

SOLUCIONES

P1.- (1 punto) Una bola de masa m se mueve con velocidad v en la dirección y sentido del eje $X > 0$. Choca frontalmente con otra bola de masa $2m$ que se mueve con velocidad $v/2$ en igual dirección y sentido opuesto. En la colisión se pierde un 20% de la energía. Determine:

- El vector momento lineal del sistema formado por ambas bolas tras la colisión.
- La velocidad (módulo, dirección y sentido) que adquiere cada bola después de la colisión.

Solución

a) El momento lineal del conjunto de las dos bolas se conserva en la colisión por lo que es el mismo que el de antes de la colisión. Por tanto,

$$\vec{P} = mv\vec{i} + 2m\frac{v}{2}(-\vec{i}) = \vec{0}$$

b) Al perderse el 20% de energía en la colisión, la energía final es el 80% de la inicial,

$$\begin{aligned} E_{c,f} = 0.8E_{c,i} &\Rightarrow \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}2mv''^2 = 0.8\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{v}{2}\right)^2\right) \\ \Rightarrow v'^2 + 2v''^2 &= 0.8\left(v^2 + \frac{v^2}{2}\right) = 0.8\frac{3}{2}v^2 = 1.2v^2 \end{aligned} \quad [1]$$

De la conservación del momento lineal se obtiene la relación entre las velocidades después del choque. Efectivamente, de $\vec{0} = m\vec{v}' + 2m\vec{v}'' \Rightarrow \vec{v}' = -2\vec{v}''$

Llevando esta relación a [1] se obtiene: $4v''^2 + 2v''^2 = 6v''^2 = 1.2v^2$

$$\Rightarrow \vec{v}'' = \sqrt{0.2}v\vec{i} \quad \text{y} \quad \vec{v}' = \sqrt{0.8}v(-\vec{i})$$

P2. (1.5 puntos) La energía potencial de una partícula de masa $m = 1 \text{ kg}$ es $U(x) = -\left(\frac{2}{x}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ (J)}$, con x expresado en metros. En la posición x_0 la partícula tiene la mínima energía mecánica E_m posible.

- Halle x_0 y E_m .

Si en la posición x_0 se le proporciona una velocidad v hacia el origen de coordenadas O , se acercará a éste hasta una mínima distancia x_m , donde invertirá su velocidad.

- Obtenga el mínimo valor posible de v para que la partícula acabe alejándose indefinidamente de O y la fuerza $\vec{F}$ que, en tal caso, actúa sobre ella a la distancia x_m .

Solución

- La partícula tiene la mínima energía mecánica E_m posible si está en la posición x_0 de mínima energía potencial U_m con energía cinética nula, esto es, quieta en la posición de equilibrio estable:

$$\frac{dU}{dx}(x_0) = \frac{2}{x_0^2} - \frac{2}{x_0^3} = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ m}$$

y

$$E_m = U_m = U(x_0) = -2 + 1 = -1 \text{ J}$$

- La energía potencial $U(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a cero y tiende a cero, desde valores negativos, cuando x tiende a infinito. Se deduce que la mínima energía mecánica

necesaria para que la partícula acabe alejándose indefinidamente de O es cero (así llegaría al infinito con energía cinética nula). Necesita, por tanto, una mínima energía cinética $E_{cm} = -U_m$ y una mínima velocidad

$$v_m = \sqrt{\frac{2E_{cm}}{m}} = \sqrt{\frac{-2U_m}{m}} = \sqrt{2} \text{ ms}^{-1}$$

En la posición x_m (punto de retorno) la velocidad y la energía cinética son nulas, por lo que la energía mecánica, que vale cero, es igual a la energía potencial:

$$U(x_m) = -\frac{2}{x_m} + \frac{1}{x_m^2} = 0 \Rightarrow x_m = (1/2) \text{ m}$$

La fuerza que actúa sobre la partícula en dicha posición es

$$\vec{F}(x_m) = -U'(x_m) \vec{i} = -\left(\frac{2}{x_m^2} - \frac{2}{x_m^3}\right) \vec{i} = 8 \vec{i} \text{ (N)}$$

P3. (1.5 puntos) Un satélite de masa m describe una órbita circular de radio r con periodo T alrededor de un planeta de radio R . Obtenga, en función de los parámetros dados, la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta y la energía mecánica del satélite.

Solución

La aceleración de la gravedad, o (intensidad del) campo gravitatorio, es la fuerza gravitatoria por unidad de masa y, por tanto, es una función de la distancia al centro del planeta. En la superficie, su módulo es $g_s = g(R) = \frac{GM}{R^2}$ y en la órbita circular es $g(r) = \frac{GM}{r^2}$. Luego,

$$g_s = \frac{r^2}{R^2} g(r)$$

Y la ecuación de movimiento (fuerza gravitatoria igual a masa por aceleración centrípeta) del satélite que describe la órbita circular nos permite, por una parte, expresar $g(r)$ en términos del radio r y el periodo T :

$$g(r) = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

por lo que

$$g_s = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 R^2}$$

y, por otra, obtener una relación entre sus energías potencial U y cinética E_c y su energía mecánica E :

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{GMm}{2r} = \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow -\frac{U}{2} = E_c \Rightarrow E = U + E_c = -E_c$$

$$E = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{2\pi^2 m r^2}{T^2}$$

P4. (1 punto) Dos planos infinitos y paralelos están cargados con $+\sigma$ y $-\sigma$ respectivamente, el primero situado en $y = 0$ y el segundo en $y = y_0$, por lo que pueden diferenciarse las tres regiones siguientes: izquierda del primer plano ($y < 0$), región central ($0 < y < y_0$) y derecha del segundo plano ($y > y_0$). Una carga q positiva se mueve desde un punto A a otro punto B que dista h de A. Deduzca razonadamente en cuál(es) de ellas pueden estar colocados los puntos A y B, y dibuje una posible disposición de los mismos, para que las siguientes afirmaciones sean ciertas. *Los puntos A y B a dibujar en cada situación pertenecen ambos a la misma región.*

- El trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar la carga q de A a B es cero.
- El trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar la carga q de A a B es no nulo y positivo.
- Siendo A y B puntos de la región central, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar la carga q de A a B es nulo.

Solución

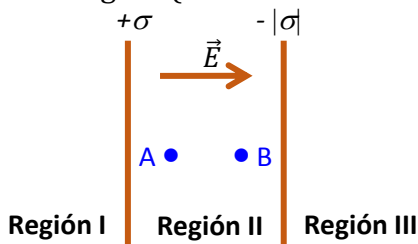
El campo debido a un plano infinito es perpendicular al mismo, dirigido desde (hacia) el plano si la densidad de carga σ es positiva (negativa) y uniforme a cada lado, cuyo módulo vale $|\vec{E}| = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$. Por tanto, el campo es nulo en las regiones $y < 0$ e $y > y_0$, mientras que entre los planos ($0 < y < y_0$) está dirigido hacia el plano negativo, $\vec{E} = |\vec{E}| \vec{j}$ (ver figura).

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar la carga q desde un punto A a otro B es:

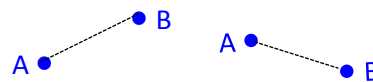
$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B dV = -q(V_B - V_A) = q(V_A - V_B)$$

Dado que las líneas de campo eléctrico se dirigen siempre hacia donde decrece el potencial V ($\vec{E} = -\vec{\nabla}V$), el trabajo será: nulo si A y B tienen igual potencial, y positivo si el potencial de A es mayor que el de B. Para las situaciones que plantea el problema,

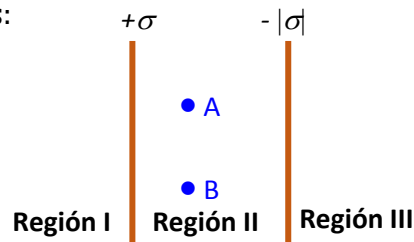
- A y B pueden estar en la región de campo nulo (Regiones I y III en la figura) y su disposición puede ser cualquiera, dado que en ambas regiones A y B tienen igual potencial. Por supuesto, la respuesta al apartado c) también lo es a este apartado a).
- Sólo es posible en la Región II, con el potencial de A mayor que el de B. Por tanto, una posible disposición es la de la figura (A a menor distancia que B del plano positivo):



Nótese que A y B también podrían tener las disposiciones siguientes:



- Es posible si A y B están a igual distancia de cualquiera de los planos (perteneciendo así a la misma superficie equipotencial). Una posible disposición es:



Nota 1. Al ser el campo uniforme, el trabajo puede expresarse también como:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{l} = q|\vec{E}|(y_B - y_A)$$

Razonando en este caso con la coordenada y de las posiciones de A y B, se llega a las mismas conclusiones que las dadas anteriormente en los apartados a), b) y c).

Nota 2. El alumno que necesite comprobar la conexión entre ambos planteamientos, no tiene más que encontrar la dependencia que tiene en este caso el potencial con la coordenada y . Efectivamente, puede comprobar que:

$$\text{Región I } (y < 0) \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{j}) + \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\vec{j} = 0 \quad \Rightarrow V(y) = k_1$$

$$\text{Región II } (0 < y < y_0) \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{j} + \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{j} \quad \Rightarrow V(y) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}y + k_2$$

$$\text{Región III } (y > y_0) \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{j}) + \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}(-\vec{j}) = 0 \quad \Rightarrow V(y) = k_3$$

P5. (1 punto) Una esfera de radio R está uniformemente cargada con densidad de carga ρ . Determine:

- el flujo de campo eléctrico que pasa a través de un cubo de lado $2R$ centrado en el centro de la esfera, y
- el campo eléctrico a una distancia $R/2$ del centro de la esfera.

Solución

a) Usando la ley de Gauss, el flujo de campo eléctrico a través del cubo de lado $2R$ vale $\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$.

La carga encerrada por el cubo es la contenida en la esfera cargada. La carga de la esfera, al ser ρ uniforme, vale: $Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$ por lo que *flujo del campo eléctrico* = $\frac{\rho}{3} \frac{4\pi R^3}{\varepsilon_0}$

b) Dado que el problema tiene simetría esférica, las líneas de campo eléctrico son radiales, es posible usar la ley de Gauss para determinar el módulo de campo eléctrico. Cogiendo como superficie gaussiana una esfera de radio $R/2$, concéntrica con la esfera de la distribución cargada, se obtiene:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

La carga encerrada por la superficie gaussiana es: $Q_{enc} = \rho \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3$ por lo que $\vec{E} = \frac{\rho R}{6\varepsilon_0} \vec{u}_r$

P6. (1 punto) Una esfera de radio R tiene una carga Q distribuida uniformemente en su superficie. Determine:

- la densidad superficial de carga, y
- el campo y potencial eléctricos a una distancia $r = R/3$ del centro de la esfera. Tome el origen de potenciales en el infinito.

Solución

a) La carga está uniformemente distribuida por lo que la densidad superficial de carga es:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

b) Como en el problema anterior, existe simetría esférica. Usando la ley de Gauss para una esfera de radio r en cada región, concéntrica con la esfera cargada, se obtiene:

$$r < R \Rightarrow \vec{E} = 0 \Rightarrow V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = k$$

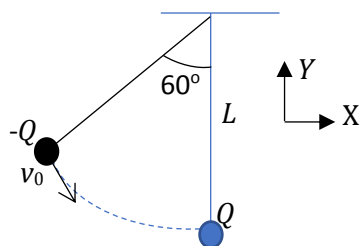
$$r > R \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \Rightarrow V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + k'$$

Tomando origen de potenciales en el infinito $\Rightarrow k' = 0$. Por otro lado, la continuidad de $V(r)$ en la frontera ($r = R$) lleva a $k = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

Por tanto, en $r = R/3$, $\vec{E} = \vec{0}$ y $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

P7. (1.5 puntos) Una pequeña esfera de masa m y carga Q es mantenida según la vertical de un hilo inextensible de longitud L . Otra pequeña esfera de igual masa y carga $-Q$, unida a otro hilo de igual longitud, tiene velocidad v_0 cuando el hilo forma 60° con la vertical (ver figura).

- Obtenga la fuerza eléctrica $\vec{F}$ (módulo y componentes) que Q ejerce sobre $-Q$ en la posición indicada en la figura.
- Determine la energía total de $-Q$ cuando se encuentra en la posición en la que el hilo forma 30° con la vertical.

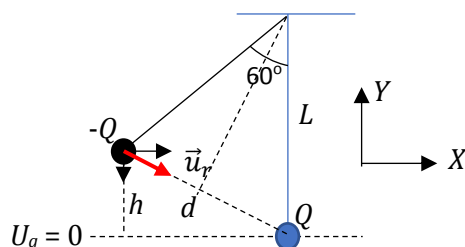


Tome el origen de energía potencial gravitatoria en el plano horizontal en el que se encuentra la carga Q y el de la electrostática en el infinito.

Solución

- a) Por la ley de Coulomb, $\vec{F} = -Q\vec{E} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_r$. La expresión del vector unitario (ver figura debajo) es: $\vec{u}_r = \cos 30^\circ \vec{u}_x + \sin 30^\circ (-\vec{u}_y)$. Por tanto, la expresión de la fuerza eléctrica que Q ejerce sobre $-Q$ es:

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} [\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ (-\vec{j})] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 L^2} [\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}]$$



- b) La tensión del hilo no realiza trabajo y las fuerzas gravitatoria y eléctrica son conservativas, por lo que la energía total de $-Q$ se conserva en su trayectoria. Las energías en las posiciones en las que el hilo forma con la vertical 30° y 60° respectivamente son iguales. Tomando origen de energía potencial gravitatoria en el plano horizontal de la posición de la carga Q y el origen de la energía potencial eléctrica en el infinito, la energía total de $-Q$ es:

$$E_{total} = E_c + U_g + U_{elec} = \frac{1}{2}mv_o^2 + mgh + \frac{(-Q)Q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

donde $h = L - L \cos 60^\circ = L(1 - 0.5) = 0.5L$ y d es el lado del triángulo equilátero formado, (todos los ángulos del triángulo son 60°), por lo que $d = L$

$$E_{total} = \frac{1}{2}mv_o^2 + mg0.5L - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L}$$

Nota. No se ha tenido en cuenta la fuerza gravitatoria entre ambas masas ya que sería despreciable frente a la gravitatoria terrestre y la electrostática.

P8. (1.5 puntos) Sean dos planos infinitos y paralelos, uno situado en $x = 0$ y cargado con densidad superficial $\sigma > 0$ y el otro en $x = x_0$ y cargado con una densidad σ' desconocida. Un electrón (carga $-e$) en la posición $x = x_0/2$ está sometido a una fuerza $\vec{F}_e$ y un protón (carga e) en la posición $x = 3x_0/2$ lo está a una fuerza $\vec{F}_p$. Sabiendo que $\vec{F}_e = 3\vec{F}_p$, halle:

- la densidad de carga desconocida σ' y
- la diferencia de potencial entre las posiciones de ambas partículas. ¿Cuál de ellas tiene mayor energía potencial?

Sugerencia: Tome el origen de potencial en $x = x_0$.

Solución

- La fuerza eléctrica sobre una partícula cargada es igual al producto de la carga por el campo eléctrico y este es la suma de los campos debidos a cada plano. Así,

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}\left(\frac{x_0}{2}\right) = -e\left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{2\epsilon_0}\right)\vec{l} \quad \text{y} \quad \vec{F}_p = e\vec{E}\left(\frac{3x_0}{2}\right) = e\left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma'}{2\epsilon_0}\right)\vec{l}$$

$$\vec{F}_e = 3\vec{F}_p \Rightarrow \sigma' - \sigma = 3(\sigma + \sigma') \Rightarrow \sigma' = -2\sigma$$

- La diferencia de potencial es igual a la circulación del campo eléctrico cambiada de signo. Puesto que el campo es diferente en las regiones $0 < x < x_0$ y $x > x_0$, siendo uniforme en cada una de ellas, tenemos que

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_e - \varphi_p = \varphi_{\frac{x_0}{2}} - \varphi_{x_0} - \left(\varphi_{\frac{3x_0}{2}} - \varphi_{x_0}\right)$$

$$\Delta\varphi = \left[-E_{(0 < x < x_0)}\left(\frac{x_0}{2} - x_0\right)\right] - \left[-E_{(x > x_0)}\left(\frac{3x_0}{2} - x_0\right)\right]$$

$$\Delta\varphi = \left[-\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}\left(-\frac{x_0}{2}\right)\right] - \left[-\left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)\left(\frac{x_0}{2}\right)\right] = \frac{3\sigma x_0}{4\epsilon_0} - \frac{\sigma x_0}{4\epsilon_0} = \frac{\sigma x_0}{2\epsilon_0}$$

La energía potencial es igual al producto de la carga por el potencial eléctrico. Como tanto el electrón como el protón están en posiciones de potencial positivo respecto a $x = x_0$, $(3\sigma x_0/4\epsilon_0)$ y $(\sigma x_0/4\epsilon_0)$ respectivamente, la energía potencial del primero es negativa y la del segundo es positiva, luego **el protón tiene mayor energía potencial**.

Datos generales para el examen: considere que la gravedad en la superficie de la Tierra, g_0 , y la permitividad eléctrica del vacío, ϵ_0 , son conocidas.