la transformada de Laplace de las variables.
8. (1 punto) Expresar la transformada de Laplace del movimiento relativo adimensional, es decir $\overline{h}(p)/(c/2)$, como $\overline{h}(p)/(c/2) = F(p) + G(p)\,\overline{\delta}_c$, siendo $\overline{\delta}_c$ la transformada de Laplace de la rotación de la superficie de control y p la variable de Laplace.
9. (1 punto) Calcular el desplazamiento relativo en función del tiempo adimensional, es decir $h(s)/(c/2)$, en el caso de $\delta_c = 0$.
10. (1 punto) Describir de forma cualitativa la evolución de $h(s)/(c/2)$, describiendo la forma de la nueva trayectoria de descenso respecto de la original.

Solución:

1. Sustentación del perfil $L_{M0} = q_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0}{U_\infty}$
2. Sustentación después: $L_M = \frac{1}{2}\rho_\infty \left(U_\infty + u_G\right)^2 c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0 + \dot{h}}{U_\infty}$
3. Simplificar la ecuación anterior: $L = \frac{1}{2}\rho_\infty \left(U_\infty + u_G\right)^2 c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0 + \dot{h}}{U_\infty} \approx \frac{1}{2}\rho_\infty \left(U_\infty^2 + 2u_G U_\infty\right) c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0 + \dot{h}}{U_\infty} \approx q_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} + q_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}}{U_\infty} + \rho_\infty U_\infty u_G c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0}{U_\infty}$
4. El incremento de sustentación es:

$$\begin{aligned} \Delta L &\approx -q_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} + q_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} + q_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}}{U_\infty} + \rho_\infty U_\infty u_G c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} + q_\infty c C_{L\delta} \delta_c = \\ &= q_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}}{U_\infty} + \rho_\infty u_G U_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} + q_\infty c C_{L\delta} \delta_c \end{aligned}$$

5. Ecuación de la dinámica: $M\ddot{h} = -q_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}}{U_\infty} - \rho_\infty u_G U_\infty c C_{L\alpha} \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} - q_\infty c C_{L\delta} \delta_c$
6. Adimensionalización de la ecuación

$$\begin{aligned} M \frac{U_\infty^2}{\left(c/2\right)^2} \ddot{h}\left(s\right) &= -\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c C_{L\alpha} \frac{U_\infty}{c/2} \frac{1}{U_\infty} \dot{h}\left(s\right) - \rho_\infty u_G U_\infty c C_{L\alpha} \frac{1}{U_\infty} \frac{U_\infty}{c/2} \dot{h}_0\left(s\right) - \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c C_{L\delta} \delta_c \\ \frac{M}{C_{L\alpha}\rho_\infty \left(c/2\right)^2} \frac{\ddot{h}\left(s\right)}{c/2} &= -\frac{\dot{h}\left(s\right)}{c/2} - 2\frac{u_G}{U_\infty} \frac{\dot{h}_0\left(s\right)}{c/2} - \frac{C_{L\delta}}{C_{L\alpha}} \delta_c \\ \mu \frac{\ddot{h}\left(s\right)}{c/2} + \frac{\dot{h}\left(s\right)}{c/2} &= -2\frac{u_G}{U_\infty} \frac{\dot{h}_0\left(s\right)}{c/2} - \frac{C_{L\delta}}{C_{L\alpha}} \delta_c \end{aligned}$$

7. Transformada de Laplace:

$$\frac{\overline{h}}{c/2} p\left(1 + p\mu\right) = -2\frac{u_G}{U_\infty} \frac{\dot{h}_0\left(s\right)}{c/2} - \frac{C_{L\delta}}{C_{L\alpha}} \overline{\delta}_c$$

8. Expresión:

$$\frac{\overline{h}}{c/2} = \frac{-2\frac{u_G}{U_\infty} \frac{\dot{h}_0\left(s\right)}{c/2}}{p\left(1 + ps\right)} - \frac{\frac{C_{L\delta}}{C_{L\alpha}}}{p\left(1 + \mu p\right)} \overline{\delta}_c$$

9. Si $\delta_c = 0$,

$$\frac{\overline{h}\left(p\right)}{c/2} = \frac{-2\frac{u_G}{U_\infty} \frac{\dot{h}_0\left(s\right)}{c/2}}{p\left(1 + \mu p\right)} = -2\frac{u_G}{U_\infty} \frac{\dot{h}_0\left(s\right)}{c/2} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\mu} + p}\right] \rightarrow \frac{h\left(s\right)}{c/2} = -2\frac{u_G}{U_\infty} \frac{\dot{h}_0\left(s\right)}{c/2} \left(1 - e^{-\frac{1}{\mu}s}\right)$$

10. El avión tiene a otra trayectoria paralela a la original pero con el mismo ángulo de descenso.