Examen Final Enero

Jueves, 15 de enero de 2015

Justifica todas las respuestas; escribe todos los cálculos en las hojas del examen

APELLIDOS: ______________________ NOMBRE: ______________

DNI: ______________________ GRUPO: ______________

Problema 1. (2,5 puntos) Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(0,5 puntos) (a) Sean $B_1 = \{v_1, v_2\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$, con $w_1 = v_1 - v_2$ y $w_2 = v_1 + 2v_2$. Entonces existe un vector $u \in \mathbb{R}^2$ **no nulo** que tiene las mismas coordenadas respecto a las dos bases.

FALSO

Sea $u \in \mathbb{R}^2$ con $[u]_{B_1} = (x,y)$ y $[u]_{B_2} = (x',y')$

Entonces:

$$u = xv_1 + yv_2 = x'w_1 + y'w_2 =$$
$$= x'(v_1 - v_2) + y'(v_1 + 2v_2) =$$
$$= (x'+y')v_1 + y'(2y'-x')v_2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x'+y' \\ y = -x'+2y' \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y la única solución si $x' = x$, e $y' = y$

es: la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + y = x \\ -x + 2y = y \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0,\ x = 0$$

(0,5 puntos) (b) Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen es la recta $\{x + y + z = 0, x - z = 0\}$.

VERDADERO

Sea $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ y definir $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a B es $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ya que $\mathrm{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle = \langle (1,-2,1) \rangle =$
$= \{(x,y,z) : x+y+z=0, x-z=0\}$

(0,5 puntos) (c) Sea $V = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ y sea $W_1 = \langle x + 1 \rangle$. Entonces existe un **único** subespacio vectorial $W_2 \subset V$ tal que $W_1 \oplus W_2 = V$.

FALSO

Por ejemplo: $W_2 = \langle 1, x^2 \rangle$ y $W_2' = \langle 1, x+x^2 \rangle$ son complementarios de W_1 y $W_2 \neq W_2'$.

Para comprobarlo basta fijar una base $B = \{1, x, x^2\}$ de V y observar que:

$[x+1]_B = (1,1,0)$ $[1]_B = (1,0,0)$ y $[x^2]_B = (0,0,1)$

Como $\mathrm{rgo} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rgo} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ los 3 vectores son l.i. y por Grassmann necesariamente $W_1 \oplus W_2 = V$.

Por otro lado

$[x + x^2]_B = (0,1,1)$ y $\mathrm{rgo} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rgo} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

luego $\{x+1, 1, x+x^2\}$ son l.i. y por Grassmann necesariamente $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ luego $W_1 \oplus W_2 = V$

(0,5 puntos) (d) Considera la aplicación lineal:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & 2A \end{array}$$

Entonces det $g = 2$.

FALSO

det g se puede calcular fijando una base, por. $B = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

y calculando $\det \underset{B}{M}(g)$.

$$\det \underset{B}{M}(g) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^4 \neq 2$$

(0,5 puntos) (e) Existe una aplicación lineal $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con polinomio característico $P_h(x) = (x-2)^2(x-1)^2$ y con polinomio mínimo $m_h(x) = (x-2)^2(x-1)$.

VERDADERO

Sea $B_{\mathbb{R}^4} = \{ e_1 = (1,0,0,0), \ldots, e_4 = (0,0,0,1) \}$

y sea $M_{B_{\mathbb{R}^4}}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_h(x) = (2-x)^2(1-x)^2$ luego $m_h(x) = $
- $(2-x)(1-x)$
- $(2-x)^2(1-x)$
- $(2-x)(1-x)^2$
- $(2-x)^2(1-x)^2$

$(h - 2Id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $(h - Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Como $(h-2Id)(h-Id) \neq \vec{0}$; y $(h-2Id)^2(h-Id) = \vec{0}$

necesariamente $m_h(x) = (x-2)^2(x-1)$

Problema 2. (2,5 puntos) Sea $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las matrices cuadradas de orden 2, y sean:

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{y} \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(0,5 puntos) (a) Calcula bases para W_1, W_2, y $W_1 + W_2$. Fijamos

· W_1 Como $\lambda\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda=0\\ \beta=0\end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B_{W_1}=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

· W_2 Como $\lambda\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda-\gamma=0\\ \alpha+2\gamma=0\\ \lambda+\gamma=0\\ \gamma=0\end{matrix}$

$\Rightarrow \lambda=\alpha=\gamma=0 \Rightarrow B_{W_2}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

· W_1+W_2 la ecuación $a\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ tiene asociada la matriz:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&-1\\-1&1&0&1&2\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Luego $B_{W_1+W_2}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

y $W_1 \subset W_2$.

(0,5 puntos) (b) Da ecuaciones para W_1 y para W_2.

Para W_1: $\alpha\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ tiene solución $\Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ t-y-x=0\end{cases}$

ya que
$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\-1&1&y\\0&0&z\\0&1&t\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y+x\\0&0&z\\0&0&t-y-x\end{array}\right)$$

Para W_2: $\alpha\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} \Leftrightarrow \{t+z-x-y=0$

ya que
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&x\\0&1&2&y\\1&1&0&z\\0&0&1&t\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&x\\0&1&2&y\\0&1&+1&z-x\\0&0&1&t\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&x\\0&1&2&y\\0&0&-1&z-x-y\\0&0&0&t+z-x-y\end{array}\right)$$

(0,5 puntos) (c) Calcula una base de $W_1 \cap W_2$ y comprueba que se cumple la fórmula de Grassmann para $W_1 + W_2$.

$W_1 \cap W_2 \; \{(x,y,z,t) : \begin{array}{l} z=0,\ t-y-x=0 \\ -z+t-y-x=0 \end{array} \} = W_1$; ya que $W_1 \subset W_2$.

$$\underbrace{\dim (\underbrace{W_1+W_2}_{W_2})}_{3} = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2) = 2 + 3 - 2$$

(0,5 puntos) (d) Calcula una base B de V/W_1.

$B = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$ ya que:

$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus W_1$

Es decir $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup B_{W_1}$

(0,5 puntos) (e) Da las coordenadas de $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \in V/W_1$ respecto a la base B del apartado (d).

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = 1\, \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} + 0\, \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \left[\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \right]_B = (1,0)$$

Problema 3. (4 puntos) Considera la aplicación lineal

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c,d) & \mapsto & (0,a,d,0). \end{array}$$

(0,5 puntos) (a) Sea $B = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$. Escribe la matriz de f respecto a la base B, $M_B(f)$.

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos) (b) Calcula el polinomio característico de f, $P_f(x)$, y los valores propios de f.

$P_f(x) = \det(M_B(f) - x) = x^4$

Valores propios de f: : 0

(0,5 puntos) (c) Calcula los vectores propios de f.

$\ker(f - 0I_4) = \left\{ (x,y,z,t) : \begin{matrix} x=0 \\ t=0 \end{matrix} \right\} =$

$= \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$

Luego: $\{\text{vectores propios de } f\} = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle \setminus \{\vec{0}\}$

es decir, todos los vectores <u>no</u> nulos de $\ker f$.

(0,5 puntos) (d) Calcula el polinomio mínimo de f, $m_f(x)$.

Como $P_f(x) = x^4$, $m_f(x) = x^n$, para algún $n \in \{1,2,3,4\}$.
Como $f \neq 0$ (ap. lineal 0), $m_f(x) \neq x$; como $f^2 = 0$
se tiene que $m_f(x) = x^2$

(1 punto) (e) Calcula una forma canónica de Jordan de f y una base asociada B'.

$$\begin{array}{ccc} \dim 2 & & \dim 4 \\ \ker f & \subsetneq & \ker f^2 \end{array}$$

Sean: $v_2, w_2 \in \ker f^2 \setminus \ker f$ l.i.

p.e.: $v_2 = (1,0,0,0)$, $w_2 = (0,0,0,1)$

y sean $v_1 = f(v_2) = (0,1,0,0)$
$w_1 = f(w_2) = (0,0,1,0)$

En la base $B' = \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos) (f) Calcula una base del subespacio imagen de f, una base del núcleo de f y comprueba que se cumple la fórmula de la dimensión para f que relaciona las dimensiones del núcleo de f y de su imagen.

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \rangle =$$
$$= \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$$
$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim \operatorname{Im} f} + \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim \operatorname{Ker} f} = \dim \mathbb{R}^4$$

(0,5 puntos) (g) Sea $B'' = \{\overset{v_1}{(1,1,0,0)}, \overset{v_2}{(0,0,1,1)}, \overset{v_3}{(1,0,1,0)}, \overset{v_4}{(0,0,0,1)}\}$ otra base de $\mathbb{R}^4$. Escribe la matriz de f respecto a las bases B'' y B, $M_{B''B}(f)$.

$$M_{B''B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[f(v_1)]_B \quad [f(v_2)]_B \quad [f(v_3)]_B \quad [f(v_4)]_B$$

Problema 4. (1 punto) Sea $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Considera la aplicación lineal:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p(x) & \mapsto & p(1), \end{array}$$

es decir, $\varphi(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_1 + a_2$. Sea $B = \{u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2\}$ una base de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$.

(0,5 puntos) (a) Escribe las coordenadas de φ respecto a la base $B^* = \{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$.

$$\varphi = \varphi(u_1)\, u_1^* + \varphi(u_2)\, u_2^* + \varphi(u_3)\, u_3^*$$

$$\varphi(u_1) = 1; \quad \varphi(u_2) = 1, \quad \varphi(u_3) = 1$$

$$\Rightarrow [\varphi]_{B^*} = (1,1,1) \text{ ie.}$$

$$\varphi = u_1^* + u_2^* + u_3^*$$

(0,5 puntos) (b) Da una base del anulador, F^0, del subespacio vectorial $F = \langle 1, x + x^2 \rangle \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$. Expresa los generadores de F^0 como combinaciones lineales de los elementos de la base B^*.

Sea $\phi \in F^0$, $\phi = a u_1^* + b u_2^* + c u_3^*$

Entonces $\phi(1) = 0 \Rightarrow$

$$(a u_1^* + b u_2^* + c u_3^*)(1) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

y $\phi(x + x^2) = 0 \Rightarrow$

$$(b u_2^* + c u_3^*)(x + x^2) = 0$$

$$\Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow b = -c$$

$\Rightarrow F^0 = \langle u_2^* - u_3^* \rangle$. ; $B_{F^0} = \{u_2^* - u_3^*\}$