EXAMEN TDS SEPT 08 – PROBLEMAS

PROBLEMA 3 (1)

a) La mayor dificultad de este problema radica en darse cuenta de que el sistema que eleva la señal de entrada al cuadrado es un sistema invariante con el tiempo pero NO LINEAL. Las relaciones espectrales entre entrada y salida no vienen definidas por una respuesta en frecuencia, pero podemos obtenerlas por la propiedad de modulación de la FT (caso continuo) y DTFT (caso discreto)

En el caso discreto la propiedad de modulación es:

$$\left.\begin{array}{l} x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) \\ y[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\omega}) \end{array}\right\} \Rightarrow x[n]\cdot y[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, Y(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

Es decir, si las señales se multiplican en el tiempo los espectros sufren una especie de convolución (pero con la integral limitada sólo entre $-\pi$ y π)

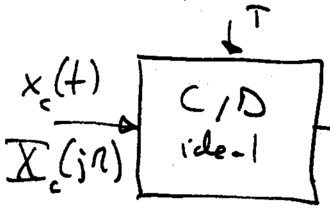
En el caso continuo

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\Omega) \\ y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)\, y(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)\, Y(j(\Omega-\theta))\,d\theta = \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * Y(j\Omega)$$

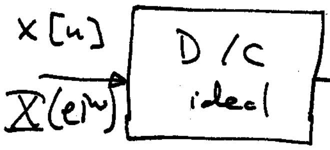
Es decir, si las señales se multiplican en el tiempo los espectros sufren una convolución lineal.

PROBLEMA 3 (2)

Aparte de la propiedad de modulación debemos conocer las relaciones espectrales entre entrada y salida en los módulos C/D y D/C ideales.

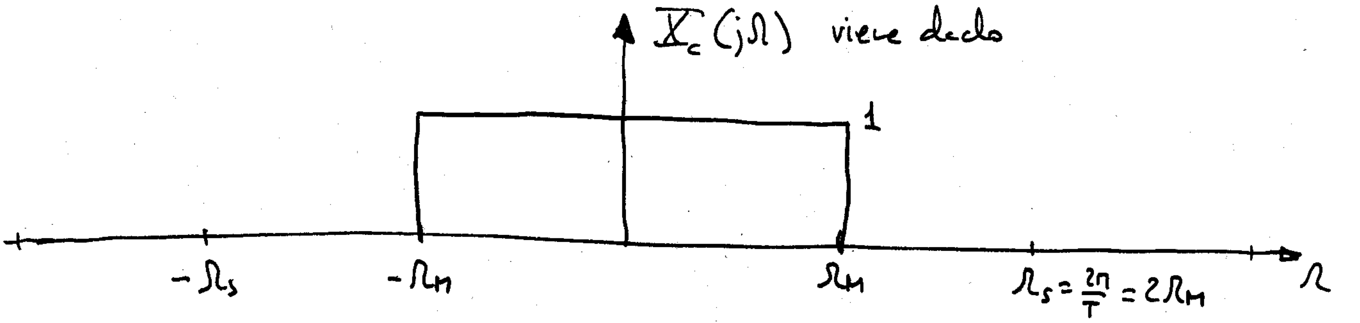


$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\,\frac{\omega - 2\pi i}{T}\right)$$

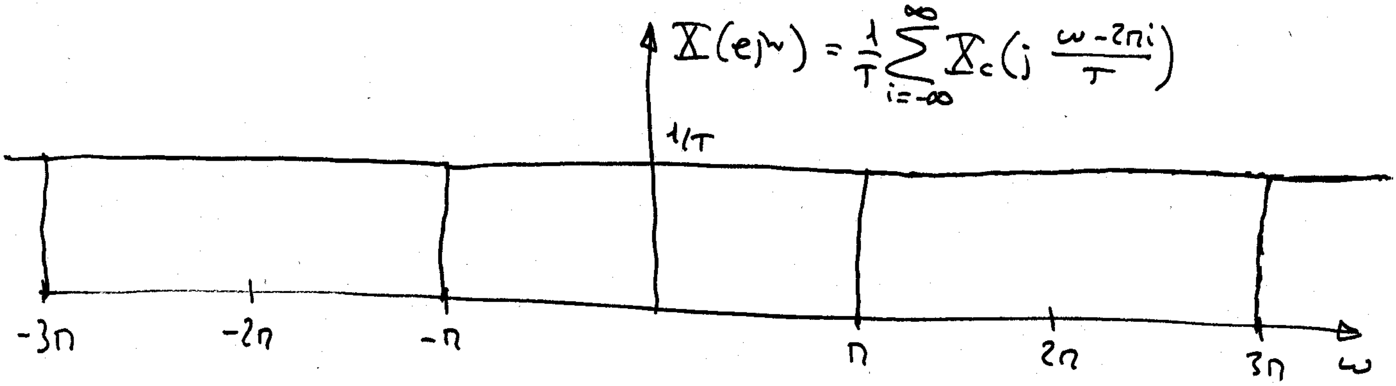


$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} T \cdot X(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Con todo esto pasamos a analizar los espectros de las señales del sistema 1.



Tras pasar por el C/D ideal obtenemos $x[n]$ y $X(e^{j\omega})$



$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}$ resulta ser una constante para todo ω

PROBLEMA 3 (3)

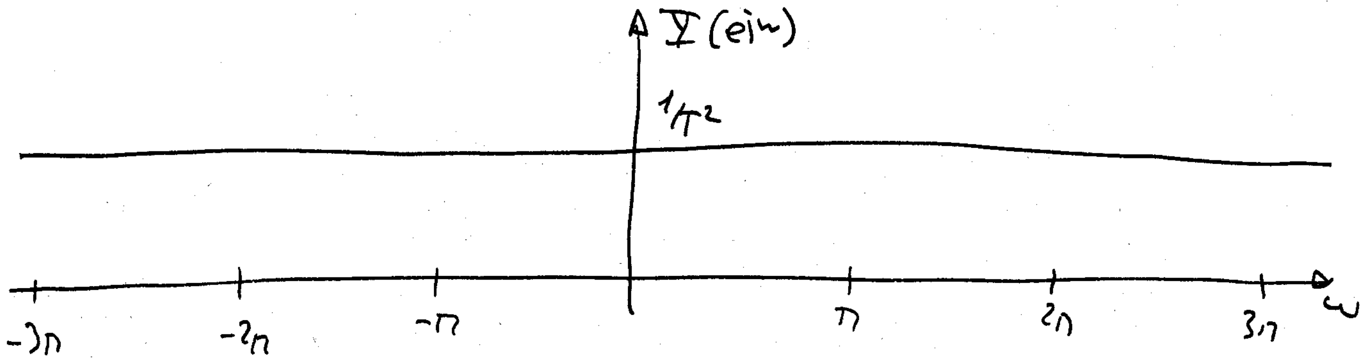
Para calcular la salida del módulo que eleva al cuadrado, y[n] aplicamos la propiedad de modulación:

$$(x[n])^2 = x[n]\cdot x[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, X(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{T}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{T^2} =$$

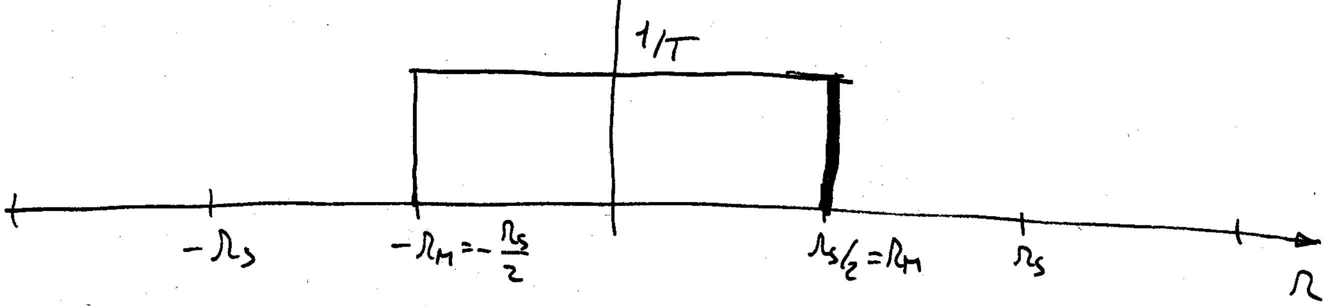
$$= \frac{1}{T^2}$$

Con lo cual $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T^2}$ es también constante en todo ω.



Finalmente, la señal $y_1(t)$ tiene un espectro

$$Y_1(j\Omega) = \begin{cases} T\cdot Y(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

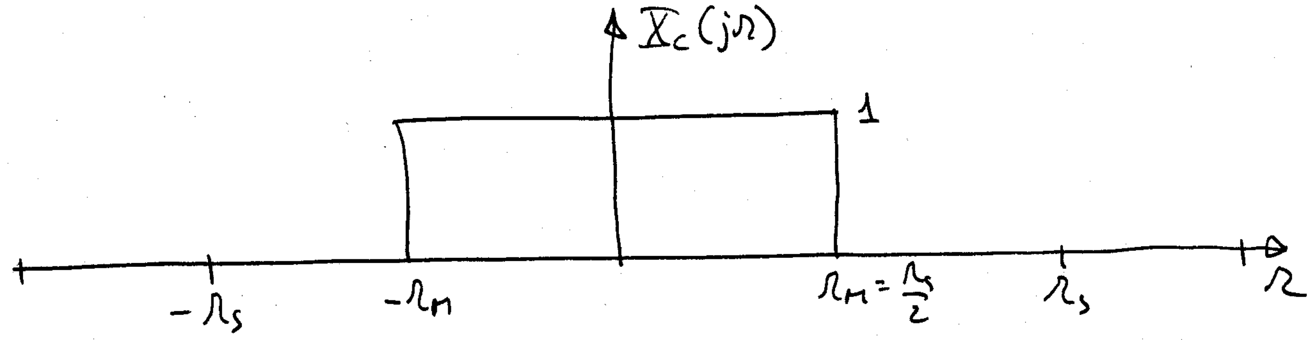


Con esto vemos que la relación entre $y_1(t)$ y $x_c(t)$ es muy sencilla: $\underline{y_1(t) = \frac{1}{T}\cdot x_c(t)}$

PROBLEMA 3 (4)

Pasamos ahora a analizar el sistema 2.

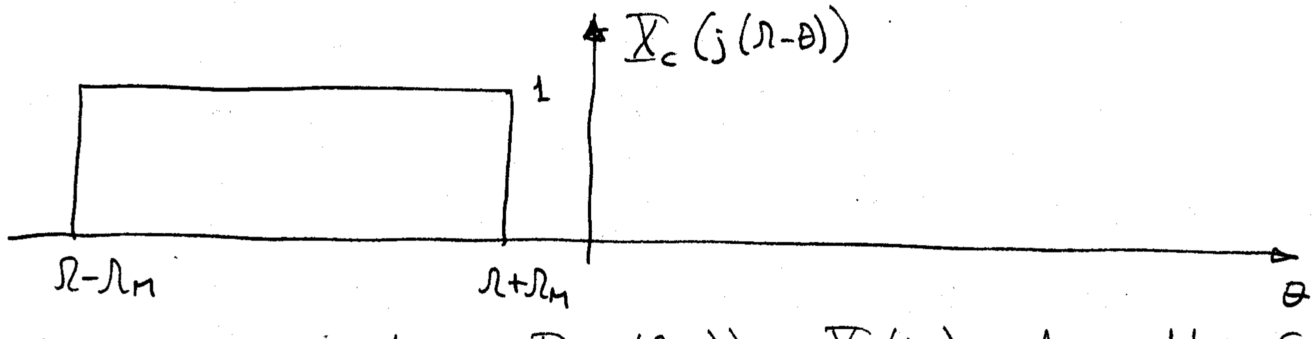
En este sistema la entrada $x_c(t)$ es idéntica



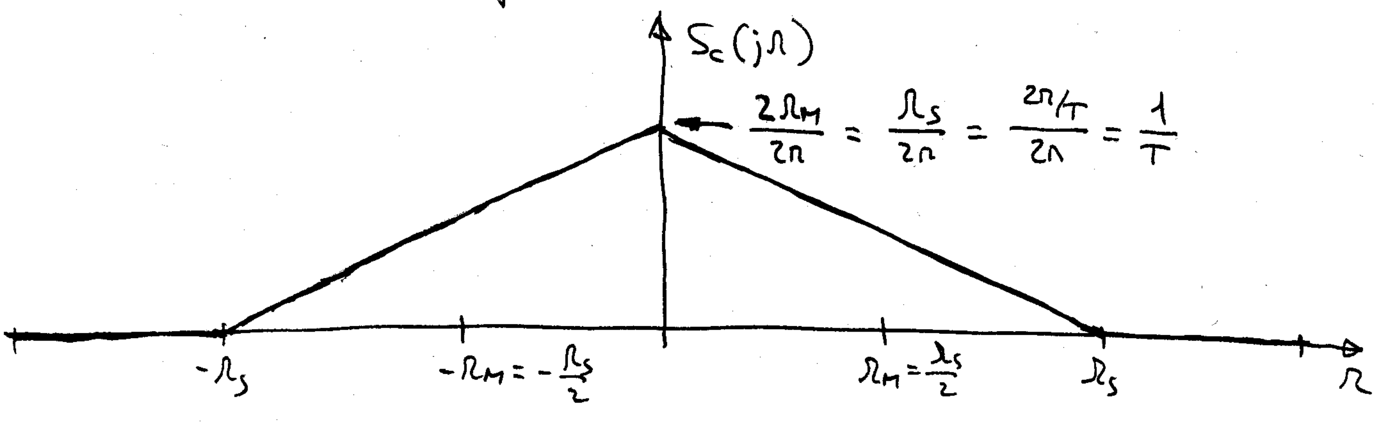
A esta entrada se le aplica directamente el módulo que eleva al cuadrado, así que lo primero que hay que aplicar es la propiedad de modulación

$$s_c(t) = x_c(t)\cdot x_c(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\theta)\, X_c(j(\Omega-\theta))\, d\theta = S_c(j\Omega)$$

Dibujamos $X_c(j(\Omega-\theta))$ para analizar cómo será la convolución en función de Ω.



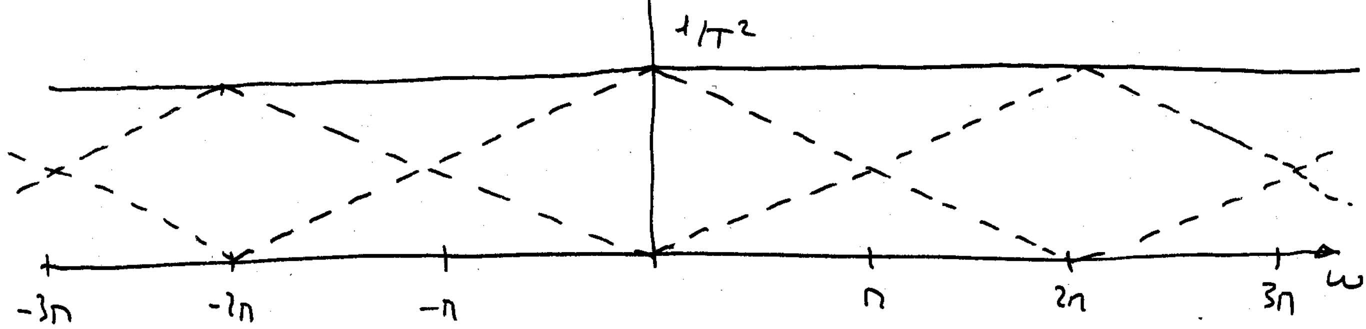
Viendo cómo se solapan $X_c(j(\Omega-\theta))$ y $X_c(j\theta)$ podemos dibujar $S_c(j\Omega)$



PROBLEMA 3 (5)

Ahora aplicamos la relación del C/D ideal para encontrar el espectro de s[n]

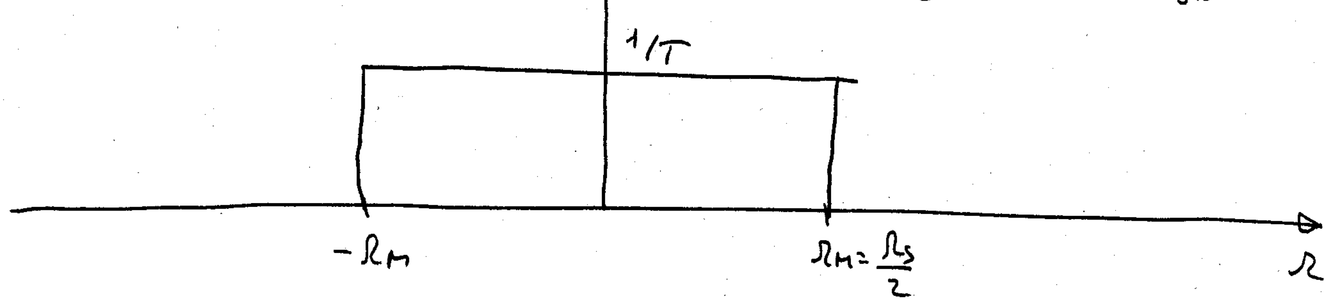
$$S(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} S_c\left(j\,\frac{\omega - 2\pi i}{T}\right)$$



El aliasing que se produce es tal que el resultado es una constante: $S(e^{j\omega}) = \frac{1}{T^2}$ para todo ω.

Finalmente, aplicando la relación del D/C ideal

$$Y_2(j\Omega) = \begin{cases} T \cdot S(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Con lo cual tenemos que la relación entre $y_2(t)$ y $x_c(t)$ es

$$y_2(t) = \frac{1}{T}\, x_c(t),$$

y que la relación entre $y_1(t)$ e $y_2(t)$ es

$$y_1(t) = y_2(t).$$