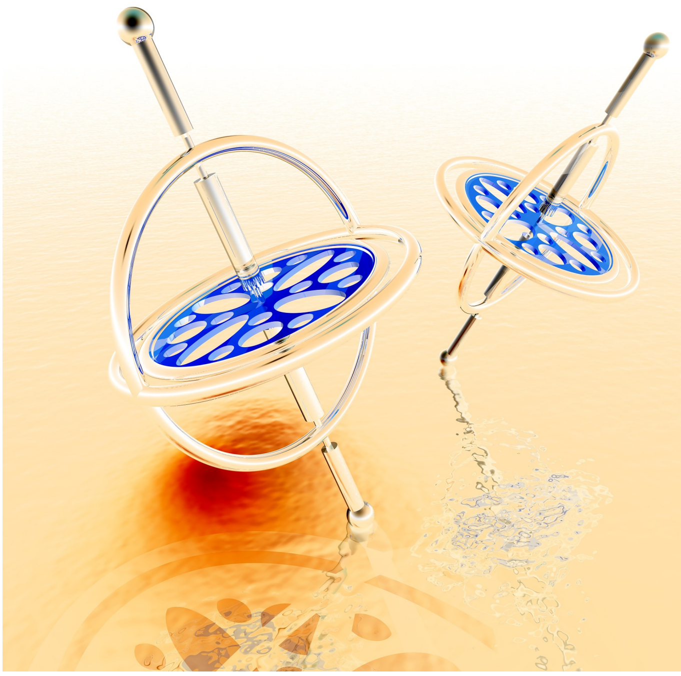
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

FÍSICA I

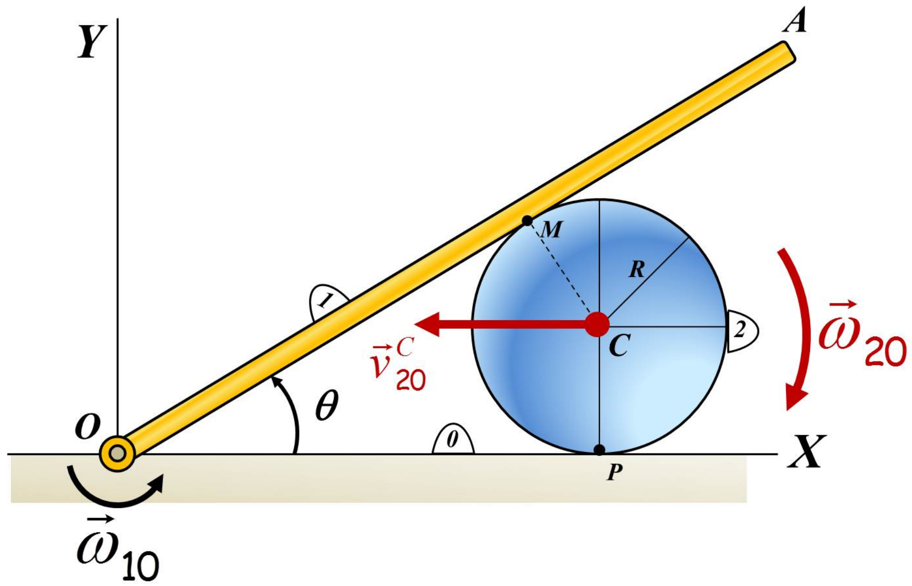
TEORÍA
Mecánica



Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



TEMA 7.- CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ

Pablo PALACIOS CLEMENTE

Santiago RAMÍREZ DE LA PISCINA MILLÁN

ÍNDICE CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

7 Cinemática del sólido rígido

7.1. Sólido rígido. Introducción

Desde el punto de vista de la mecánica, un sólido rígido es cualquier objeto formado por un conjunto de partículas materiales que mantienen invariable la distancia entre sí, independientemente del tiempo o de cualquier otro tipo de acciones (por ejemplo, la aplicación de cargas).

Es una idealización matemática, ya que en la realidad no existen cuerpos indeformables. Sin embargo, esta aproximación es aceptable cuando esas deformaciones son despreciables frente al movimiento global que se trata de estudiar. La elasticidad y la resistencia de materiales son las materias donde se estudian esas deformaciones locales (que pueden llegar a ser determinantes en problemas concretos). El estudio de la cinemática de los cuerpos rígidos facilitará el diseño de todo tipo de mecanismos.

7.2. Grados de libertad en el movimiento de un sólido rígido

Una vez definido el sólido rígido, para determinar su posición en función del tiempo, habrá que conocer la posición de cada una de las partículas materiales que lo componen. Para cada partícula material es necesario conocer tres coordenadas. ¿Significa esto que un sólido rígido tiene $3N$ grados de libertad, siendo N el número de partículas que forman el sólido? No, porque hay que tener en cuenta las ecuaciones de ligadura que supone el hecho de la invariabilidad de distancia entre puntos del sólido.

Supongamos el caso más general de un sólido rígido desplazándose libremente en el espacio (Fig. 7.1). Para determinar la posición de una partícula, por ejemplo la P_1, necesitamos tres coordenadas. Para determinar la posición de otra partícula P_2 necesitamos otras tres coordenadas, pero añadiremos una ecuación de ligadura (la distancia entre P_1 y P_2 es constante) con lo que tenemos 3×2-1=5 coordenadas independientes. Para considerar la partícula P_3 del sólido, no alineada con P_1 y P_2, añadimos tres coordenadas más y dos ecuaciones de ligadura (las distancias constantes desde P_3 a P_1 y a P_2) con lo que ahora tendremos 3×3-3=6 coordenadas independientes. Cualquier nueva partícula P_i que se añada proporciona tres coordenadas a considerar y tres ecuaciones de ligadura nuevas (sus distancias a las partículas P_1, P_2 y P_3 son constantes), con lo que no se añaden coordenadas independientes nuevas.

Esto quiere decir que un sólido rígido, aunque esté formado por un número muy grande de partículas, solo tiene **seis grados de libertad**. Veremos que este número se reduce cuando se establecen restricciones en el tipo de movimientos que pueda tener el sólido.

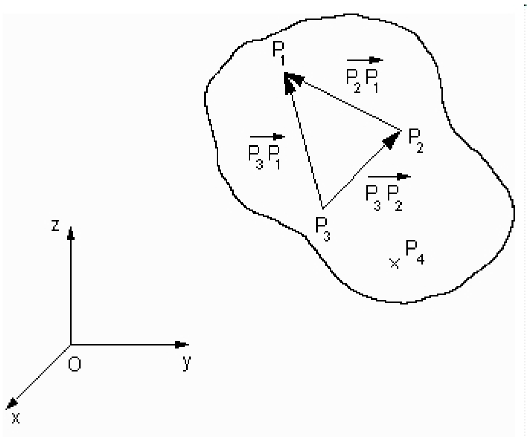


Figura 7.1: Distancia entre partículas en un sólido rígido.

Según esto el movimiento de un sólido rígido queda determinado cuando se conoce el de tres de sus puntos (no alineados, con el fin de que las tres ecuaciones de ligadura que aportan las invariabilidades de las distancias relativas sean linealmente independientes y no haya una que sea combinación lineal de las otras dos) y este movimiento se conoce a partir de seis ecuaciones (seis grados de libertad).

Este procedimiento de determinar el movimiento de tres puntos no es el que se utiliza habitualmente. Lo que se suele hacer es aprovechar los conceptos asimilados en movimiento relativo y particularizarlos aquí, ligando solidariamente al sólido rígido un sistema de referencia y estudiando el movimiento del origen O' de ese sistema $[\vec{r}_{O'}(t),\ \vec{v}_{O'}(t),\ \vec{a}_{O'}(t)]$ y el giro del sistema de referencia (que será también el del sólido rígido) $[\vec{\omega}(t),\ \vec{\alpha}(t)]$ con respecto a un sistema de referencia fijo.

Es decir, trataremos de determinar el movimiento de cualquier punto del sólido rígido a partir de conocer el movimiento de un sistema de referencia ligado al sólido y, para ello, particularizaremos las expresiones del movimiento relativo para el caso de puntos fijos a ese sistema de referencia móvil.

7.3. Campo de velocidades de un sólido rígido. Velocidad de deslizamiento

7.3.1. Campo de velocidades de un sólido rígido

Llamamos S al sistema de referencia con respecto al cual vamos a estudiar el movimiento del sólido rígido (este sistema de referencia coincide con el sistema de referencia "fijo" que se ha utilizado del apartado 3.1 al 3.4). Ligamos solidariamente al sólido rígido un sistema *S'*, de forma que el origen *O'* del sistema de referencia coincida en todo instante con un punto Q del sólido rígido y los ejes *X'Y'Z'* mantengan constantes sus direcciones con respecto al sólido. Es decir, "pegamos" el sistema de referencia al sólido rígido (este sistema de referencia es el que se ha llamado "móvil" en los apartados ya mencionados).

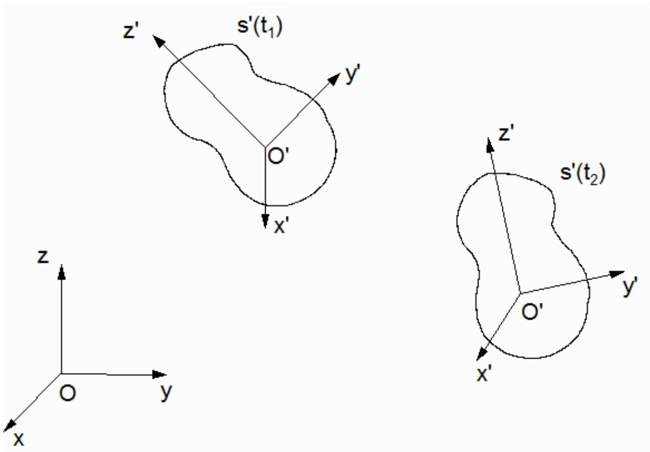


Figura 7.2: Sistema *S'* ligado al sólido en dos instantes de su movimiento.

En la Fig. 7.2 pueden observarse el sistema S y dos posiciones cualesquiera del sistema *S'* ligado al sólido. Se trata de determinar la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo de un punto P cualquiera del sólido con respecto al sistema de referencia S. Obsérvese que la posición del punto P con respecto al sistema de referencia *S'* está perfectamente determinada si se conoce la geometría del sólido y que, además, de la forma en que está definido el sistema de referencia *S'*, esta posición no depende del tiempo.

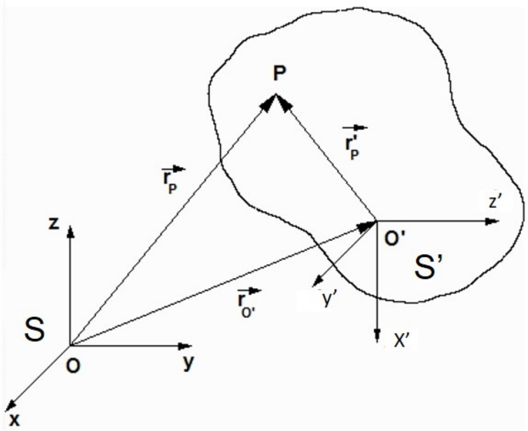


Figura 7.3: Sistemas fijo y ligado al sólido y posición de un punto P de éste en ambos.

Particularizamos entonces la expresión [3.21] para el caso $\vec{r}\,'_P = \overrightarrow{cte}$ (Fig. 7.3) en el sistema de referencia *S'*. Esto significa que su derivada en ese sistema es nula y a esa derivada es a lo que se había denominado velocidad relativa. Es decir, lo que se está haciendo es particularizar [3.21] para el caso de "puntos fijos al sistema de referencia móvil":

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'_P \qquad (7.1)$$

donde *O'* es un punto arbitrario del sólido y $\vec{v}_{O'}$ su velocidad medida por un observador en S, $\vec{\omega}$ es el vector que nos indica la velocidad angular de rotación del sistema de referencia *S'* con respecto al S (proporciona la velocidad angular instantánea de rotación del sólido alrededor de un eje cuya dirección coincide con la de $\vec{\omega}$ y que pasa por *O'* en cada instante) y $\vec{r}'_P$ es el vector posición relativa del punto P con respecto a *O'*, $\overrightarrow{O'P}$, que es constante en módulo, dirección y sentido en el sistema de referencia ligado al sólido *S'*, pero que solo es constante en módulo en el sistema de referencia "fijo" S.

La expresión [7.1] o su forma más habitual

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \overrightarrow{QP} \tag{7.2}$$

donde como ya hemos dicho P y Q son dos puntos cualesquiera del sólido (y en este caso es Q el origen del sistema de referencia *S'*) se denomina campo de velocidades del sólido rígido y proporciona la velocidad de cualquier punto P del sólido conocida la de otro punto Q y el valor de la rotación instantánea $\vec{\omega}$ alrededor de un eje que pase por Q.

¿Qué ocurre si cambiamos de sistema de referencia, eligiendo otro sistema *S"* con origen en un punto distinto *O"* del sólido rígido? ¿Cambiará el vector velocidad angular?

La velocidad del punto P vendrá dada por la ec. [7.2], suponiendo que el nuevo sistema ligado al sólido se mueve con el sólido de forma que su origen se traslada con $\vec{v}_{O''}$ y que sus ejes giran con $\vec{\Omega}$ respecto al mismo sistema de referencia fijo S, esto es,

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O''} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O''P}$$

Podemos sustituir $\vec{v}_{O''}$ por su expresión en función de $\vec{v}_{O'}$, ya que *O"* es un punto del sólido,

$$\vec{v}_{O''} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'O''}$$

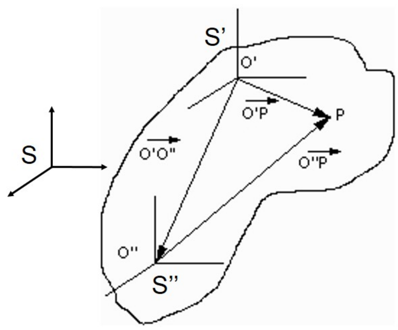


Figura 7.4: Dos sistemas ligados al sólido y posición de un punto P de éste en ambos.

Entonces, de acuerdo a las relaciones geométricas (véase Fig. 7.4) se verifica:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'O''} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O''P} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{O''P} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O''P}$$

lo que implica que

$$(\vec{\omega} - \vec{\Omega}) \times \overrightarrow{O''P} = 0$$

y como $\overrightarrow{O''P}$ es arbitrario, $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$.

Como era de esperar, el giro de los ejes móviles ligados al sólido rígido es independiente del punto del sólido que elijamos como origen del sistema de referencia ligado a éste.

7.3.2. Velocidad de deslizamiento

Llamaremos velocidad de deslizamiento de un sólido rígido a la componente de la velocidad de un punto cualquiera del sólido en la dirección del vector rotación instantánea.

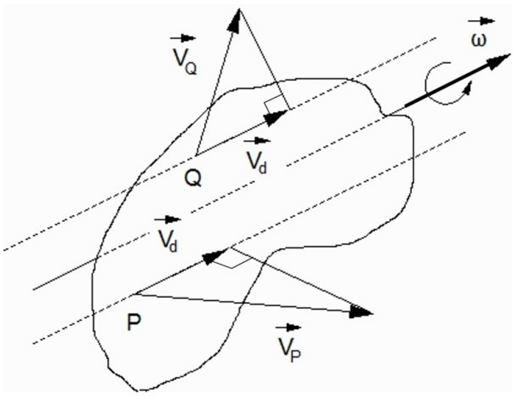


Figura 7.5: Proyección de la velocidad de dos puntos del sólido en la dirección de la velocidad angular.

Multiplicamos escalarmente la expresión [7.2] por el vector unitario $\vec{u}$ asociado al vector $\vec{\omega}$ y así obtendremos el valor escalar de la velocidad deslizamiento:

$$\vec{v}_P \cdot \vec{u} = \vec{v}_Q \cdot \vec{u} + (\vec{\omega} \times \overrightarrow{QP}) \cdot \vec{u}$$

Al ser $\vec{u}$ paralelo a $\vec{\omega}$, el producto mixto $(\vec{\omega} \times \overrightarrow{QP}) \cdot \vec{u}$ es nulo y,

$$\vec{v}_P \cdot \vec{u} = \vec{v}_Q \cdot \vec{u} = v_d$$

que, como se puede comprobar, no depende del punto del sólido que estemos considerando y es, por tanto, una característica del movimiento. El vector velocidad de deslizamiento será,

$$\vec{v}_d = (\vec{v}_P \cdot \vec{u})\, \vec{u} = v_d \vec{u} = v_d \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \tag{7.3}$$

7.4. Condición cinemática de rigidez

Un sólido se caracteriza por ser un sistema de partículas tal que la distancia entre cada par de ellas, digamos la P y la Q, permanece constante en cada momento, independientemente de cuál sea su movimiento:

$$|\vec{r}_P - \vec{r}_Q| = cte \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)\cdot(\vec{r}_P - \vec{r}_Q) = cte$$

Esta ecuación implica una relación entre las velocidades posibles de dichas partículas. En efecto, si derivamos con respecto al tiempo la expresión anterior, se obtiene una relación entre las velocidades:

$$2(\vec{v}_P - \vec{v}_Q)\cdot(\vec{r}_P - \vec{r}_Q) = 0$$

Dividiendo por $|(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)|$ queda:

$$(\vec{v}_P - \vec{v}_Q)\cdot\vec{u}_{QP} = 0$$

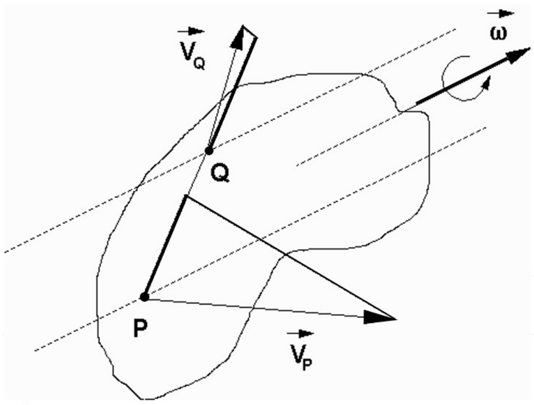


Figura 7.6: Proyección de la velocidad de dos puntos P y Q del sólido a lo largo de la recta que une dichos puntos.

Esta es la llamada **condición cinemática de rigidez** del sólido que se verifica para cualquier par de puntos: Dados dos puntos P y Q cualesquiera del sólido, la proyección de sus respectivas velocidades sobre la recta que les une es la misma (Fig. 7.6). En este sentido se dice que el campo de velocidades de un sólido es *equiproyectivo*. El que las dos proyecciones sean iguales quiere decir que la componente de ambas velocidades en esa dirección es la misma; las dos partículas avanzan o retroceden a lo largo de esa línea en igual medida, manteniendo su distancia relativa.

7.5. Campo de aceleraciones de un sólido rígido

Utilizando los mismos sistemas de referencia que en el apartado 7.3, particularizamos la expresión [4.26] para el mismo supuesto anterior ($\vec{r}'_P = \overrightarrow{cte}$ en S'). En estas condiciones serán cero tanto $\vec{v}'_P$ como $\vec{a}'_P$:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}'_P + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_P) \tag{7.4}$$

Esta expresión nos proporciona la aceleración de un punto P del sólido con respecto a un sistema de referencia "fijo" S conocidas la de otro punto O' y la velocidad y aceleración angulares instantáneas de rotación del sistema de referencia "móvil" (que son las del sólido) con respecto al "fijo".

También la expresión [7.4] es usual encontrarla escrita llamando Q a O' y $\overrightarrow{QP}$ a $\vec{r}'_P$ (vector de posición del punto del sólido en el sistema S'):

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{QP}) \tag{7.5}$$

Recordando los conceptos vistos en cinemática de la partícula (en particular los relativos a giro de una partícula alrededor de un eje fijo) y adelantando acontecimientos, podemos observar que tanto la expresión [7.2] como la [7.5] de la velocidad y aceleración del punto P responden a la superposición de dos movimientos: uno de traslación del punto Q y otro de rotación del punto P alrededor de un eje paralelo a $\vec{\omega}$ y que pasa por Q (rotación instantánea, considerando el eje definido por $\vec{\omega}$ instantáneamente fijo). Un instante después el eje que define esa rotación, en general, se habrá desplazado (junto con el punto Q) y habrá cambiado su dirección.

Haremos aplicación de todo esto al movimiento general de un sólido rígido, estudiando previamente un tipo de movimiento más sencillo, el movimiento plano.

7.6. Movimiento plano de un sólido rígido

Diremos que un sólido rígido efectúa un movimiento plano cuando cada una de las partículas materiales que lo componen sigue una trayectoria plana. Es decir, las trayectorias de cada uno de los puntos del sólido están contenidas en planos paralelos a un plano fijo.

En este caso los seis grados de libertad quedan reducidos a tres al existir tres nuevas ecuaciones de ligadura. Si nos fijamos en el sistema de referencia S', lo que ocurre es que la trayectoria de su origen O' es plana (2 grados de libertad) y el vector rotación instantánea solo puede ser perpendicular al plano que define el movimiento (1 grado de libertad).

Hay dos casos de movimiento plano muy sencillos: movimiento de traslación y movimiento de rotación alrededor de un eje fijo.

7.6.1. Movimiento de traslación

Diremos que un sólido rígido está animado de un movimiento de traslación cuando cualquier segmento AB que une dos puntos del sólido permanece, durante todo el movimiento, paralelo a su dirección original.

Si nos fijamos en el sistema de referencia ligado al sólido (S'), éste debe simplemente trasladarse sin girar ($\vec{\omega} = 0$ y su derivada respecto al tiempo también es nula). Es decir, los ejes del sistema móvil S' deben mantener sus direcciones constantes para un observador situado en el sistema fijo S.

Si las trayectorias de las partículas del sólido rígido son líneas rectas (Fig. 7.7) diremos que el movimiento plano es una traslación rectilínea. En este caso el número de grados de libertad ha quedado reducido a uno. La traslación del origen del sistema móvil *S'* es rectilínea (1 grado de libertad) y no existe rotación.

Si las trayectorias de las partículas del sólido rígido son líneas curvas planas diremos que el movimiento es una traslación curvilínea plana. El número de grados de libertad para un sólido rígido en movimiento de traslación curvilínea plana es dos. El origen del sistema *S'* describe una curva plana (2 grados de libertad) y no existe rotación.

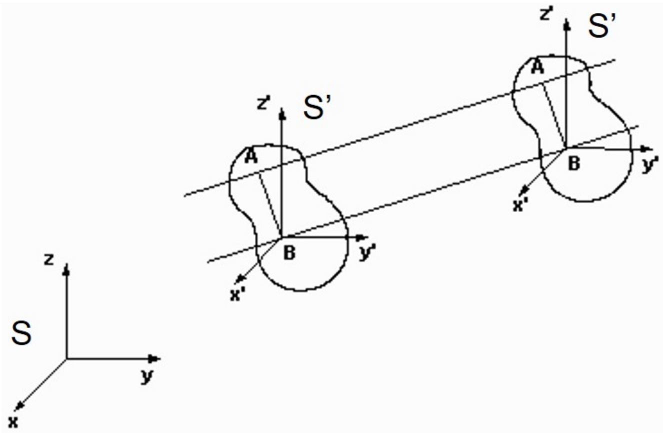


Figura 7.7: Movimiento plano de traslación rectilínea.

Obsérvese que en ambos casos el segmento AB (o los ejes x',y',z') (Fig. 7.7) mantienen su dirección constante con respecto al sistema de referencia S.

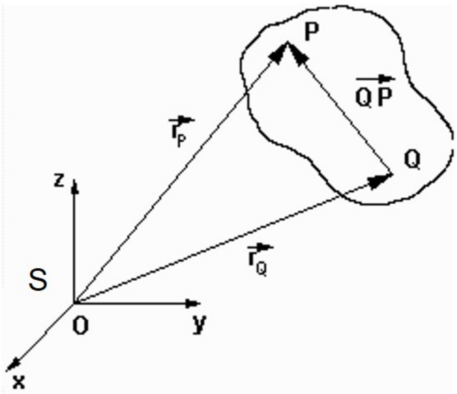


Figura 7.8: Variables usadas en un movimiento de traslación plana.

Existe también el movimiento de traslación curvilínea espacial (que ya no es un movimiento plano) en el cual, aun manteniéndose la condición de movimiento de traslación (es decir, los ejes ligados al sólido mantienen sus direcciones constantes con respecto al sistema de referencia fijo), las trayectorias de los puntos del sólido son curvas alabeadas. En este caso el número de grados de libertad del sólido rígido es tres, ya que el origen sigue una trayectoria curvilínea alabeada (3 grados de libertad) y no existe rotación.

Para encontrar el campo de velocidades de un sólido rígido en movimiento de traslación (Fig. 7.8) basta con derivar la relación vectorial $\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \overrightarrow{QP}$ y recordar que $\overrightarrow{QP}$ es un vector constante no solo en módulo (condición de sólido rígido) sino también en dirección (condición de movimiento de traslación). Al hacer esto queda:

$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_Q}{dt} + \frac{\overrightarrow{QP}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q \tag{7.6}$$

En un sólido rígido en movimiento de traslación todos sus puntos tienen la misma velocidad instantánea. Esta velocidad única para todo el sólido es una característica de este tipo de movimientos y se conoce con el nombre de **velocidad de traslación del sólido**.

Si derivamos otra vez la expresión [7.6], queda

$$\frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_Q}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_P = \vec{a}_Q \tag{7.7}$$

En un sólido rígido en movimiento de traslación, todos sus puntos tienen la misma aceleración instantánea. Esta aceleración única para todo el sólido también es una característica de este tipo de movimientos y se denomina **aceleración de traslación del sólido**.

A estas mismas expresiones [7.6] y [7.7] podíamos haber llegado también imponiendo las condiciones particulares de estos movimientos a las ecs. [7.2] y [7.5]. Como ya se dijo al comienzo de este apartado, un movimiento de traslación se caracteriza por el hecho de que el vector $\vec{\omega}$ y su derivada son nulos.

7.6.2. Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

Diremos que un sólido rígido está animado de un movimiento de rotación con respecto a un sistema de referencia determinado cuando dos de sus puntos permanecen fijos en ese sistema.

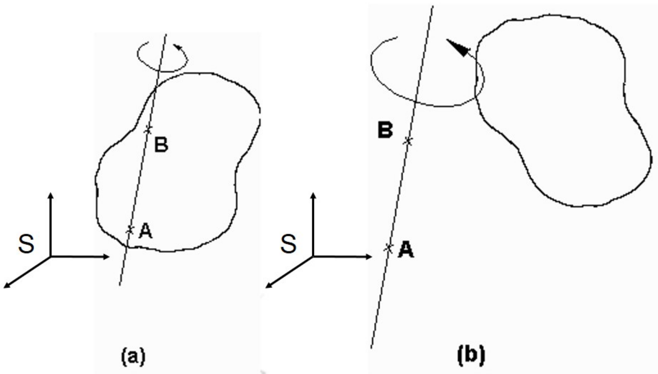


Figura 7.9: Movimiento plano de rotación alrededor de un eje fijo.

Por la propia definición de sólido rígido, si la posición de dos de sus puntos no depende del tiempo (tienen velocidades y aceleraciones nulas) debe ocurrir lo mismo con todos los puntos del sólido contenidos en la recta que los une. Esta recta se denomina **eje de rotación** (Fig. 7.9(a)) y puede no pertenecer físicamente al sólido (Fig. 7.9(b)) si consideramos como parte de éste el espacio geométrico que le rodea con lo cual sería solidario a él.

Suponemos que son A y B los puntos fijos del sólido que definen el eje de rotación (Fig. 7.10). Nos fijamos en un punto P del sólido que no pertenezca al eje. Su distancia a un punto cualquiera de ese eje debe permanecer constante. Su única posibilidad de movimiento es entonces describir una circunferencia contenida en un plano perpendicular a la dirección del eje. Todos los puntos del sólido (excepto los que pertenecen al eje de rotación que están fijos) se mueven describiendo circunferencias contenidas en planos paralelos que son perpendiculares al eje de rotación.

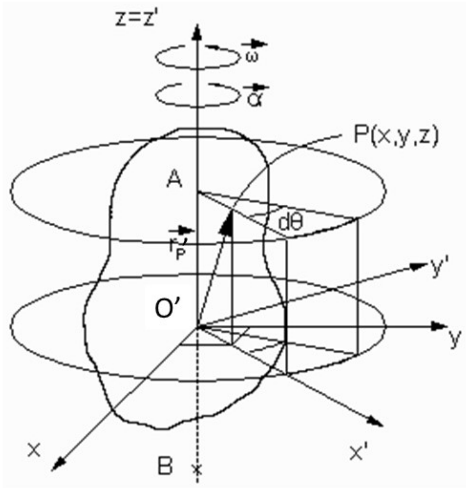


Figura 7.10: Ángulo girado por un sólido respecto a un eje fijo.

El número de grados de libertad de un sólido que se mueve en estas condiciones es uno, al haber fijado la posición de dos puntos. Esto significa que basta con una coordenada para definir la posición del sólido.

Podemos tratar cada punto P del sólido como una única partícula material que se mueve con un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, y aplicar todas las conclusiones a las que se llegaron en el apartado 2.7.2.

Tanto la velocidad $\vec{\omega}$ como la aceleración $\vec{\alpha}$ angulares de rotación definidas en ese apartado serán entonces las mismas para todos los puntos del sólido y son características de este tipo de movimientos.

Particularizando para este caso las expresiones [2.52] y [2.56], se tiene

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{QP} \tag{7.8}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{QP} + \vec{\omega} \times \vec{v}_P = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{QP}) \tag{7.9}$$

Analicemos el movimiento con los sistemas de referencia S y S'. Elegimos como sistema de referencia S' uno en el cual la dirección de uno de sus ejes (*O'Z'*, por ejemplo) coincida con la del eje de rotación del sólido, el origen *O'* debe estar en un punto Q de ese eje, y los ejes *X'*,*Y'* pueden ser dos cualesquiera formando un triedro a derechas (Fig. 7.10). Eso significa que tanto $\vec{v}_{O'}$ como $\vec{a}_{O'}$ son nulas. Así, las expresiones [7.2] y [7.5] quedan:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{QP} \tag{7.10}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{QP}) \tag{7.11}$$

que, como era de esperar, coinciden con las [7.8] y [7.9].

7.6.3. Movimiento plano general

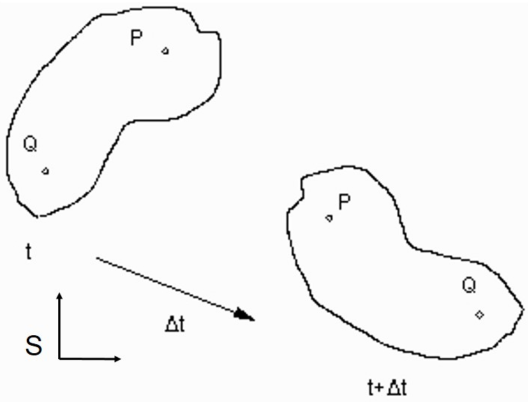


Figura 7.11: Movimiento plano general de un sólido.

Como su nombre indica es un movimiento plano en el que no se cumplen ninguna de las características restrictivas de los apartados 7.6.1 y 7.6.2. Estudiaremos este movimiento a partir del de una sección representativa del sólido llamada sección central (intersección del sólido con el plano del movimiento, plano paralelo al movimiento de las partículas del sólido que contiene al centro de masas). Suponemos dos posiciones sucesivas de esa sección (entre las que ha transcurrido un tiempo Δt) como las mostradas en la Fig. 7.11.

Se trata de describir cómo ha ocurrido el movimiento (Fig. 7.12). Nos fijamos en un punto Q del sólido. Suponemos que todo el sólido sigue un movimiento de traslación idéntico al necesario para llevar el punto Q de su posición inicial a su posición final. Es decir, manteniendo constante la dirección de la recta QP, movemos el sólido un $\Delta\vec{r}_Q$. Ahora para que todos los puntos del sólido (y no solo el punto Q) ocupen su posición final, hacemos que todo el sólido gire un ángulo $\Delta\phi$ alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pase por Q.

Hemos descompuesto el movimiento plano general en un movimiento de traslación más un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo. Este no tiene por qué ser el movimiento "real" del sólido. En primer lugar se ha considerado que la traslación y la rotación son sucesivas cuando, en la realidad son simultáneas. El movimiento real es una superposición de traslación y rotación instantáneas.

Si hacemos que el tiempo transcurrido (Δt) entre las dos posiciones de la Fig. 7.12 sea cada vez más pequeño, se tiene

$$\Delta t \rightarrow \begin{cases} \Delta t \equiv dt \\ \Delta \vec{r}_Q \equiv d\vec{r}_Q \\ \Delta \phi \equiv d\phi \end{cases}$$

y tendremos una traslación infinitesimal ($d\vec{r}_Q$) de todo el sólido y una rotación infinitesimal ($d\phi$) alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por Q.

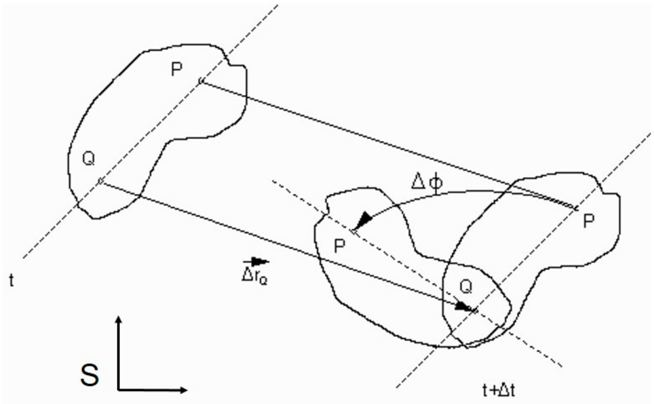


Figura 7.12: Descripción del movimiento entre dos posiciones sucesivas en el movimiento plano general.

Se define la velocidad instantánea de traslación del sólido $\vec{v}_Q$ como

$$\vec{v}_Q = \frac{d\vec{r}_Q}{dt}$$

y la velocidad angular instantánea de rotación del sólido como

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt}\vec{u}$$

siendo $\vec{u}$ el unitario perpendicular al plano del movimiento. Hay que hacer notar que la velocidad instantánea de traslación del sólido es la del punto Q (depende entonces del punto que elijamos). ¿Ocurre lo mismo con $\vec{\omega}$?

Elijamos otro punto P distinto de Q para explicar el movimiento de la Fig. 7.11 (véase Fig. 7.13). Observamos que $\Delta\vec{r}_Q$ (Fig. 7.12) no coincide con $\Delta\vec{r}_P$ (Fig. 7.13), pero que $\Delta\phi$=$\Delta\psi$. Así, es fácil comprobar que la velocidad instantánea de traslación no es una característica del movimiento porque depende del punto elegido, mientras que el vector velocidad angular de rotación instantánea sí es el mismo, aunque está aplicado en puntos distintos ($\vec{\omega}$ es un vector libre, como ya sabíamos del apartado 7.3.1).

Todo lo dicho se puede resumir en el denominado teorema de Chasles para el movimiento plano de sólidos rígidos (que, como veremos más adelante, es también aplicable al movimiento general espacial):

"El movimiento plano general de un sólido rígido entre dos posiciones cualesquiera se puede conseguir mediante una traslación y una rotación. La traslación depende del punto que se elija para realizarla, pero la rotación no".

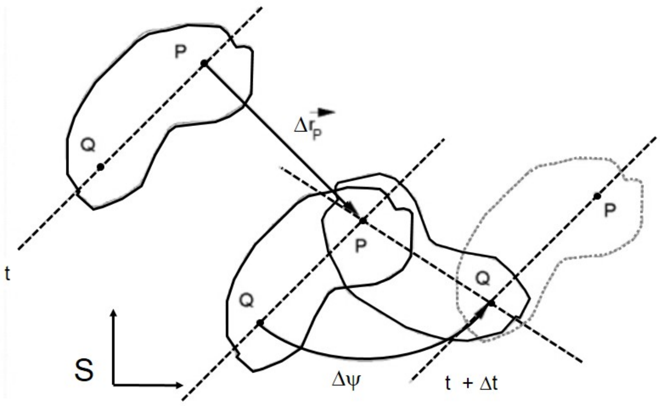


Figura 7.13: Descripción del movimiento entre dos posiciones sucesivas en el movimiento plano general.

Si las posiciones inicial y final están infinitamente próximas, entonces el movimiento instantáneo es una superposición de una traslación y una rotación infinitesimales.

7.7. Movimiento de un sólido con un punto fijo

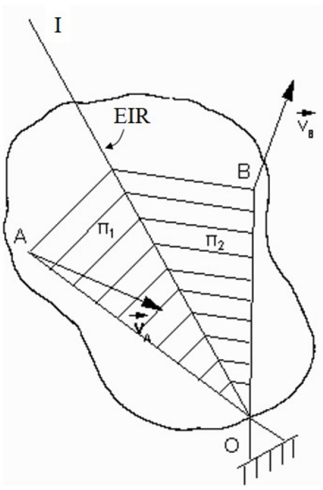


Figura 7.14: Movimiento del sólido con punto fijo.

Como el propio nombre del apartado indica, se trata de describir el movimiento de un sólido rígido que tiene uno de sus puntos fijo en un determinado sistema de referencia.

El número de grados de libertad de un sólido rígido que describe un movimiento de este tipo es tres, ya que hemos fijado la posición de uno de sus puntos. En términos del sistema de referencia ligado al sólido, y suponiendo su origen en el punto fijo, no existirá traslación del origen, pero sí rotación de los ejes (3 grados de libertad).

Elegimos un punto A del sólido con velocidad no nula (Fig. 7.14). El punto O del sólido está fijo (tiene velocidad y aceleración nulas). La velocidad de A, $\vec{v}_A$, tendrá dirección perpendicular a la recta que pasa por O y por A ya que su proyección en esa dirección debe ser nula (la proyección de las velocidades de dos puntos del sólido en la dirección de la recta que los une debe ser la misma). En el mismo caso (proyección nula) estarán todos los puntos de un plano π_1 que contenga a la recta OA y sea perpendicular a $\vec{v}_A$. Nos fijamos ahora en otro punto B del sólido, de velocidad $\vec{v}_B$ no nula y no contenido en el plano π_1. La velocidad de este punto B será perpendicular a la recta OB. Existirá un plano π_2 que contenga a la recta OB y sea perpendicular a $\vec{v}_B$ que contendrá puntos cuyas velocidades tendrán proyección nula sobre ese plano. Como los puntos A y B están en planos distintos, las velocidades $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ no serán paralelas y los planos π_1 y π_2 se cortarán según una recta OI.

Los puntos pertenecientes a esa recta o eje deben tener velocidad nula porque su proyección debe ser nula tanto sobre el plano π_1 como sobre el π_2. Dado que todos los puntos del eje tienen velocidad nula, éste permanecerá inmóvil un tiempo dt. Es decir, instantáneamente el movimiento del sólido es un giro elemental alrededor de OI. Este eje, cuyos puntos tienen velocidad nula en un instante, se llama **eje instantáneo de rotación**.

Definimos formalmente el **eje instantáneo de rotación (EIR)** como el lugar geométrico de todos los puntos del sólido que en ese instante tienen velocidad nula. El eje instantáneo de rotación tiene en cada instante la dirección de $\vec{\omega}$.

El hecho de haber considerado no nulas las velocidades de los puntos A y B no resta ninguna generalidad a la demostración que se ha realizado, ya que, si la velocidad de uno de ellos, por ejemplo el B, fuese nula, entonces la recta OB sería el eje instantáneo de rotación.

La conclusión a la que se ha llegado constituye el teorema de Euler:

> ***El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo es siempre una rotación instantánea alrededor de un eje instantáneo de rotación que pasa por ese punto.***

El sólido rígido cambia su posición y pasa a ocupar otra infinitamente próxima realizando un giro elemental alrededor de OI. Este giro se realiza con una velocidad angular instantánea de rotación $\vec{\omega}$ que estará dirigida según OI. Esta velocidad angular tendrá, en general, módulo no constante y, además, su dirección (que es la del eje instantáneo de rotación) también variará con el tiempo, ya que si no estaríamos en el caso de un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo.

Resumiendo, el movimiento real del sólido rígido es una sucesión de rotaciones alrededor de un eje que siempre pasa por O y que varía su orientación de forma continua. La aceleración angular $\vec{\alpha}$ del sólido rígido, que se define como la derivada del vector $\vec{\omega}$ con respecto al tiempo refleja la variación del vector $\vec{\omega}$ tanto en módulo como en dirección y no tendrá, en general, la misma dirección que $\vec{\omega}$ (Fig. 7.15). Esto significa que los puntos del sólido situados sobre el eje instantáneo de rotación, aunque tienen en ese instante velocidad nula, tienen, en general, aceleración no nula y, por tanto, un instante después tendrán velocidad no nula y ya no pertenecerán al nuevo eje instantáneo de rotación.

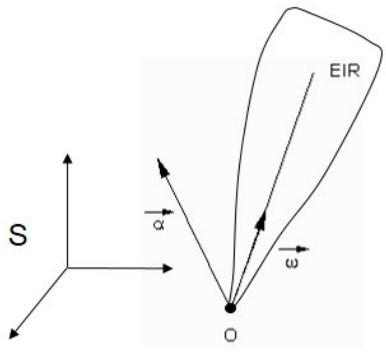


Figura 7.15: Variables cinemáticas angulares en el movimiento del sólido con punto fijo.

El campo de velocidades para un sólido rígido con un punto fijo lo deducimos inmediatamente particularizando la expresión [3.21] para este caso. Elegimos como sistema de referencia móvil *S'* uno ligado al sólido y con origen en el punto fijo O (Fig. 7.16). Así, $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_O = 0$ y la velocidad instantánea de un punto P cualquiera será:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$

Como podemos observar coincide con la que tendría un punto de un sólido que girara alrededor de un eje que pasara por O y tuviera la dirección de $\vec{\omega}$ (ec. [7.10]). La diferencia reside en que en ese caso $\vec{\omega}$ tenía dirección fija en el espacio y ahora no.

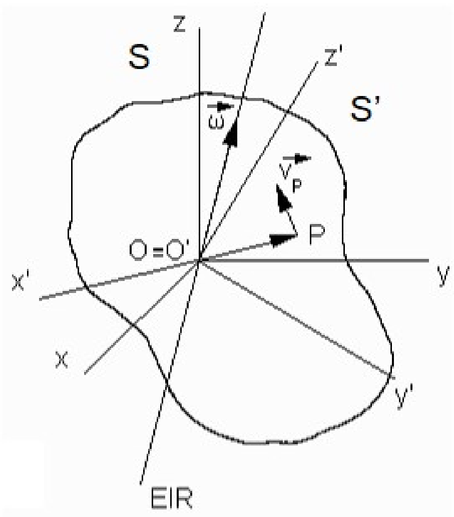


Figura 7.16: Descripción del movimiento del sólido con punto fijo.

El campo de aceleraciones será

$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP})$$

ya que $\vec{a}_{O'} = \vec{a}_O = 0$ (nótese que la aceleración angular $\vec{\alpha}$ no tiene por qué tener la misma dirección que $\vec{\omega}$, como ocurría en el giro alrededor de un eje fijo, ec. [7.11]).

7.8. Movimiento general de un sólido rígido

Se trata de estudiar el movimiento sin restricciones de un sólido rígido en el espacio (Fig. 7.17).

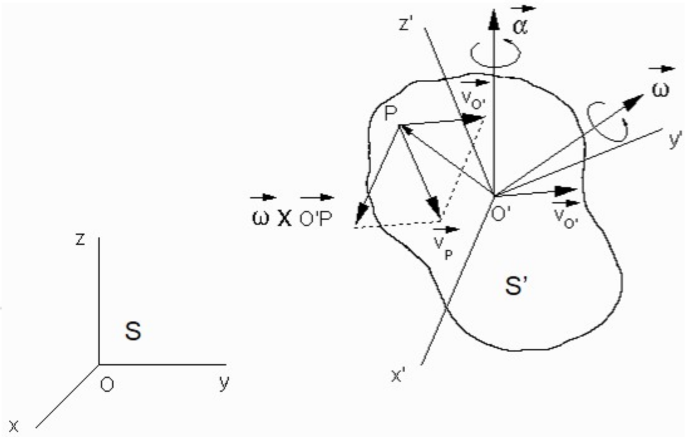


Figura 7.17: Movimiento general de un sólido.

Elegido un sistema de referencia *S'* con origen en un punto *O'* del sólido rígido y ligado solidariamente a él, la velocidad de un punto cualquiera del sólido P, vendrá dada por la expresión [3.21] del campo de velocidades

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}$$

Lo mismo ocurrirá con la aceleración del punto P, ec. [4.26]:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P})$$

El movimiento del sólido es una traslación como conjunto con la velocidad y aceleración del punto *O'* ($\vec{v}_{O'}$ y $\vec{a}_{O'}$) y una rotación instantánea con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ alrededor de un eje en la dirección de $\vec{\omega}$ que pasa por *O'*.

Todo esto se traduce en el denominado teorema de Chasles para el movimiento general de un sólido rígido (un teorema con el mismo nombre se cumplía también en el movimiento plano 7.6.3):

"El movimiento más general de un sólido rígido se puede conseguir mediante la superposición de una traslación a la velocidad de traslación de uno de sus puntos y una rotación del sólido como si el punto considerado estuviera fijo instantáneamente".

7.9. Eje instantáneo de rotación (EIR)

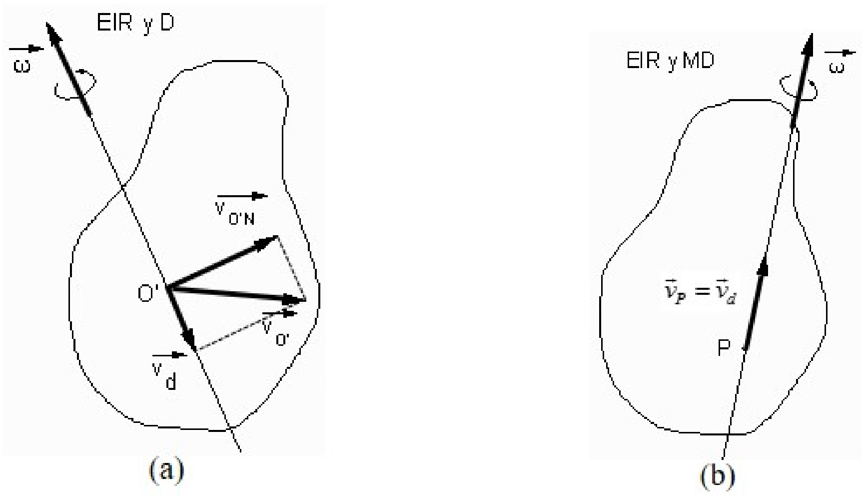


Figura 7.18: a) Eje instantáneo de rotación y deslizamiento.
b) Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento.

El eje mencionado en el apartado anterior, que pasaba por *O'* y alrededor del cual tenía lugar la rotación instantánea del sólido, es paralelo al vector $\vec{\omega}$ y, como ya sabemos, todos sus puntos deben tener la misma velocidad instantánea $\vec{v}_{O'}$. Para distinguirlo de otros ejes instantáneos más particulares le llamaremos eje instantáneo de rotación y deslizamiento (EIRyD). Es decir, el eje instantáneo de rotación y deslizamiento es un eje paralelo a $\vec{\omega}$ que pasa por el punto *O'* (origen del sistema de referencia ligado solidariamente al sólido rígido en su movimiento, Fig. 7.18(a)). Es fácil comprender que al no haber exigido ninguna otra condición al punto elegido como origen de *S'*, habrá infinitos ejes instantáneos de rotación y deslizamiento y que, salvo que el movimiento sea una traslación (no exista $\vec{\omega}$ y por lo tanto su dirección no esté definida) siempre existirán.

De todos esos posibles ejes instantáneos de rotación y deslizamiento habrá uno cuyos puntos tengan en ese instante velocidad mínima (en módulo). Serán aquellos puntos cuya velocidad coincida con la que habíamos llamado, en el apartado 7.3.2, velocidad de deslizamiento del sólido ($\vec{v}_d$). Es decir, se tratará de puntos *P* del sólido cuya velocidad sea paralela a la dirección de $\vec{\omega}$ (Fig. 7.18(b)).

Estos puntos existen (salvo que el movimiento sea una traslación, en cuyo caso todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad) aunque pueden no pertenecer al sólido real sino al espacio que le rodea y que, a efectos cinemáticos, consideramos como una extensión de éste. Este eje cuyos puntos tienen la mínima velocidad instantánea de todos los del sólido se llama **eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento** y solamente existe uno.

Cuando la velocidad de deslizamiento es nula ($\vec{v}_d = 0$) el eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento recibe el nombre especial de **eje instantáneo de rotación** (sin ningún apellido, aunque también se le podría llamar eje instantáneo de rotación con deslizamiento nulo). Este eje ya ha sido mencionado en el apartado 7.7 de movimiento de un sólido con un punto fijo, donde se observa claramente que la velocidad de deslizamiento es nula (Fig. 7.19(a)).

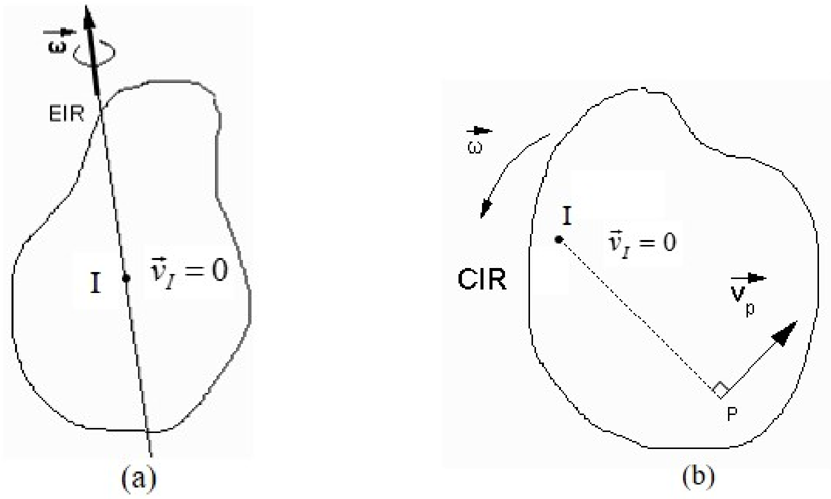


Figura 7.19: a) Eje instantáneo de rotación. b) Centro instantáneo de rotación.

El eje instantáneo de rotación puede no existir y, si existe, es único. La condición que se debe cumplir para que exista ya ha sido mencionada y es que la velocidad de deslizamiento del sólido sea nula.

Recordando la definición de $\vec{v}_d$ (apartado 7.3.2), debe cumplirse

$$\vec{v}_d = \vec{v}_P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = 0$$

Esta ecuación se satisface si:

- $\vec{v}_P = 0 \Rightarrow$ El sólido tiene puntos fijos (trivial).
- $\vec{v}_P \perp \vec{\omega} \Rightarrow$ La velocidad de un punto cualquiera del sólido es perpendicular a $\vec{\omega}$.

Esta última condición la cumplen **siempre** los movimientos **planos**, en los cuales la velocidad de cualquier punto del sólido está contenida en un plano paralelo a uno fijo y el vector $\vec{\omega}$ es siempre perpendicular a ese plano.

Como los movimientos planos se estudian utilizando una sección característica representativa del sólido (la sección central, como se verá con detalle en la dinámica del sólido rígido, capítulo

8), al punto alrededor del cual se produce instantáneamente la rotación (punto intersección del eje instantáneo de rotación con el plano que define la sección central del sólido) se le conoce con el nombre de **centro instantáneo de rotación** (Fig. 7.19(b)).

Existe una analogía formal entre el eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento y el eje central de un sistema de vectores deslizantes (apartado 8.3). Se pueden determinar sus ecuaciones general y vectorial siguiendo idénticos razonamientos cambiando momento por velocidad lineal y resultante por velocidad angular.

7.9.1. Ecuación general del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento

El eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento representa el lugar geométrico de los puntos que solo tienen velocidad de deslizamiento. Si un punto E de coordenadas (x,y,z) en S y (x',y',z') en S' pertenece a dicho eje, entonces

$$\vec{v}_E = \vec{v}_d \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_E \parallel \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{Ex}}{\omega_x} = \frac{v_{Ey}}{\omega_y} = \frac{v_{Ez}}{\omega_z}$$

Si llamamos $\vec{v}_{O'}$ a la velocidad del origen del sistema de referencia $O'X'Y'Z'$, ligado al sólido, se cumple que

$$\vec{v}_E = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'E} = (v_{O'x}\vec{i} + v_{O'y}\vec{j} + v_{O'z}\vec{k}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

con lo que resulta

$$\frac{v_{O'x} + \omega_y z' - \omega_z y'}{\omega_x} = \frac{v_{O'y} + \omega_z x' - \omega_x z'}{\omega_y} = \frac{v_{O'z} + \omega_x y' - \omega_y x'}{\omega_z} \tag{7.12}$$

que es la ecuación general del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento y determina todos los puntos de este eje si se conocen $v_{O'x}$, $v_{O'y}$, $v_{O'z}$, ω_x, ω_y y ω_z. Obsérvese que $x' = x - x_{O'}$, $y' = y - y_{O'}$ y $z' = z - z_{O'}$.

7.9.2. Ecuación vectorial del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento

En las mismas condiciones del apartado anterior, al ser $\vec{v}_E$ paralelo a $\vec{\omega}$ se verifica que

$$\vec{v}_E \times \vec{\omega} = 0 = (\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'E}) \times \vec{\omega}$$

es decir

$$0 = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + \omega^2 \overrightarrow{O'E} - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{O'E})\vec{\omega}$$

Definimos el parámetro λ como

$$\lambda = \frac{\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{O'E}}{\omega}$$

y, despejando $\overrightarrow{O'E}$, resulta

$$\overrightarrow{O'E} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2} + \lambda \frac{\vec{\omega}}{\omega}\,; \quad \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'E} \tag{7.13}$$

que es la ecuación vectorial del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento.

Conociendo $\vec{v}_{O'}$ y $\vec{\omega}$ en un instante de tiempo, el extremo del vector $\overrightarrow{O'E}$ (con origen fijo en *O'*) recorre todos los puntos del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento conforme el parámetro λ toma todos los posibles valores entre -∞ y +∞, para ese instante de tiempo.

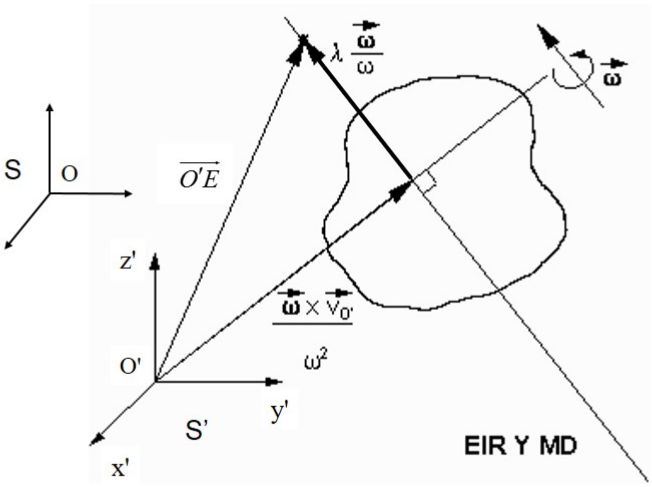


Figura 7.20: Variables de la ecuación vectorial del EIRyMD.

Para encontrar la posición del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento respecto al sistema *O'X'Y'Z'*, se calcula el vector de posición $\overrightarrow{O'E}_{\text{mín}}$ del punto de tal eje más próximo al origen *O'*, que viene dado por (Fig. 7.20)

$$\overrightarrow{O'E}_{\text{mín}} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2}$$

que es perpendicular a $\vec{\omega}$. El eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento queda determinado por el extremo de $\overrightarrow{O'E}_{\text{mín}}$ y por la dirección de $\vec{\omega}$ en cada instante.

7.9.3. Determinación gráfica

Se puede determinar gráficamente el eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento conocidas las velocidades $\vec{v}_P$ y $\vec{v}_Q$ de dos puntos P y Q del sólido.

Si $\vec{v}_P = \vec{v}_Q$ el vector $\overrightarrow{PQ}$ (Fig. 7.21(a)) **define directamente la dirección** del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento. Para encontrar un punto de eje es suficiente con descomponer la velocidad $\vec{v}_P$ en dos componentes, una en la dirección de $\vec{\omega}$ ($\vec{v}_d$) y otra en dirección perpendicular ($\vec{v}_{PN}$), $\vec{v}_P = \vec{v}_d + \vec{v}_{PN}$. El eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento será un eje paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ situado en una dirección perpendicular al plano determinado por $\vec{v}_P$ y $\overrightarrow{PQ}$ tal que $\vec{v}_{PN} = -\vec{\omega} \times \overrightarrow{PE}$ siendo E el punto del eje en esa dirección y a una distancia d ($d = |\overrightarrow{PE}|$):

$$d = \frac{v_{PN}}{\omega}$$

Si $\vec{v}_P \neq \vec{v}_Q$ (Fig. 7.21(b)) habrá que buscar la dirección (distinta de $\overrightarrow{PQ}$) en la cual las proyecciones de $\vec{v}_P$ y $\vec{v}_Q$ sean iguales. Esa será la dirección de $\vec{\omega}$. Una vez determinada, se procede con $\vec{v}_P$ de la misma forma que en el caso anterior.

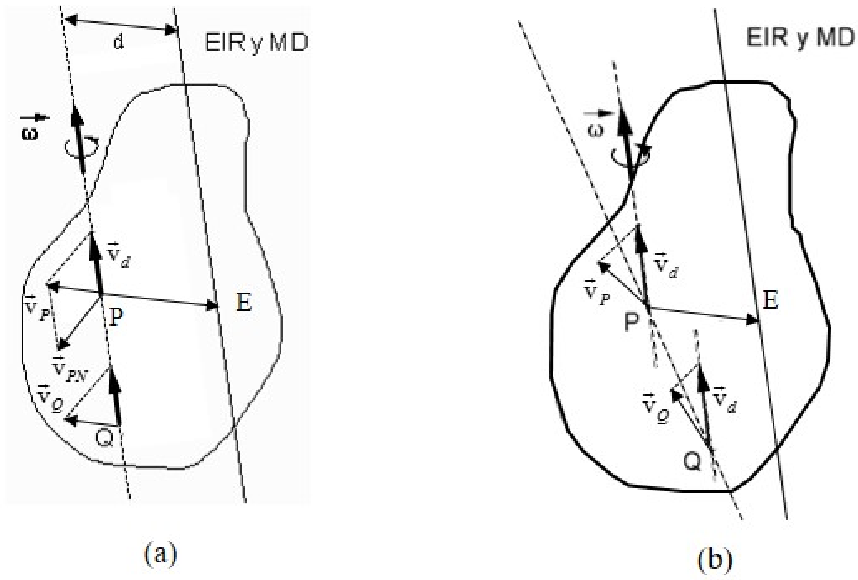


Figura 7.21: Determinación gráfica del EIRyMD: a)caso $\vec{v}_P$=$\vec{v}_Q$ y b)caso $\vec{v}_P \neq \vec{v}_Q$.

7.10. Centro instantáneo de rotación (CIR)

Por la importancia que en este curso tiene el movimiento plano de sólidos rígidos, estudiaremos un método gráfico para la determinación del centro instantáneo de rotación.

7.10.1. Cálculo a partir de la velocidad de un punto y de la velocidad angular

Como $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IA}$, el CIR I se encuentra en una recta perpendicular a $\vec{v}_A$ ($\vec{v}_A \perp \overrightarrow{IA}$) y además $v_A = \omega \left|\overrightarrow{IA}\right|$ ($\vec{\omega} \perp \overrightarrow{IA}$) con lo cual $\left|\overrightarrow{IA}\right| = v_A/\omega$ (Fig. 7.22(a)).

7.10.2. Cálculo a partir de las velocidades no paralelas de dos puntos

Como $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}$ y $\vec{v}_Q = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IQ}$, el centro instantáneo de rotación se encontrará en la intersección de las perpendiculares a $\vec{v}_P$ y $\vec{v}_Q$ por los puntos P y Q respectivamente (Fig. 7.22(b)).

7.10.3. Cálculo a partir de las velocidades paralelas de dos puntos

El centro instantáneo de rotación se encontrará en la perpendicular común a $\vec{v}_P$ y $\vec{v}_Q$. Además, $v_P = \omega|\overrightarrow{IP}|$ y $v_Q = \omega|\overrightarrow{IQ}|$ es decir (Fig. 7.22(c)),

$$\frac{v_P}{|\overrightarrow{IP}|} = \frac{v_Q}{|\overrightarrow{IQ}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_P}{v_Q} = \frac{|\overrightarrow{IP}|}{|\overrightarrow{IQ}|}$$

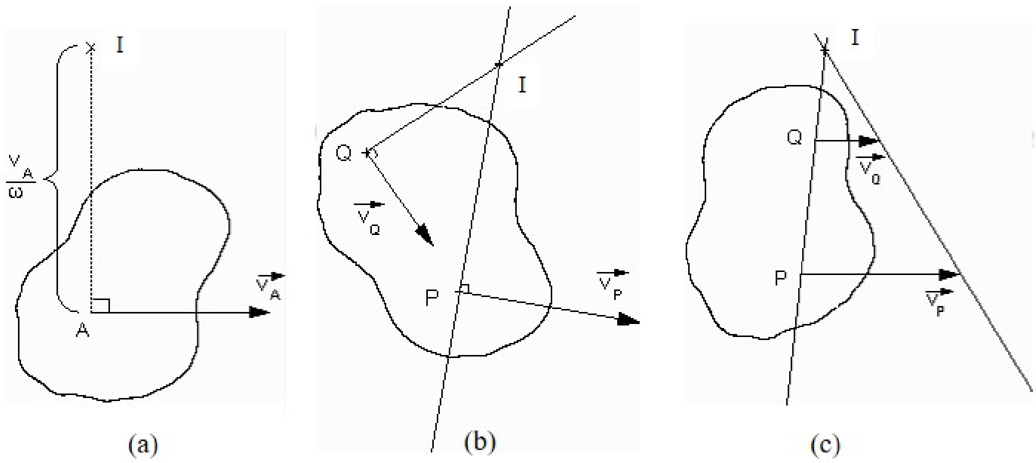


Figura 7.22: Determinación gráfica del CIR en los tres casos considerados.

7.11. Sólidos en contacto: deslizamiento, rodadura y pivotamiento

Un caso particularmente importante en el estudio dinámico del sólido rígido consiste en el movimiento de rodadura de un sólido que apoya sobre una superficie de contacto.

En el caso general se puede hablar de rodadura siempre que un sólido (*sólido 2*) de contorno suave apoye sobre una superficie (*sólido 1*) -fija o móvil respecto a un observador absoluto *0*-, y tenga una velocidad angular respecto a ella contenida en el plano tangente de los dos sólidos. Sea $\vec{n}$ la normal a dicho plano en el punto de contacto, entonces la velocidad angular de rodadura (relativa al *sólido 1*) será (Fig. 7.23):

$$\vec{\omega}_r = \vec{n} \times (\vec{\omega}_{21} \times \vec{n}) \tag{7.14}$$

siendo $\vec{\omega}_{21}$ la velocidad angular del *sólido 2* respecto del *sólido 1*.

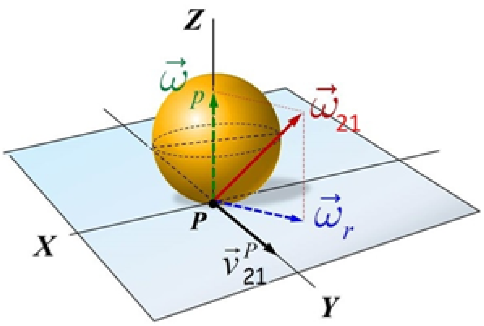


Figura 7.23: Velocidad angular de rodadura y pivotamiento.

Se define la velocidad de deslizamiento del *sólido 2* respecto del *sólido 1* a la velocidad relativa del punto de contacto P entre ambos sólidos $\vec{v}^P_{21}$. Esta velocidad es justo la opuesta a la velocidad de deslizamiento del *sólido 1* respecto al *sólido 2* ($\vec{v}^P_{12} = -\vec{v}^P_{21}$). En el supuesto de que haya un observador absoluto 0, se verifica:

$$\vec{v}^P_{21} = \vec{v}^P_{20} - \vec{v}^P_{10} \tag{7.15}$$

La velocidad de deslizamiento estará contenida en el plano tangente a las superficies en contacto entre los dos sólidos en P, de manera que:

$$\vec{v}^P_{21} \cdot \vec{n} = (\vec{v}^P_{20} - \vec{v}^P_{10}) \cdot \vec{n} = 0$$

Se dice que un sólido rueda sin deslizar cuando teniendo velocidad angular de rodadura la velocidad del punto de apoyo P relativa a la superficie de contacto es instantáneamente nula

$$\vec{v}^P_{21} = \vec{v}^P_{20} - \vec{v}^P_{10} = 0 \tag{7.16}$$

lo que en el caso de una superficie fija al sistema de referencia *0* equivale a decir que la velocidad absoluta del punto P es nula respecto al observador *0*. En caso contrario diremos que el sólido rueda y desliza.

Decimos que un sólido rígido (*sólido 2*) que apoya sobre una superficie (*sólido 1*) tiene una rotación de pivotamiento cuando gira en torno a un eje perpendicular a la superficie de apoyo. La velocidad angular de pivotamiento (relativa al *sólido 1*) será:

$$\vec{\omega}_p = (\vec{\omega}_{21} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \tag{7.17}$$

7.11.1. Cinemática del movimiento plano de rodadura

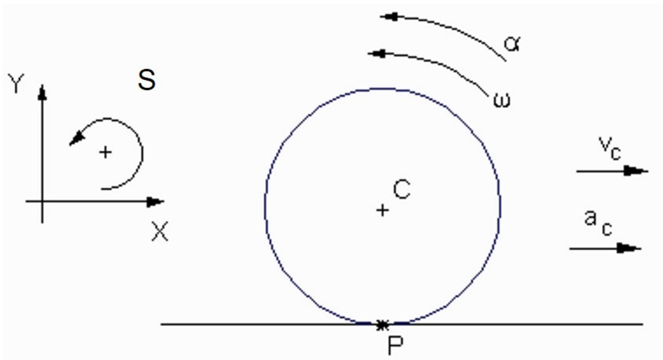


Figura 7.24: Rodadura plana.

En esta sección estudiaremos el caso particular de un sólido rígido (*sólido 2*) en movimiento plano cuya sección central tiene contorno circular y que se mueve apoyando sobre una superficie horizontal (*sólido 1*) fija (respecto al sistema *0*), con las siguientes condiciones e idealizaciones (Fig. 7.24):

-El sistema de referencia inercial S que utilizaremos define el plano del movimiento mediante z=0. El eje OX es paralelo a la superficie de apoyo.

-El centro de masas C, el centro de gravedad y el centro geométrico de la sección central del sólido coinciden.

-Las componentes en el eje OX de la velocidad y aceleración del centro de masas, v_C y a_C, y las componentes en el eje OZ de la velocidad y aceleración angulares de rotación, ω y α, (que son solo de rodadura) tienen signo implícito (pueden ser positivas o negativas). Las dos primeras están contenidas en la sección central y las dos segundas son perpendiculares a ésta. Se adopta el convenio de signos habitual para rotaciones: si $\omega > 0$ se trata de un giro antihorario. Al estar fija la superficie horizontal estas magnitudes podrán referirse a cualquiera de los dos observadores *1* o *0*.

-La sección central del sólido es perfectamente circular y la superficie de apoyo perfectamente plana en este caso ideal, lo que impone que el apoyo se produce en un único punto. Llamaremos P al punto del sólido en el que apoya instantáneamente la sección central sobre la superficie. Este modelo aproxima bastante bien el movimiento de rodadura de sólidos macizos y homogéneos tales como aros, discos, cilindros o esferas, que aparecen a menudo en aplicaciones prácticas.

En las condiciones especificadas, distinguiremos entre dos tipos de movimiento sustancialmente diferentes: **rodadura pura o sin deslizamiento** y **rodadura con deslizamiento.**

En el caso de que el sólido ruede sin deslizar la velocidad del punto de apoyo P relativa a la superficie de contacto es instantáneamente nula lo que en nuestro caso (superficie fija) equivale a decir que la velocidad absoluta del punto P es nula,

$$\vec{v}_P = 0 \tag{7.18}$$

En el caso de rodadura pura el punto P es el centro instantáneo de rotación. El centro de masas C sigue una trayectoria paralela a la superficie de contacto (en nuestro caso rectilínea). Aplicando la relación entre velocidades a los puntos C y P obtenemos una condición equivalente a [7.18]

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PC} \Rightarrow v_C\vec{i} = \omega\vec{k} \times R\vec{j} \Rightarrow v_C = -\omega R \tag{7.19}$$

como es inmediato comprobar, ahora referida a la velocidad del centro de masas. En los casos en los que el centro de masas C no coincida con el centro geométrico de la sección del sólido, la condición anterior es aplicable a este último punto y no a C. El signo negativo indica que, de acuerdo al convenio de signos adoptado, si v_C es positiva ω ha de ser negativa y viceversa.

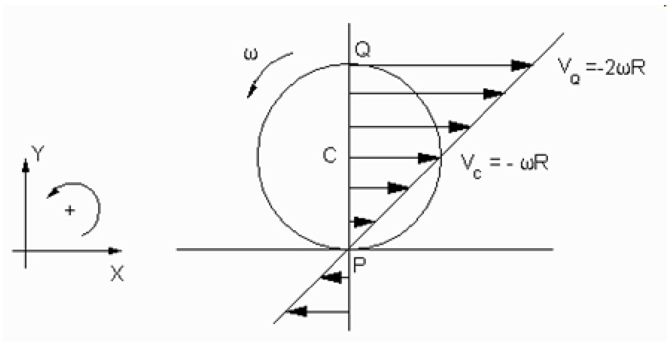


Figura 7.25: Variables en rodadura pura.

El campo de velocidades para distintos puntos de un diámetro vertical de la sección central viene indicado en la Fig. 7.25 para un instante genérico en el caso de rodadura sin deslizamiento. Como ya se vio, tal campo se puede aplicar incluso a puntos del espacio que rodean al sólido si los consideramos teórica y solidariamente ligados al mismo.

De la condición [7.19] se obtiene

$$dx_C = -Rd\theta \quad \Rightarrow \quad \Delta x_C = -R\Delta\theta \tag{7.20}$$

que es la condición de rodadura pura relativa a la distancia recorrida por el centro de masas y al ángulo girado por el sólido. De nuevo el signo negativo es debido al convenio de signos según el cual el incremento $\Delta\theta$ es positivo si el giro se produce en sentido contrario a las agujas del reloj y negativo si es al revés. La condición [7.20] es aplicable a todo intervalo del movimiento en el que haya habido rodadura pura.

En la Fig. 7.26 se muestra un desplazamiento $\Delta x_C > 0$ del centro de masas durante el cual un radio, como CP, de la sección central ha girado en rodadura sin deslizamiento un ángulo $\Delta\theta < 0$ hasta CP'. En esta supuesto el sólido se mueve como si estuviera "engranado" a la superficie de apoyo y se cumple que: $|\Delta x_C| = \text{longitudarco}(PP') = |\Delta\theta|\, R$, que equivale a [7.20] con nuestro convenio de signos.

Derivando la expresión [7.19] se obtiene la condición de rodadura sin deslizamiento para la aceleración:

$$a_C = -\alpha R, \quad \vec{a}_C = a_C\vec{i} \quad \vec{\alpha} = \alpha\vec{k} \tag{7.21}$$

que es aplicable para todo instante en el que la función $v_C(t)$, o equivalentemente $\omega(t)$, sea derivable.

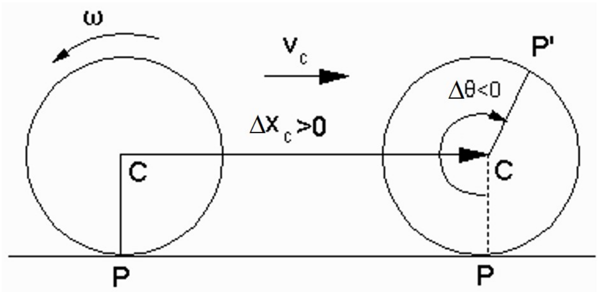


Figura 7.26: Variables en rodadura pura.

La velocidad y la aceleración de cualquier punto Q del sólido vienen dadas por las expresiones

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{a}_Q = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{PQ} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{PQ})$$

en el caso de rodadura pura.

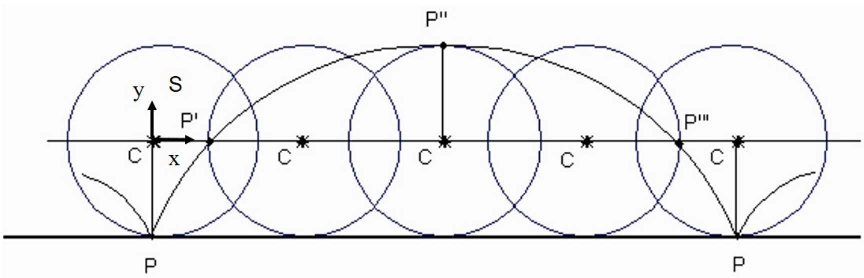


Figura 7.27: Trayectoria de un punto del perímetro del sólido en rodadura pura.

En la Fig. 7.27 se muestran las trayectorias, respecto a un sistema inercial S ligado a la superficie de apoyo, del centro de masas y de un punto del perímetro del sólido de su sección central para una vuelta completa del sólido y suponiendo, por sencillez, que v_C y ω son constantes. A la trayectoria de P a lo largo de $PP'P''P'''P$ se la conoce como cicloide común. Evidentemente, la trayectoria de C es una recta horizontal. Las ecuaciones paramétricas, en función del tiempo, de la cicloide que describe el punto P vienen dadas por

$$x_P = v_C t - R\sin(|\omega|\, t)$$
$$y_P = -R\cos(|\omega|\, t)$$

representadas en un sistema de referencia cuyo eje OX contiene a la trayectoria del centro de masas C. Se recomienda como ejercicio, calcular los puntos de la cicloide para las posiciones P, P', P'' y P''' de la Fig. 7.27.

En la Fig. 7.28 y en la Fig. 7.29 se muestran las trayectorias de dos puntos Q, uno interior y otro exterior. En la primera, Q está a una distancia de C inferior a R. Cuando la distancia entre Q y C tiende a cero, la trayectoria tiende a la del centro de masas y cuando tiende a R se aproxima a la cicloide común que sigue P. En la Fig. 7.29 el punto Q no pertenece al sólido y se encuentra a una distancia de C mayor que R. Como se puede comprobar en la Fig. 7.29 la velocidad de Q en la posición inferior es negativa, lo que explica el movimiento en forma de bucle que sigue Q hasta Q'.

Si v_C y ω no son constantes (es decir, $a_C = -\alpha R \neq 0$) entonces las trayectorias descritas por los puntos P y Q se distorsionan, aunque muchas de sus características se mantienen.

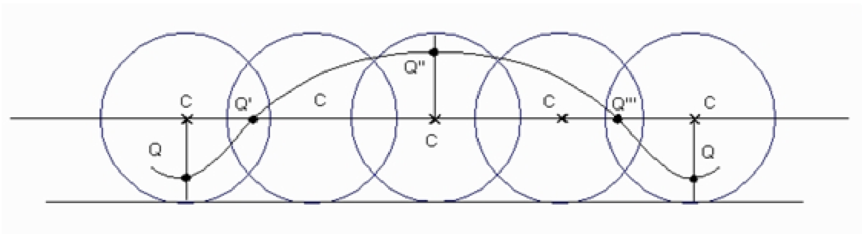


Figura 7.28: Trayectoria de un punto interior del sólido en rodadura.

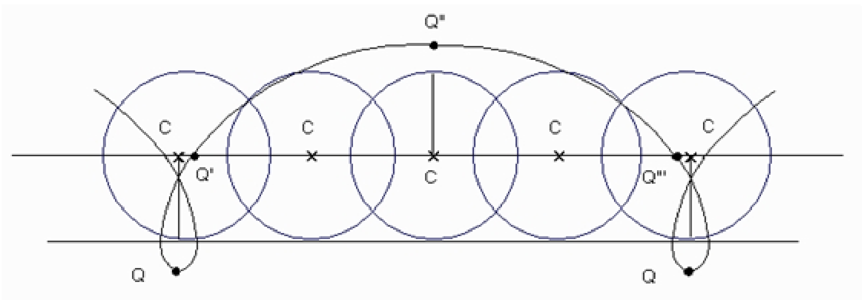


Figura 7.29: Trayectoria de un punto exterior al sólido y ligado a éste en rodadura.

En el caso de rodadura con deslizamiento el punto P de contacto tiene una velocidad no nula ($\vec{v}_P \neq 0$) y de dirección horizontal, paralela a la superficie de apoyo (en caso contrario se perdería el contacto). Las Fig. 7.30(a) y (b) muestran el campo de velocidades instantáneas del diámetro vertical de la sección central en los casos en que v_P>0 (v_C> -ωR) y v_P<0 (v_C< -ωR) respectivamente.

En el primer caso el centro instantáneo de rotación está situado por debajo de P y la trayectoria de un punto P del perímetro de la sección central es similar a la del punto Q de la Fig. 7.28. En el segundo caso, el centro instantáneo está situado entre C y P (suponiendo

$v_C > 0$) y la trayectoria de un punto P del perímetro de la sección central es similar a la del punto Q de la Fig. 7.29. Si existe, la aceleración del centro de masas tiene dirección horizontal en cualquiera de los casos siempre que la superficie de apoyo sea un plano horizontal.

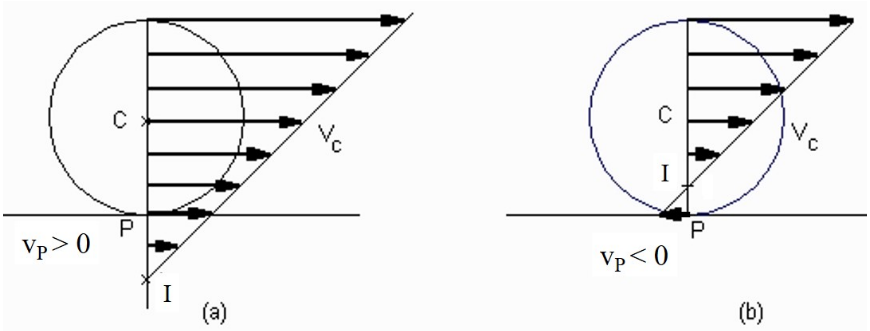


Figura 7.30: Campo de velocidades para la rodadura con deslizamiento.

En rodadura sin deslizamiento la aceleración instantánea del punto de contacto es vertical, y su valor se puede calcular mediante

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{CP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{CP})$$

con

$$\vec{a}_C = a_C \vec{i}; \quad a_C = -\alpha R; \quad \vec{\omega} = \omega \vec{k}; \quad \vec{\alpha} = \alpha \vec{k}; \quad \overrightarrow{CP} = -R\vec{j} \tag{7.22}$$

y resulta

$$\vec{a}_P = \omega^2 R \vec{j} \tag{7.23}$$

que indica que la recta soporte de $\vec{a}_P$ contiene al centro de masas. En rodadura con deslizamiento ya no sucede lo anterior. Ambas situaciones se ilustran en las Fig. 7.31(a) y (b). En esta última se ha representado $\vec{a}_P$ cualitativamente, siendo el único hecho importante que $\vec{a}_P$ tiene una componente horizontal, aunque no forzosamente en el sentido indicado.

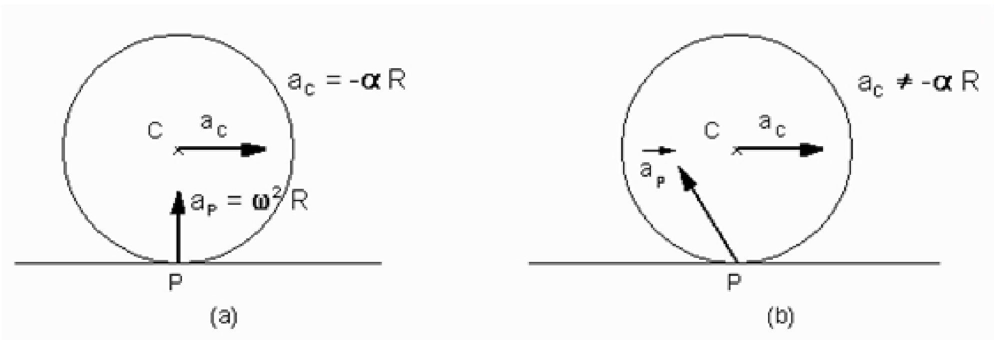


Figura 7.31: Aceleración del punto de contacto en a) rodadura y b) rodadura con deslizamiento.