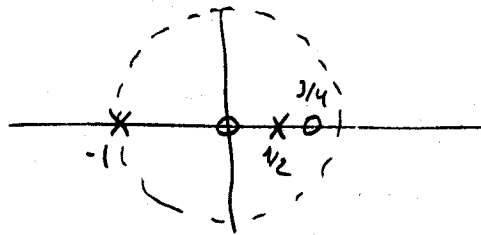


EXAMEN TDS - SEPT '09 - PROBLEMAS

PROBLEMA 3 (1)

a) El diagrama de polos y ceros que nos dan

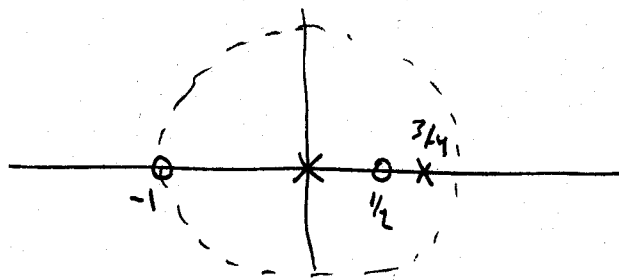


admite 3 posibles ROC y por tanto 3 posibles SLI

- i) $|z| < 1/2$
- ii) $1/2 < |z| < 1$
- iii) $|z| > 1$

El dato fundamental para determinar la ROC es que el sistema que estamos buscando admite dos sistemas inversos, uno estable y otro unilateral hacia la izquierda.

El diagrama de polos y ceros de cualquier sistema inverso de los sistemas i), ii) o iii) será:



Con este diagrama de polos y ceros hay 2 posibles ROC y 2 posibles SLIs:

- a) $0 < |z| < 3/4$
- b) $|z| > 3/4$

El sistema a es unilateral hacia la izquierda y el sistema b es estable. El dato que nos da el enunciado

PROBLEMA 3 (2)

es que los dos sistemas, a) y b) son inversos del sistema que buscamos, para lo cual las ROC de a) y b) deben tener intersección no nula con el sistema que buscamos.

El sistema ii) es el único que cumple esta condición, por tanto la ROC del sistema que buscamos es

$$ROC: \frac{1}{2} < |z| < 1$$

El sistema NO ES ESTABLE porque la ROC no incluye a la circunferencia unidad

El sistema NO ES CAUSAL porque la ROC tiene forma de anillo circular y por tanto se corresponde con una $h[n]$ bilateral que nunca puede ser causal.

b) El diagrama de polos y ceros y la ROC nos definen la función de transferencia de forma completa salvo una constante multiplicativa que llamaremos k . Así

$$H(z) = k \cdot \frac{z(z - \frac{3}{4})}{(z - \frac{1}{2})(z + 1)}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

Para calcular k no podemos aplicar el teorema del valor inicial porque $h[n]$ no es causal. Lo que hacemos es calcular la transformada Z inversa y después particularizar en $h[0]$. Con esto también resolveremos el apartado c).

PROBLEMA 3 (3)

Buscamos $H(z)$ a potencias de z negativas:

$$H(z) = k \cdot \frac{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$H(z) = k \cdot \left(\frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 + z^{-1}} \right), \quad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

$$A = \left. \frac{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{3}{4} \cdot 2}{1 + 2} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$B = \left. \frac{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right|_{z=-1} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{6}$$

$$H(z) = k \left(\frac{-\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right) + k \left(\frac{\frac{7}{6}}{1 + z^{-1}} \right), \quad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

Calculamos la transformada z inversa teniendo en cuenta la ROC

$$h[n] = -\frac{1}{6}k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{7}{6}k \cdot (-1)^n u[-n-1]$$

Y particularizando en $n=0$ obtenemos k

$$h[0] = -\frac{1}{6}k - \frac{7}{6}k = -\frac{8}{6}k = 8 \Rightarrow \underline{\underline{k = -6}}$$

PROBLEMA 3 (4)

Una vez obtenida K la respuesta a los apartados b y c es inmediata:

b) Función de transferencia:

$$H(z) = -6 \frac{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + z^{-1})}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

c) Respuesta al impulso del sistema

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 7(-1)^n u[-n-1]$$