Tema 3: Algoritmos de Búsqueda

3.1 Algoritmos básicos de búsqueda

Resultados conocidos

- Búsqueda lineal
  - $W_{BLin}(N) = N \text{ con OB cdc}$
  - $A^e_{BLin}(N) = \sum_{i=1}^{N} n_{BLin}(k = T[i])\, p(k == T[i]) \sim \frac{S_N}{C_N}$
- Búsqueda binaria
  - $W_{BBin}(N) = \lceil \lg(N) \rceil = \lg(N) + O(1) = A^f_{BBin}(N)$
- Tenemos que calcular $A^e_{BBin}(N)$

Coste medio de BBin con éxito.

- Veamos un ejemplo:

T=[1 2 3 4 5 6 7] N=7=2^3-1

$$A^e_{BBin}(N) = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} n_{BBin}(k = T[i]) = \frac{1}{7}(\underset{4}{1} + \underset{2}{2} + \underset{6}{2} + \underset{1}{3} + \underset{3}{3} + \underset{5}{3} + \underset{7}{3})$$

$$\Rightarrow A^e_{BBin}(N) = \frac{1}{7}(1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 4) = \frac{1}{7}(1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2)$$

- Para N=2^k-1 se tiene

Obs: N=2^k-1⇒k≈log(N)

$$A^e_{BBin}(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1} = \frac{1}{N}[k2^k - 2^k + 1] \Rightarrow A^e_{BBin}(N) = \frac{1}{N}[N\lg(N) - N + 1] \Rightarrow$$

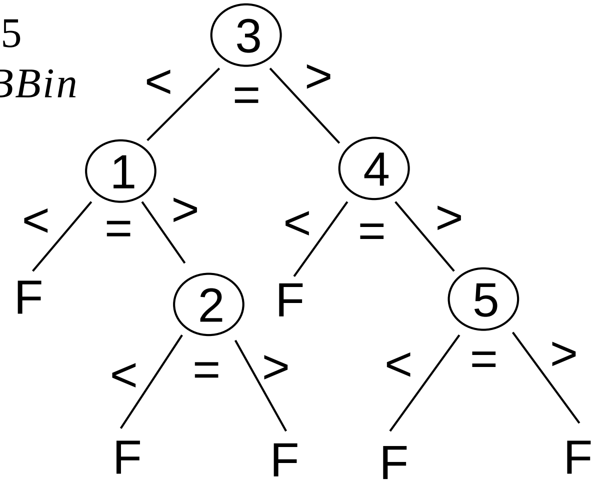
$$A^e_{BBin}(N) = \lg(N) - 1 + \frac{1}{N} \Rightarrow \boxed{A^e_{BBin}(N) = \lg(N) + O(1)}$$

Árbol de decisión para algoritmos de búsqueda por CDC: Definición

- Si **A** es un algoritmo de búsqueda por comparación de clave y **N** es un tamaño de tabla, se puede construir su **árbol de decisión T_A^N** para $\sigma \in \Sigma_N$ tal que cumple las siguientes 5 condiciones:
  1. Contiene nodos de la forma **i** que indica la cdc entre el elemento i-ésimo de la tabla y una clave genérica k.
  2. Si k coincide con el elemento i-ésimo (T[i]==k) entonces la búsqueda de la clave k termina en el modo **i**
  3. El subárbol izquierdo del nodo **i** en T_A^N contiene el trabajo (cdcs) que realiza el algoritmo A si k < T[**i**].
  4. El subárbol derecho del nodo **i** en T_A^N contiene el trabajo (cdcs) que realiza el algoritmo A si k > T[**i**].
  5. Las hojas H_σ en T_A^N recogen la evolución de las búsquedas fallidas.
  6. Los nodos la de las búsquedas con éxito.

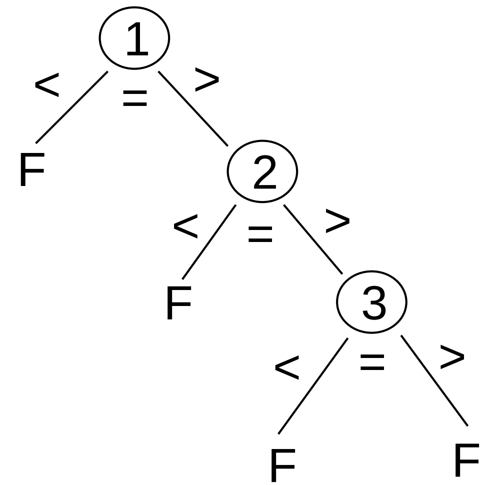
Árbol de decisión: Ejemplos

T^5_{BBin}



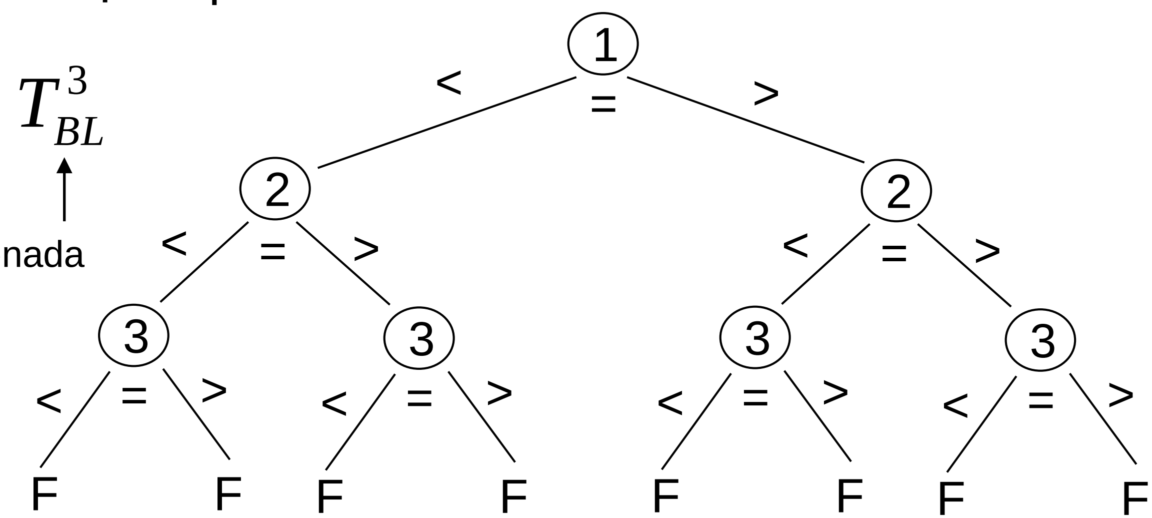
T^3_{BLord}

Tabla ordenada



T^3_{BL}

Tabla no ordenada



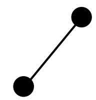
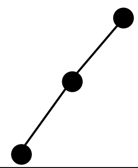
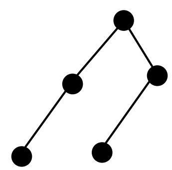
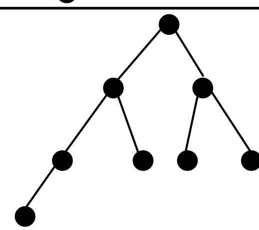
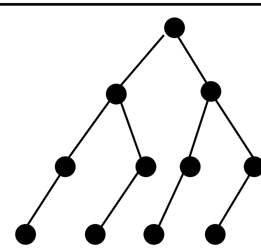
Obs: T_A^N es un árbol binario con al menos N nodos internos. Esto da la cota inferior:

$$\boxed{W_A(N) \geq prof_{min}(N)}$$

Profundidad mínima de un árbol con al menos N nodos internos

Árbol de decisión: Cotas inf. Caso Peor

- Estimamos $prof_{min}(N)$

N	T	$Prof_{min}(N)$
1		1
2		2
3		2
4		3
7		3

Cotas inferiores en búsqueda por cdcs

- Tenemos que

  $W_A(N) \geq prof_{min}(N) = \lfloor lg(N) \rfloor + 1 \Rightarrow$

  $\boxed{W_A(N) = \Omega(lg(N))}$ $\forall$ $A \in \mathcal{B}$ con

  $\mathcal{B}$={A: algoritmo de búsqueda por cdc}
- BBin es **óptimo** para el caso **peor**.
- Se puede demostrar también

  $\boxed{A_A(N) = \Omega(lg(N))}$ $\forall$ $A \in \mathcal{B}$
- BBin es **óptimo** para el caso **medio**.

¿Ya hemos acabado?

- **Observación:** la búsqueda no es una operación aislada
- Los elementos no sólo se buscan sino que también se **insertan** o se **borran**
- No sólo importa cómo se busca sino también dónde se busca
- Contexto: TAD **Diccionario**

En esta sección hemos …

- Recordado los costes peor y medio de búsqueda lineal y binaria
- Aprendido el concepto de árbol de decisión en búsqueda por cdcs
- Aprendido a construir árboles de decisión en búsqueda por cdcs
- Visto que la búsqueda binaria es óptima en los casos peor y medio dentro de los algoritmos de búsqueda por cdcs

3.2 Búsqueda sobre diccionarios

TAD Diccionario

- **Diccionario:** conjunto ordenado de datos con las primitivas.
  - pos Buscar(clave k, dicc D)
    - Devuelve la posición de la clave **k** en el diccionario **D** o un código de error **ERR** si **k** no está en **D.**
  - status Insertar (clave k, dicc D)
    - Inserta la clave **k** en el diccionario D y devuelve **OK** o **ERR** si **k** no se pudo incorporar a **D.**
  - void Borrar (clave k, dicc D)
    - Elimina la clave **k** en el diccionario D

EdDs para Diccionarios I

- ¿Qué EdD es la más adecuada para un diccionario?
- Opción 1: Tabla ordenada (|D|=N)
  - **Buscar:** Usamos BBin => $n_{Buscar}(k,D)=O(\log(N))$ => óptimo.
  - **Insertar:** Hay que mantener la tabla ordenada => la inserción es costosa
  - Ejemplo:

Insertar 26

Hay que desplazar a la derecha estos elementos

			24	25	27	29	

  - Si se inserta en la posición 1, hay que desplazar N elementos
  - En el caso medio se desplazan N/2 elementos
  - Por tanto $n_{Insertar}(k,D)=\Theta(N)$: **malo!!**

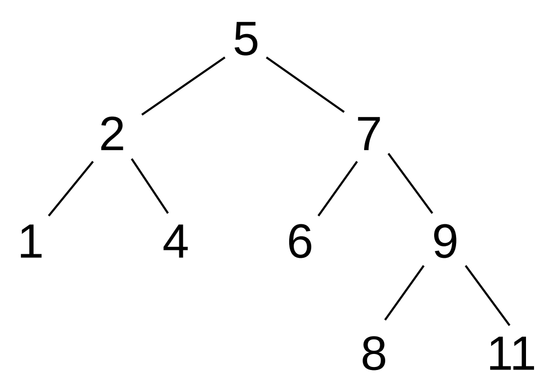
EdDs para Diccionarios II

- Opción 2: **Árbol binario de búsqueda** (ABdB)
- **Definición:** Un **ABdB** es un árbol binario **T** que para todo nodo T'∈T se cumple:

  $$\boxed{\text{Info(T'')<Info(T')<Info(T''')}}$$

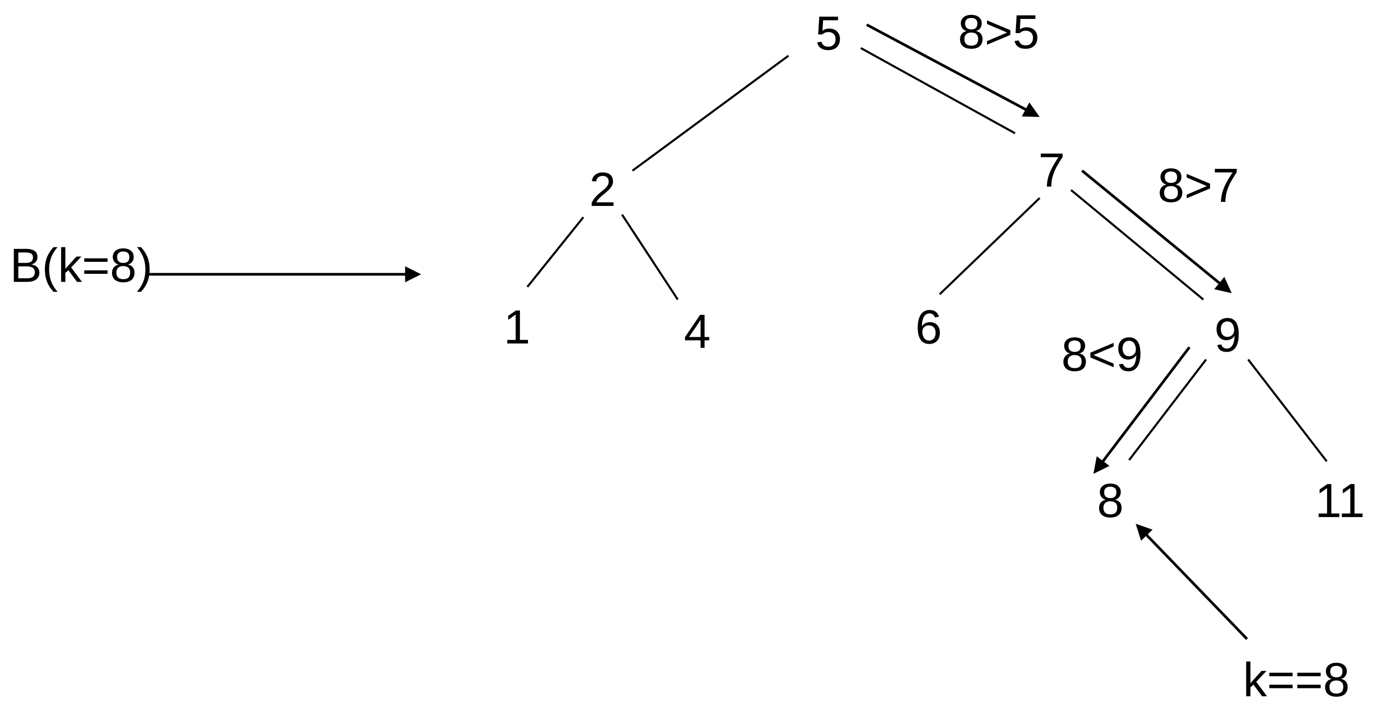
  para cualquier nodo T'' a la izq de T' y T''' a la derecha de T'
- Es decir, **todos los nodos a la izquierda** de T' tienen un valor **menor** que info(T') y **todos los nodos a la derecha** de T' tienen un valor **mayor** que info(T')

Ejemplo:



Buscar sobre ABdBs I

- Ejemplo



Buscar sobre ABdBs II

- Pseudocódigo:

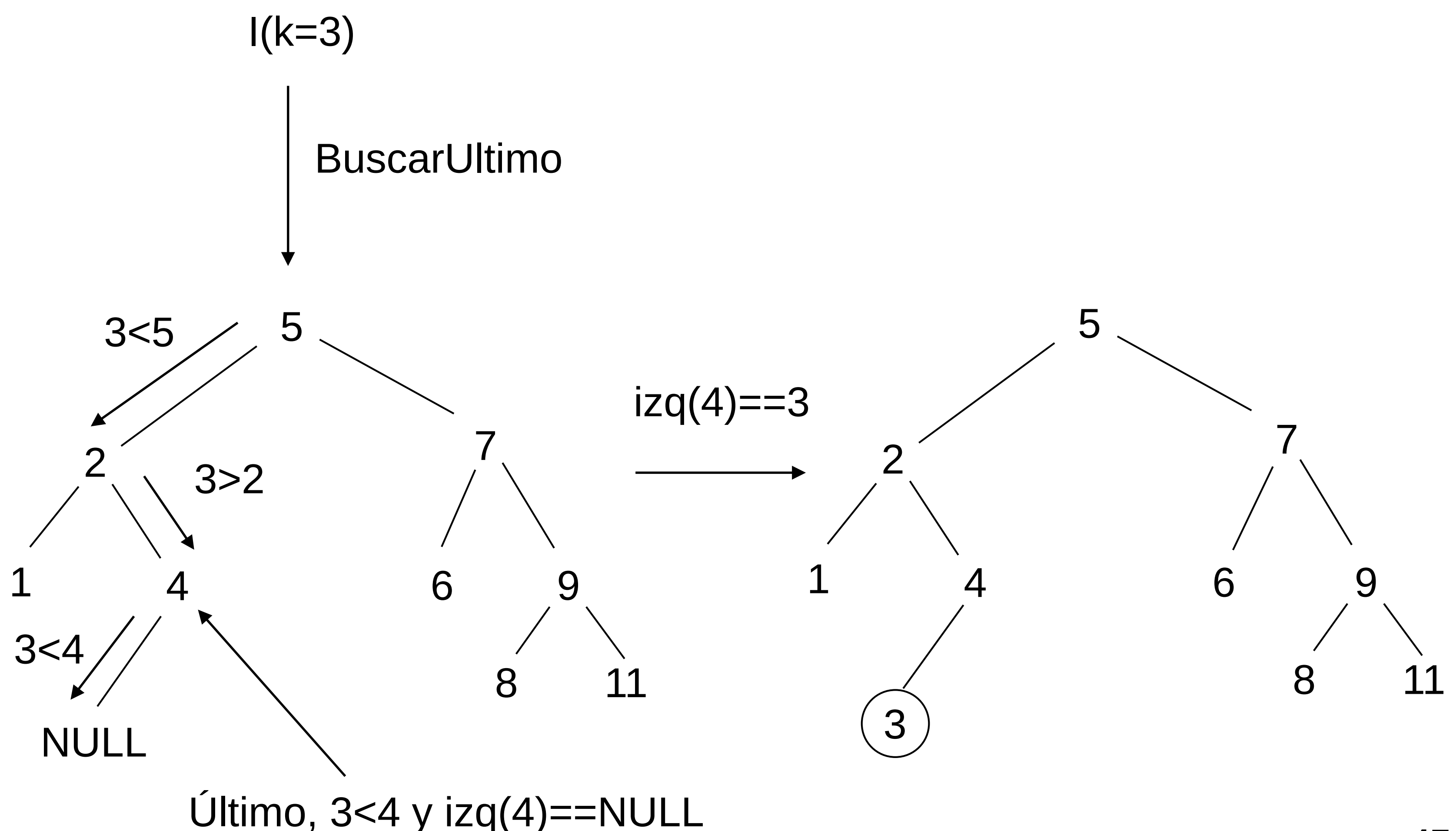
```
AB Buscar (clave k, AB T)
  si T==NULL : return NULL;
  si info(T)==k : return T;
  si k<info(T) :
    return Buscar(k,izq(T));
  si k>info(T) :
    return Buscar(k,der(T));
```

- Observación:

$$n_{Buscar}(k,T)=prof(k, T) + 1 = O(prof(T))$$

Insertar en ABDBs I

- Ejemplo



Insertar en ABDBs II

- Pseudocódigo

```
status Insertar (clave k, AB T)
   T'=BuscarUltimo(k,T);
   T''=GetNodo();
   si T''==NULL : return ERR;
   info(T'')=k;
   si k<info(T') :
      izq(T')=T''
   else :
      der(T')=T'';
   return OK;
```

```
AB BuscarUltimo(clave k, AB T)
   si k == info(T): return NULL;
   si (k<info(T) y izq(T) ==NULL) o
       (k>info(T) y der(T) ==NULL):
      return T;
   si k<info(T) y izq(T) !=NULL :
      return BuscarUltimo(k,izq(T));
   si k>info(T) y der(T) !=NULL :
      return BuscarUltimo(k,der(T));
```

- Observación

$$n_{Insertar}(k,T)=n_{BuscarUltimo}(k,T)+1 \Rightarrow n_{Insertar}(k,T)=O(prof(T))$$

Borrar en ABdBs

- Pseudocódigo:

```
void Borrar (clave k, AB T)
  T'=Buscar(k,T);
   si T'!=NULL :
      EliminaryReajustar(T',T);
```

- Por tanto:

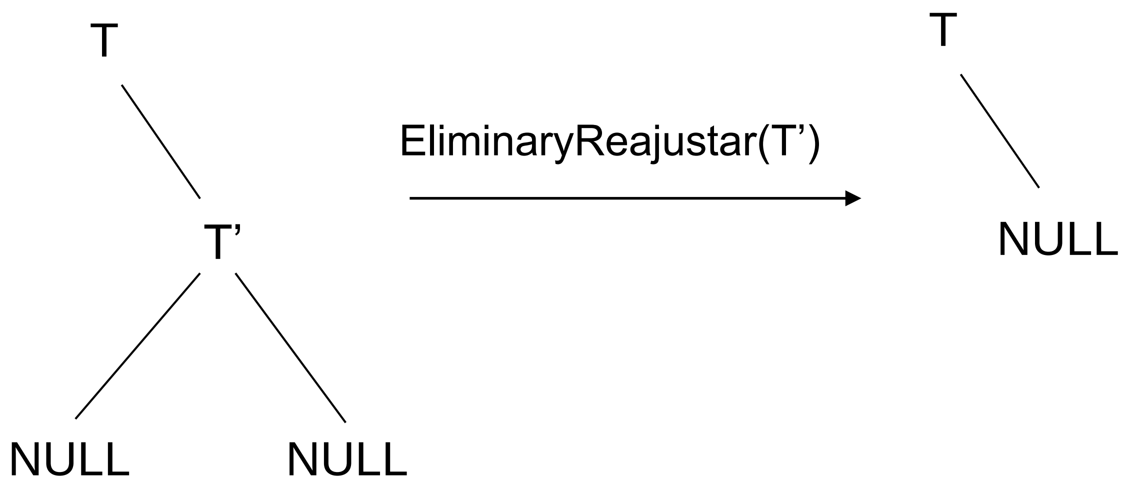
$$n_{Borrar}(k,T)=n_{Buscar}(k,T)+n_{EyR}(T',T)$$

- En **EliminaryReajustar** hay tres posibles casos, dependiendo del número de hijos que tenga el nodo T' a eliminar

Escuela Politécnica Superior

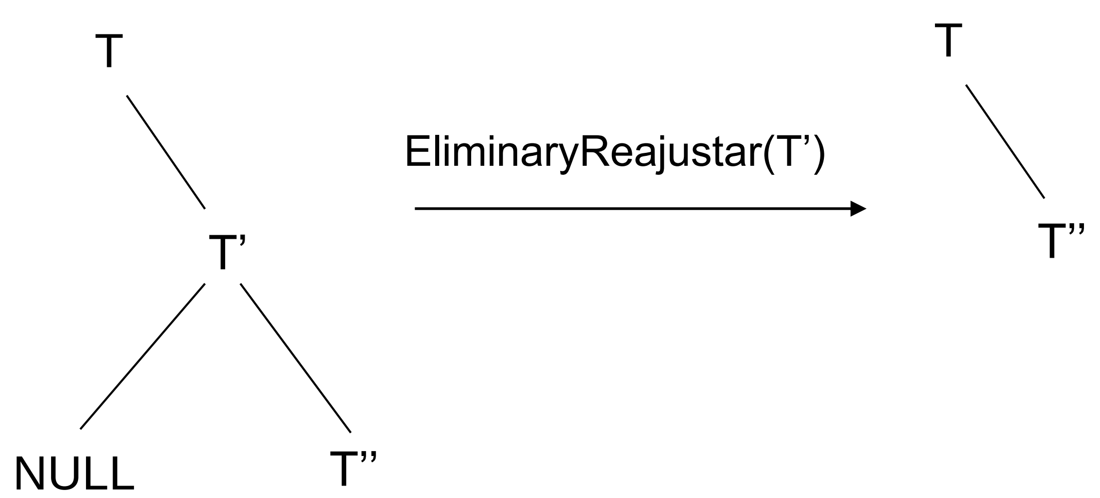
Eliminar y Reajustar I

- **Caso 1**: El nodo a eliminar **no tiene hijos**
  - se libera el nodo T' (free(T')), y
  - el puntero del padre de T' que apuntaba a T' se reasigna a NULL.
- Coste EliminaryReajustar = O(1)



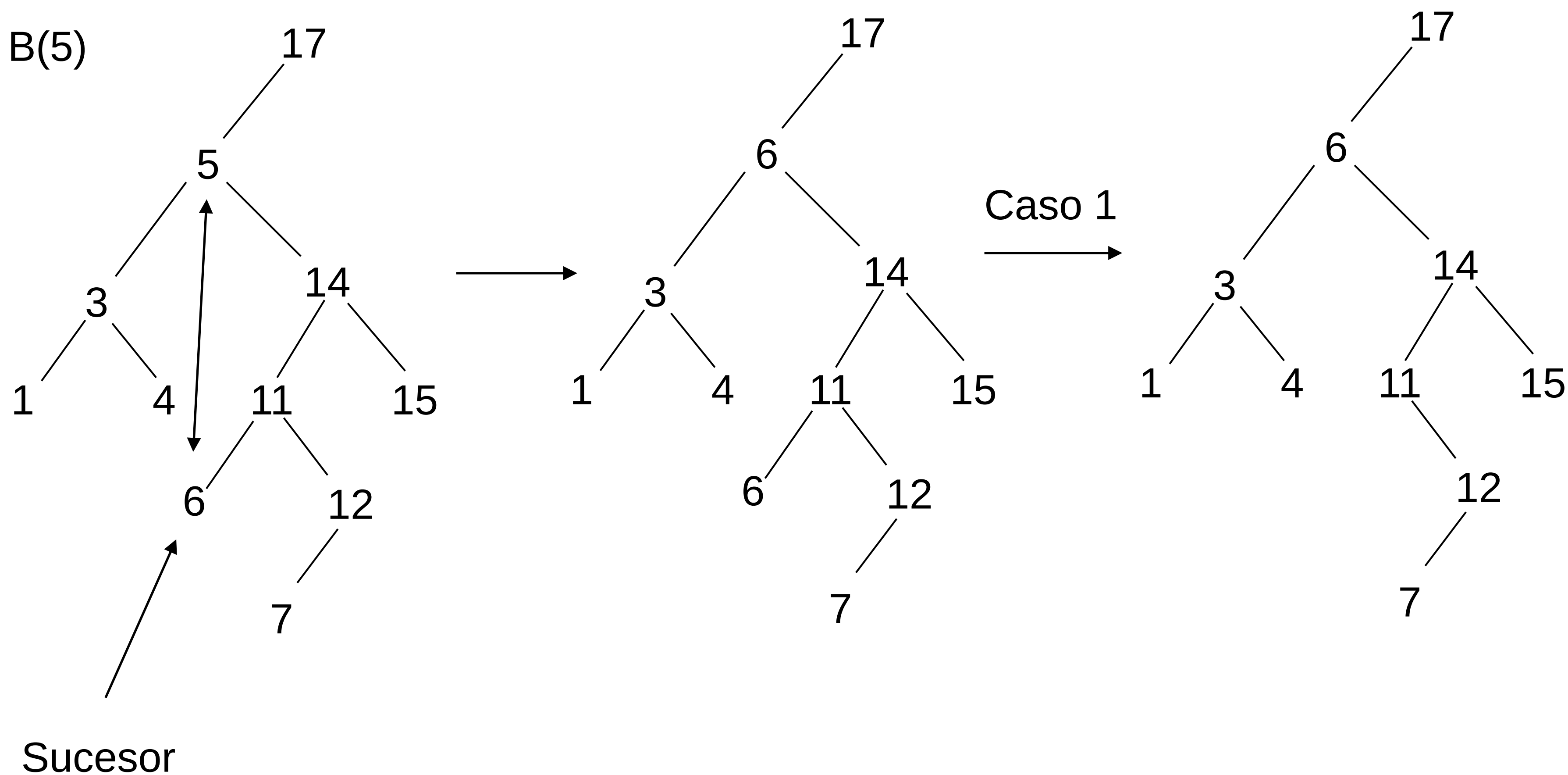
Eliminar y Reajustar II

- Caso 2: El nodo a eliminar tiene **sólo un hijo**
  - el puntero del padre de T’ que apuntaba a T’ se hace apuntar al único hijo de T’ y
  - se libera T’
- Coste EliminaryReajustar = O(1)



Eliminar y Reajustar III

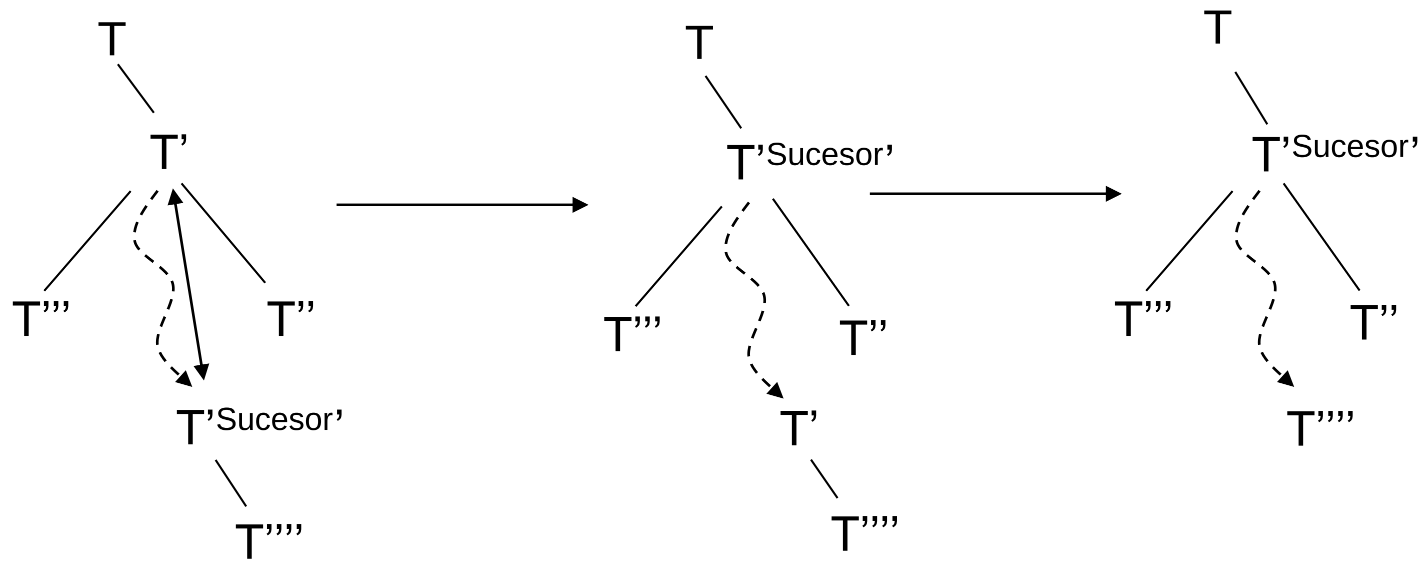
- Caso 3: El nodo a eliminar tiene **dos hijos**



Eliminar y Reajustar IV

- Cuando el nodo a eliminar tiene **dos hijos**
  - T' se sustituye por el nodo que contiene al **sucesor** (el elemento siguiente en la tabla ordenada), y
  - se elimina el nodo T' según el caso 1 o 2.

- Coste EliminaryReajustar ≤ prof(T)



Búsqueda del Sucesor

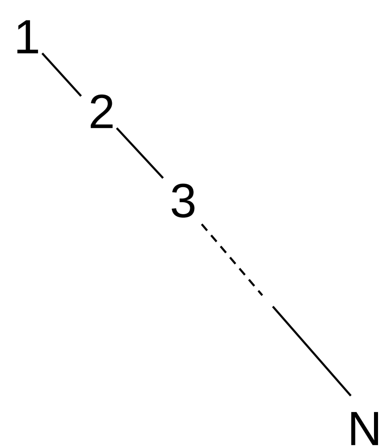
- Pseudocódigo

```
AB BuscarSucesor(AB T’)
  T’’=der(T’);
  mientras izq(T’’)!=NULL :
     T’’=izq(T’’);
  return T’’ ;
```

- **Obs:** Si k’ es el sucesor en un ABdB de k, entonces **izq(k’)==NULL**:
  - Si izq(k’)==k’’ se tendria que k’’<k’
  - Pero k’’>k, pues k’’ está a la derecha de k
  - Luego se tiene que k<k’’<k’ y
  - Por tanto, k’ **no puede ser el sucesor** de k.

Eficacia de Primitivas sobre ABdB

- $n_{EyR}(T',T) = n_{BuscarSucesor} + n_{ReajustarPunteros} =$
  $= O(prof(T)) + O(1) = O(prof(T))$
- Por tanto
  $n_{Borrar}(k,T) = \underbrace{O(prof(T))}_{\text{Buscar}} + \underbrace{O(prof(T))}_{\text{EyR}} = O(prof(T))$
- ABdB es eficaz siempre que prof(T)= $\Theta(\lg(N))$
- Pero sobre todos los árboles $W_{Buscar}(N)=N$: **¡¡malo!!**



Coste medio de búsqueda en ABdBs I

- $A^e_{Buscar}(N)$= coste medio de **(1)** la búsqueda de todos los elementos **(2)** para todos los Tσ

$$A^e_{Buscar}(N) = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N} A^e_{Buscar}(T_\sigma) = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_{Buscar}(\sigma(i), T_\sigma)$$

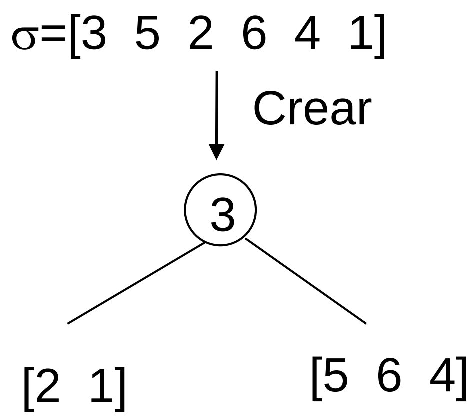
$$= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[prof(\sigma(i))+1] = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N}[1+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} prof(\sigma(i))]$$

$$= 1+\frac{1}{N}\times\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N}\sum_{i=1}^{N} prof(\sigma(i))] = 1+\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\Sigma_N} n_{Crear}(T_\sigma)\right)$$

Por tanto $\boxed{A^e_{Buscar}(N) = 1+\frac{1}{N}A_{Crear}(N)}$

Coste medio de búsqueda en ABdBs II

- Vemos a un pseudocódigo **alternativo** para Crear



AB Crear (tabla σ)
  T=IniAB(σ);
  InsAB(σ(1),T);
  Repartir(σ, σ_i, σ_d);
  T_i=Crear(σ_i);
  T_d=Crear(σ_d);
  izq(T)=T_i;
  der(T)=T_d;
  return T;

Caso similar a QS:

$n_C(\sigma)=N-1+n_C(\sigma_i)+n_C(\sigma_d)$

$$\Downarrow$$

$$A_{Crear}(N)=2N\log(N)+O(N)$$

Por tanto:

$$A^e_{Buscar}(N)=1+\frac{1}{N}A_{Crear}(N)=1+\frac{1}{N}\left[2N\log(N)+O(N)\right]=\Theta(\log(N))$$

Resumen de primitivas sobre ABdBs

- Si B es un algoritmo general de Búsqueda por cdc

$$W_B(N)=\Omega(\lg(N))$$

- Si la EdD es un ABdB las primitivas son eficaces **en promedio**
- Si aseguramos que para todo $\sigma\in\Sigma_N$ se tiene un ABdB tal que prof(T_σ)=$\Theta(\lg(N))$ tendríamos que

$$\mathbf{W_{Buscar}(N)=\Theta(\lg(N))}$$

En esta sección hemos …

- Introducido el concepto de diccionario y sus primitivas
- Estudiado su implementación sobre ABdBs
- Comprobado que su coste viene determinado por la profundidad del ABdB
- Comprobado que dicha implementación es óptima en el caso medio
- Comprobado que en el caso peor dicha implementación tiene un coste $\Theta(\lg(N))$

Herramientas y técnicas a trabajar

- La construcción y uso de Árboles Binarios de Búsqueda
- Eliminación de nodos en ABdBs
- Problemas a resolver (al menos): los recomendados de la sección 11

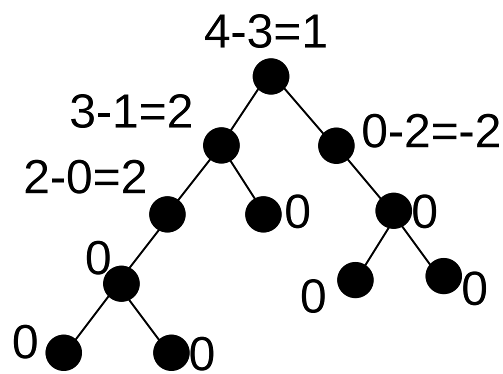
3.3 Árboles AVL

Árboles AVL (Adelson-Velskii-Landis)

- **Definición:** El factor de equilibrio de un nodo T en un ABdB se define

$$\boxed{FE(T)=prof(T_i)-prof(T_d)=alt(T_i)-alt(T_d)}$$

- **Ejemplo:**



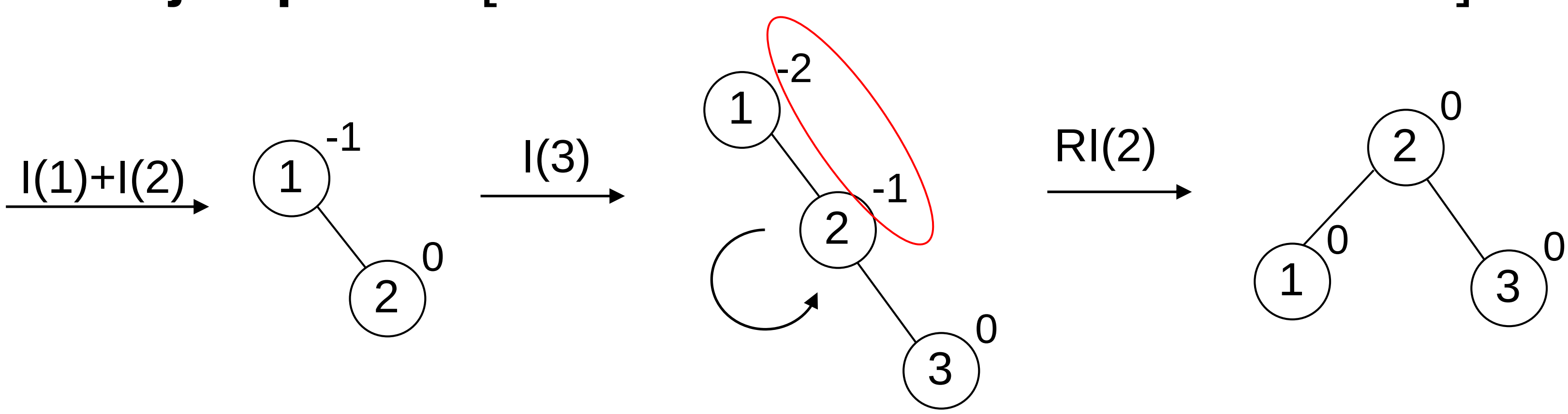
- **Definición:** Un AVL T es un ABdB tal que $\forall$ subárbol T'de T se verifica

$$\boxed{FE(T')=\{-1,0,1\}}$$

Construcción de AVLs

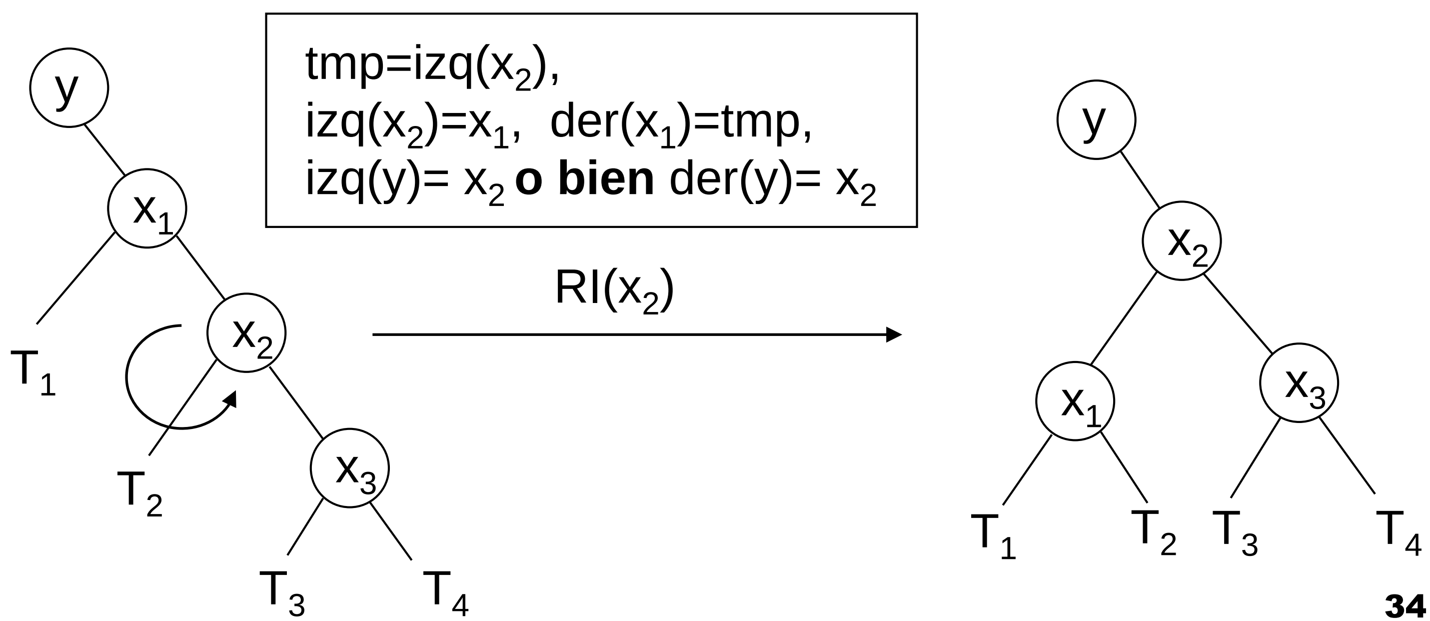
- Para construir un AVL se procede en 2 pasos.
  - Paso 1: Se realiza la inserción **normal** de un nodo en un ABdB
  - Paso 2: Si es necesario se corrigen desequilibrios y una vez corregidos, se vuelve al paso 1

Ejemplo: T=[1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12 11 10 9 8]



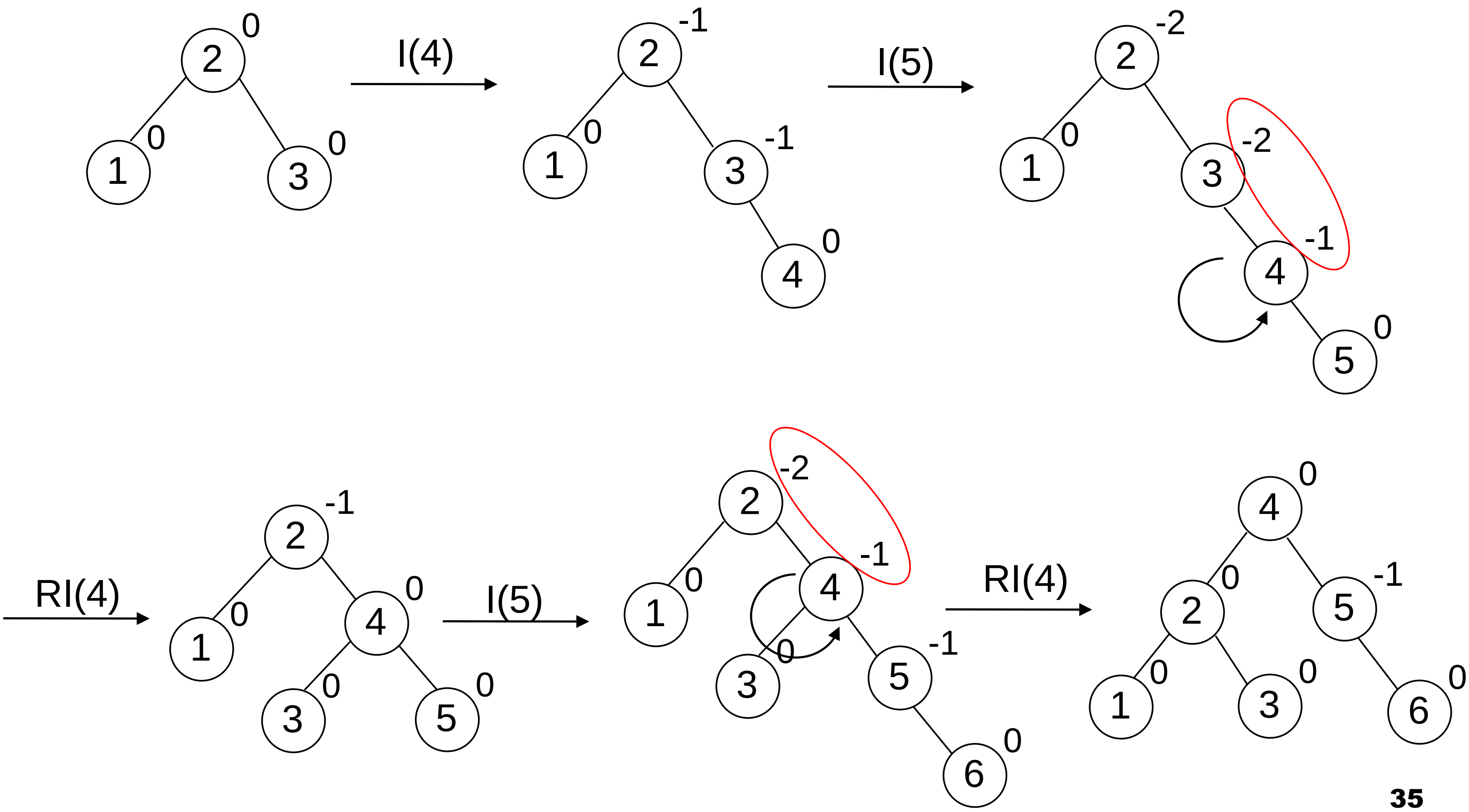
Construcción de AVLs

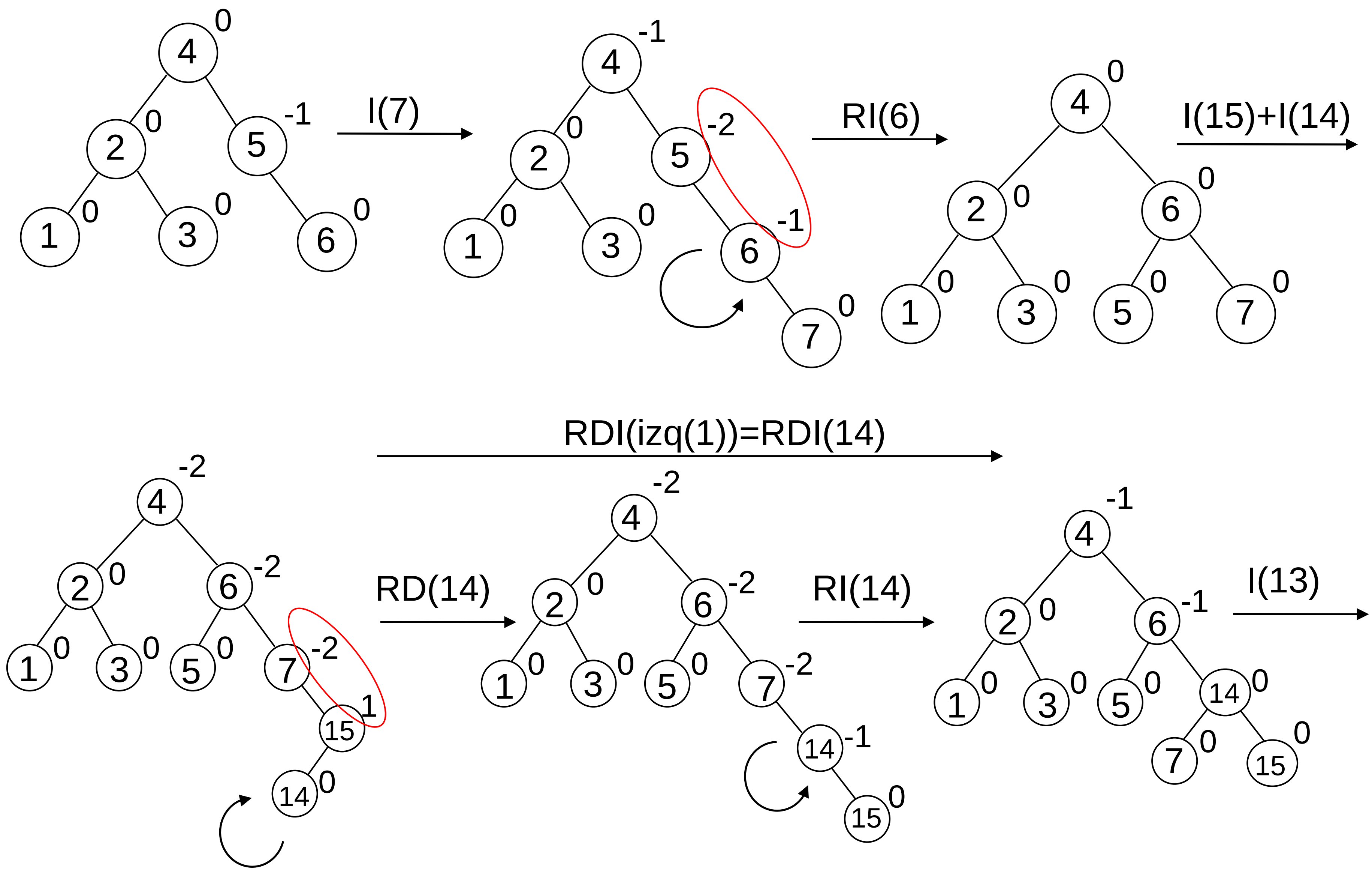
- La operación que acabamos de hacer se denomina **Rotación a la Izquierda en el -1,** en este caso en el elemento 2.
- En realidad la rotación a la izquierda en el -1 corresponde a la siguiente reasignación de punteros

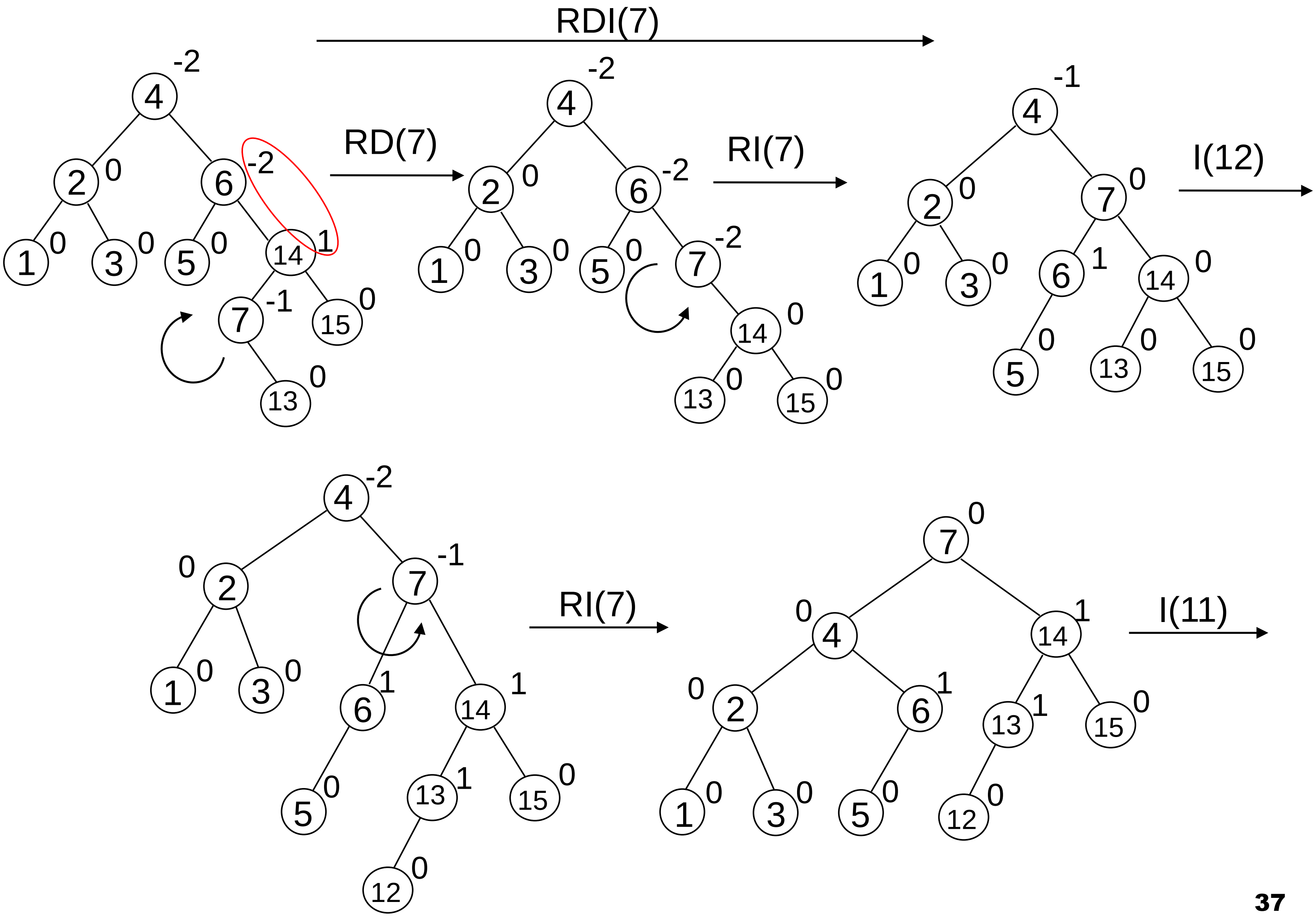


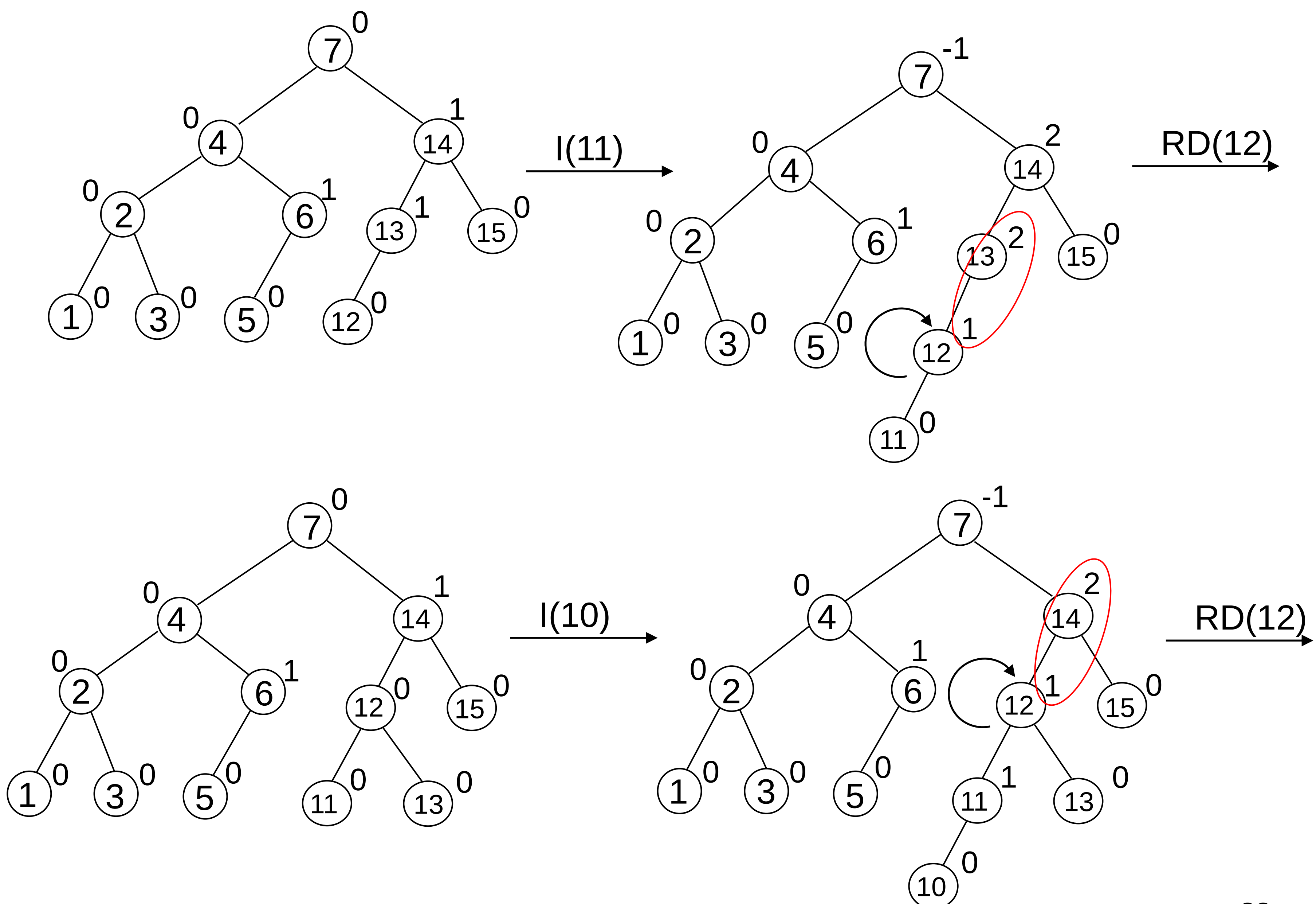
Construcción de AVLs

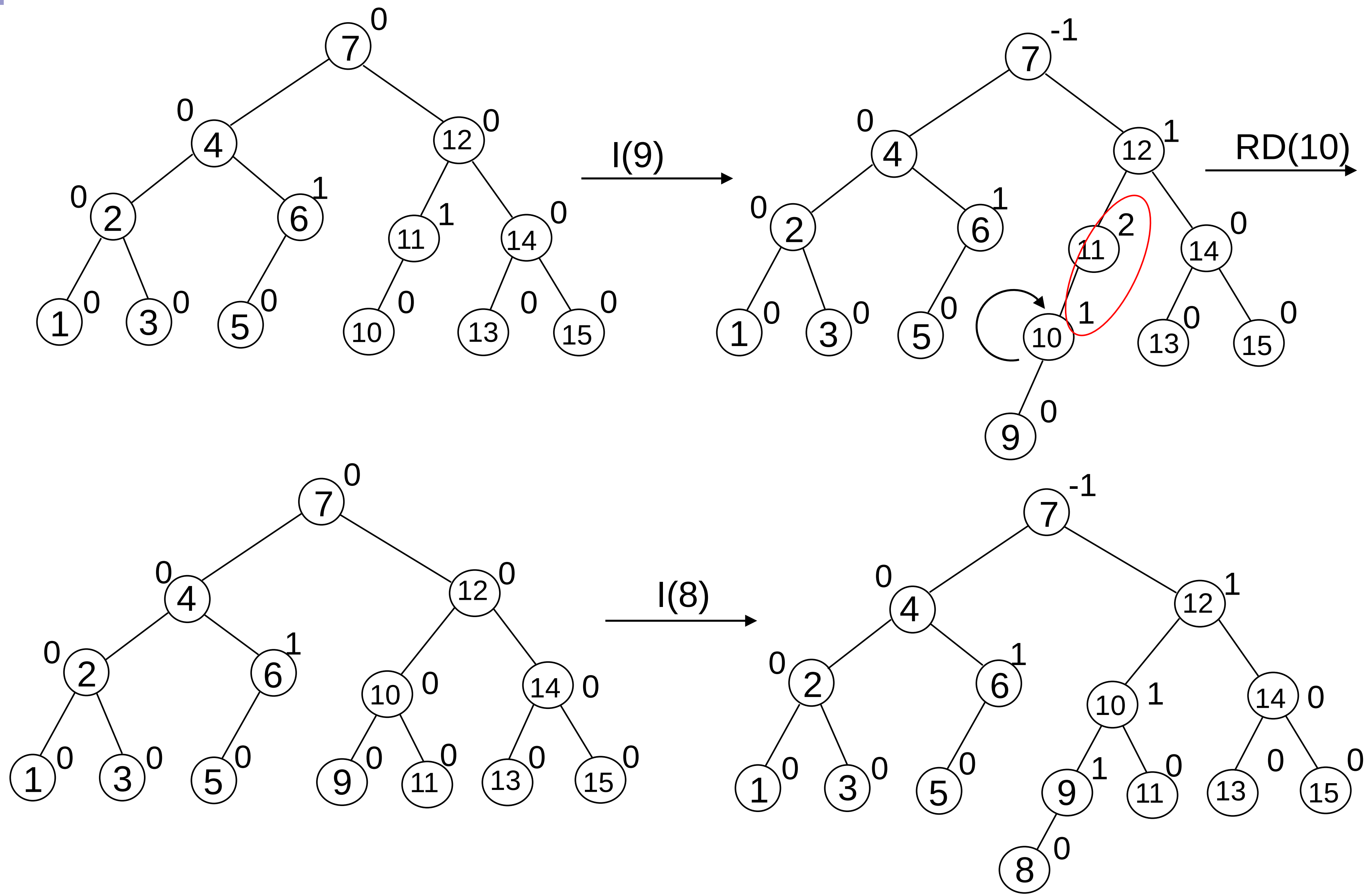
- Seguimos el proceso




I(7)
RI(6)
I(15)+I(14)
RDI(izq(1))=RDI(14)
RD(14)
RI(14)
I(13)


RDI(7)
RD(7)
RI(7)
I(12)
RI(7)
I(11)


I(11)
RD(12)
I(10)
RD(12)



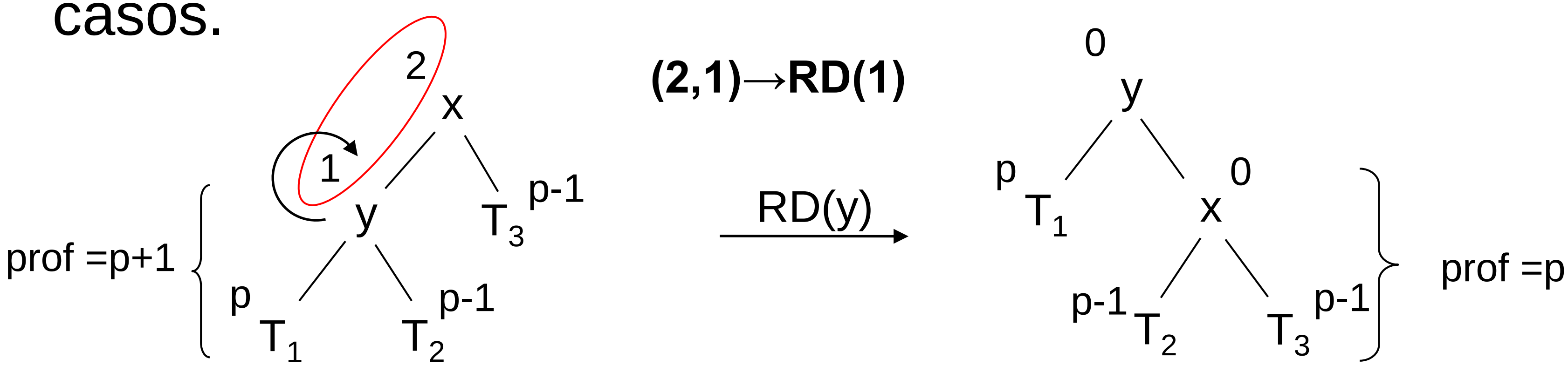
Hemos construido el AVL

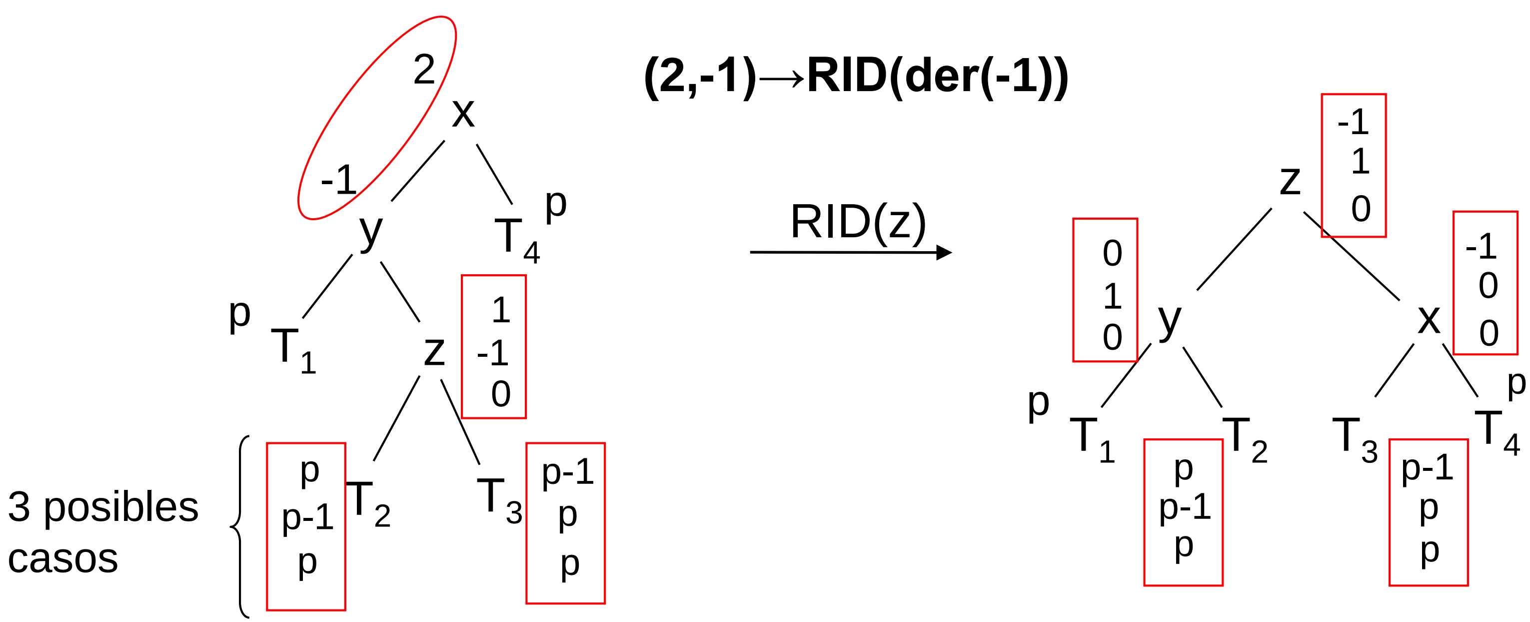
Resumen de rotaciones

Tipo de desequilibrio	Rotación
(-2,-1)	Rot Izquierda en -1 (hijo izq de -1 pasa a hijo der de -2)
(2,1)	Rot Derecha en 1 (hijo der de 1 pasa a hijo izq de 2)
(-2,1)	Rot Derecha Izquierda en izquierda de 1 RotIzq(izq(1))+ RotDer(izq(1))
(2,-1)	Rot Izquierda Derecha en derecha en -1 RotDer(der(-1))+ RotIzq(der(-1))

Funcionamiento de las rotaciones I

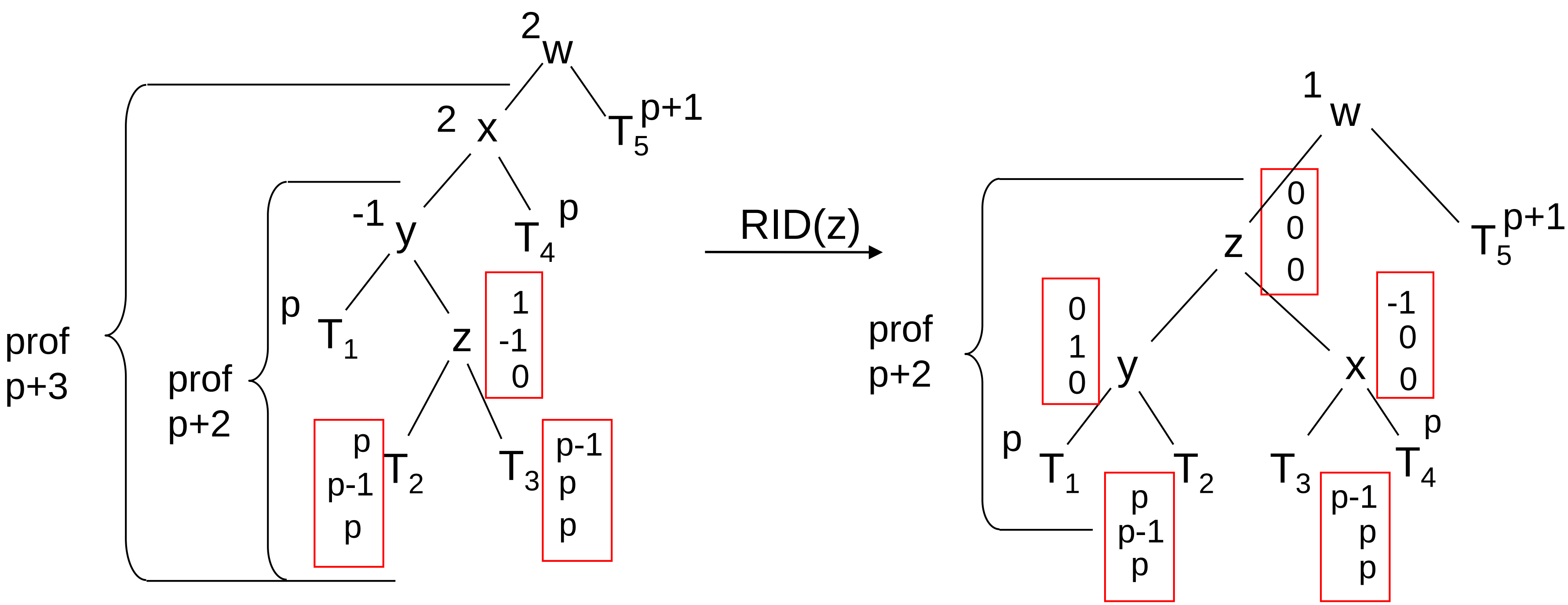
- Para ver que efectivamente las rotaciones solucionan los desequilibrios es necesario ver cada uno de los casos.





Funcionamiento de las rotaciones II

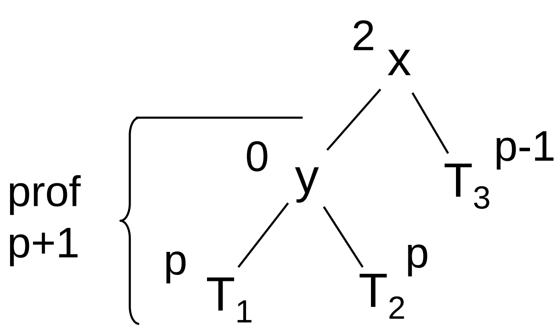
- **Observación:** Las rotaciones resuelven desequilibrios de tipo $\pm$ 2, situados mas arriba del desequilibrio ($\pm$2, $\pm$1)



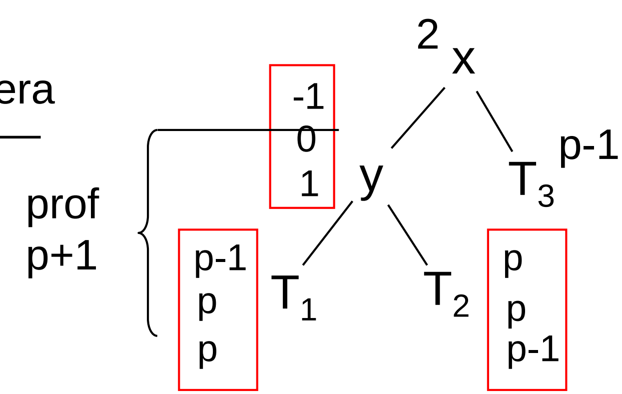
Funcionamiento de las rotaciones III

- **Observación:** Si se tiene un AVL, tras la inserción de un elemento no pueden darse desequilibrios de la forma (±2, 0).

Supongamos que tras una inserción tenemos



Con lo cual la situación
Antes de insertar el nodo era



¡ No era AVL !

El nodo debió insertarse
en uno de estos dos subárboles

Profundidad de Árboles AVL

- **Proposición:** Si T es un AVL con N nodos entonces

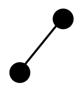
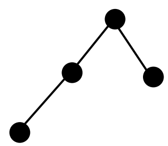
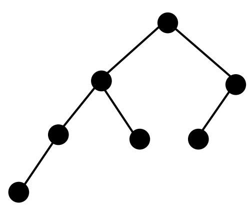
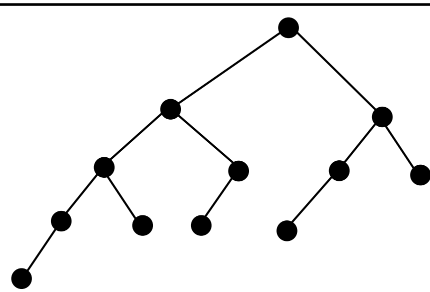
$$\boxed{prof(T)=O(\log(N))}$$

- Dado que para cualquier árbol binario con N nodos se tiene que $prof(T)=\Omega(\log(N))$, tenemos que si T es AVL entonces

$$\boxed{prof(T)=\Theta(\log(N))}$$

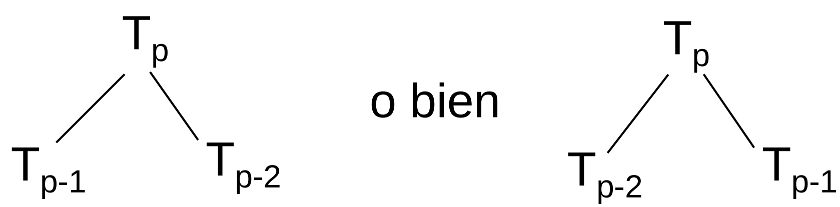
- Para ver lo anterior vamos a estimar el número mínimo de nodos $\mathbf{n_p}$ de un AVL $\mathbf{T_p}$ de profundidad **p**.

AVLs mínimos

p	AVL	n_p	n_p+1	F_{p+2}
0		1	2	F_2
1		2	3	F_3
2		4	5	F_4
3		7	8	F_5
4		12	13	F_6
...			....	....

AVL de Fibonacci I

- F_p es el p-ésimo número de Fibonacci.
- Los números de Fibonacci verifican:
  - $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, con $F_0=F_1=1$
- Los AVL T_p se construyen



- $\mathbf{n_p} = 1 + \mathbf{n_{p-1}} + \mathbf{n_{p-2}}$, **y** por tanto se tiene

$$\underbrace{1+\mathbf{n_p}}_{H_p} = \underbrace{1+\mathbf{n_{p-1}}}_{H_{p-1}} + \underbrace{1+\mathbf{n_{p-2}}}_{H_{p-2}}$$

Obs:
$H_0=1+n_0=2=F_2$,
$H_1=1+n_0=3=F_3$

- Por tanto $n_p+1= H_p= F_{p+2}$

AVL de Fibonacci II

- Se puede demostrar que el N-simo número de Fibonacci es

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underbrace{\Phi^{N+1}}_{\substack{\downarrow N\to\infty \\ \infty}} - \underbrace{\Psi^{N+1}}_{\substack{\downarrow N\to\infty \\ 0}}\right) \text{donde } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ya que $\Phi>1$ y $|\Psi|<1$

- Con lo cual se tiene $F_N \approx (1/\sqrt{5})\Phi^{N+1}$ y como $n_p = F_{p+2}-1$ obtenemos

$$\boxed{n_p \approx \frac{\Phi^3}{\sqrt{5}}\Phi^p = C\Phi^p,}$$

donde p es la profundidad y C una constante

Profundidad de un AVL II

- Entonces si T es un AVL con N nodos y profundidad p, se sigue que

$$N \geq n_p \approx C\Phi^p$$

- Esto es, se tiene que

$$\lg(N) \geq \lg(n_p) = \Omega\,(p \cdot \lg(\Phi)) = \Omega\,(p) = \Omega\,(\mathrm{prof}(T))$$

es decir

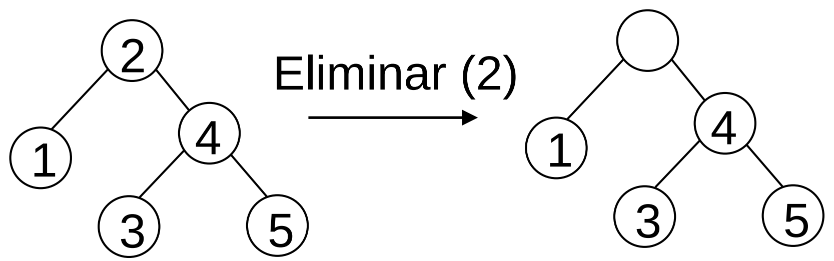
$$\mathrm{prof}(T) = p = O(\lg(n_p)) = O(\log(N))$$

- Y por tanto, el coste de Buscar sobre un AVL es **O(lg(N)) en el caso peor**

Conclusión

- Si usamos un AVL como EdD para un diccionario, tanto **Buscar** como **Insertar** tienen un coste O(log(N)) en el caso peor.
- ¿Qué ocurre con **Borrar**?
  - No es fácil reajustar los nodos de un AVL después de haber eliminado un nodo.
  - La solución habitual es realizar un **Borrado Perezoso:** en lugar de eliminar el nodo, se marca como libre, además si el elemento se reinserta, la inserción es muy fácil y rápida.

Ejemplo:



  - El inconveniente de este método es que se pierden posiciones de almacenamiento

En esta sección hemos aprendido…

- El concepto de árbol AVL.
- A construir un árbol AVL insertando como en ABdBs y corrigiendo desequilibrios mediante rotaciones
- A estimar el número mínimo de nodos de un AVL de profundidad P
- La relación de lo anterior con los números de Fibonacci y algunas propiedades de estos
- Que la profundidad de un AVL con N nodos es O(lg(N))
- Que el caso peor de búsqueda en un AVL es O(lg(N))

Herramientas y técnicas a trabajar

- Construcción y propiedades de árboles AVL
- Construcción y propiedades de árboles de Fibonacci
- Problemas a resolver (al menos): los recomendados de la sección 12

3.4 Hashing

Ordenación y búsqueda

- A grandes rasgos, los costes de búsqueda son 1/N veces los de ordenación

	Ordenación	Búsqueda
Métod. malos	$O(N^2)$	O(N)
Métod. Buenos	O(N lg N)	O(lgN)
Límite	O(N)	O(1)

Ordenación y búsqueda II

- ¿Es posible hacer búsquedas en tiempo inferior a O(log(N))?
  1. Imposible mediante comparaciones de clave
  2. Pero muy fácil cambiando el punto de vista!!
- Escenario:
  1. TAD diccionario con $\mathcal{D}$={datos **D**}.
  2. Cada dato **D** tiene una clave única **k=k(D)**.
  3. Buscamos **por** claves pero **no mediante** claves (no cdcs).

Idea 1

1. Calculamos $k^*=\max\{k(D): D\in\mathcal{D}\}$
2. Guardamos cada D en una tabla T de tamaño k* (suponiendo que no hay claves repetidas).

   Pseudocódigo:

```
ind Buscar(dato D, tabla T)
   si T[k(D)]==D
      return k(D);
  else
      devolver NULL
```

- Consecuencia: **nBuscar(k,D)=O(1) !!!**
- **Problema:** si k* es muy grande (aunque $|\mathcal{D}|$ sea pequeño), la cantidad de memoria necesaria para la tabla T es exagerada.

Idea 2

1. Fijamos $M \gtrsim |\mathbb{D}|$ y se define una función inyectiva (si, $k \neq k' \Rightarrow \kappa(k) \neq \kappa(k')$) $\kappa : \{k(D)/D \in \mathbb{D}\} \rightarrow \{1,2,3,\ldots,M\}$.
2. Situamos D en la posición $\kappa(k(D))$ de la tabla T.
3. Pseudocódigo de Buscar :

```
ind Buscar2(dato D, tabla T)
  si T[κ(k(D))]==D
    return κ(k(D));
  else
    devolver NULL
```

Obs: $n_{Buscar2}(k,D)=O(1)$

- Tiempo de búsqueda constante con un consumo de memoria no exagerado.
- Problema: muy difícil encontrar una función **inyectiva y universal** (independiente del conjunto de claves).

Idea 3

1. Buscamos una función **k** universal (válida para cualquier conjunto de claves).
2. Somos flexibles con la inyectividad de **k**:

   Permitimos que **k** no sea inyectiva, luego dos datos distintos pueden optar a ocupar la misma posición en la tabla T, pero

   a) Imponemos que el número de **colisiones,** esto es, pares k≠k' pero **k**(k)=**k**(k') sean pocos.

   b) Implementamos algún mecanismo de resolución de colisiones

1. Cuestiones abiertas:

   a) Cómo encontrar una tal **h**

   b) Cómo resolver colisiones

Funciones hash

- Objetivo: probabilidad pequeña de colisiones
- Si T tiene M datos, lo óptimo sería que

  p(colisión)=1/M
- Idea: h(D) = valor al lanzar un dado de M caras pero
  - Cada vez que aparece D el dado lo puede enviar a posiciones distintas!!
  - Luego queremos que h(k(D)) siempre valga lo mismo para cada k(D) particular.
- Esto es, queremos que h sea **función** y **aleatoria,** como rand() en C
- Q: ¿cómo construir funciones aleatorias?

Hash por división

- Dado un diccionario $\mathcal{D}$ fijamos un número **m**>|$\mathcal{D}$|, que sea primo.
- Definimos **h(k)=k%m**
- Con alguna condición adicional sobre **m**, se puede conseguir que para valores k_j aleatorios, los valores $h(k_j)$ también lo parezcan
  - Esto es, superan diversos tests de aleatoriedad

Hash por multiplicación

- Fijamos un número **m**>|D|, no necesariamente primo (por ejemplo 2^k o 10^k) y un número Φ irracional (p. ej. $(1+\sqrt{5})/2$ ó $(\sqrt{5}-1)/2$)
- Definimos

$$\mathbf{h(k)=\lfloor m\cdot(k\cdot\Phi)\rfloor},$$

con (x) la parte fraccionaria de x: $\mathbf{(x)=x-\lfloor x\rfloor}$

- De nuevo se puede conseguir que para valores k_j aleatorios, los valores $h(k_j)$ también lo parezcan
- Cuestión pendiente: **cómo resolver colisiones**.

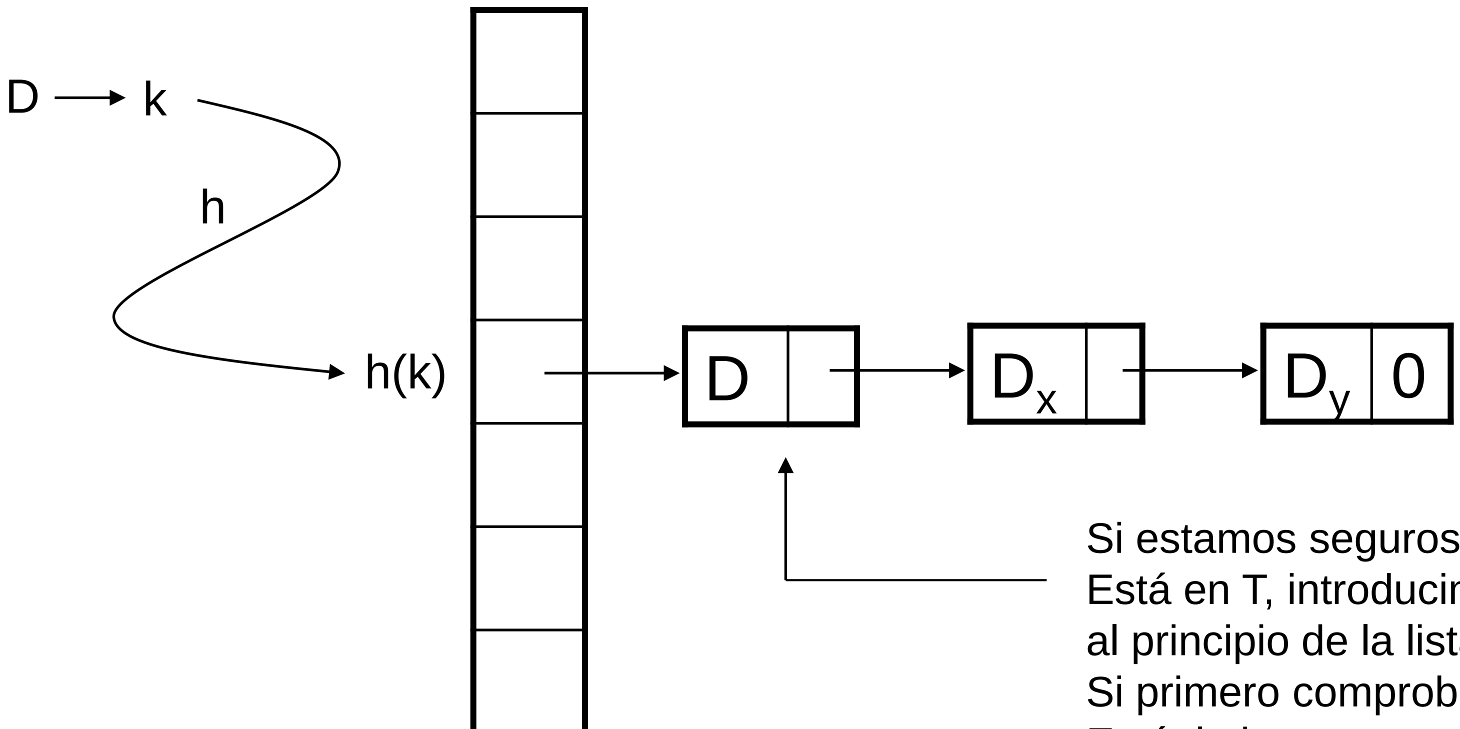
Función hash uniforme

- **Definición:** Decimos que una función hash h es **uniforme** si

  Dados k,k' con $k \neq k'$, entonces $p(h(k)=h(k'))=1/m$
- Las funciones hash uniforme son "ideales".
  1. No se pueden conseguir por medios algorítmicos.
  2. Pero el rendimiento para ellas es óptimo.
- Las usaremos para simplificar los análisis teóricos que siguen

Resolución por Encadenamiento

- En el hash por encadenamiento, usamos como tabla hash una **tabla de punteros a listas enlazadas**



Si estamos seguros de que D no Está en T, introducimos el dato D al principio de la lista enlazada. Si primero comprobamos que no Está, lo insertamos al final

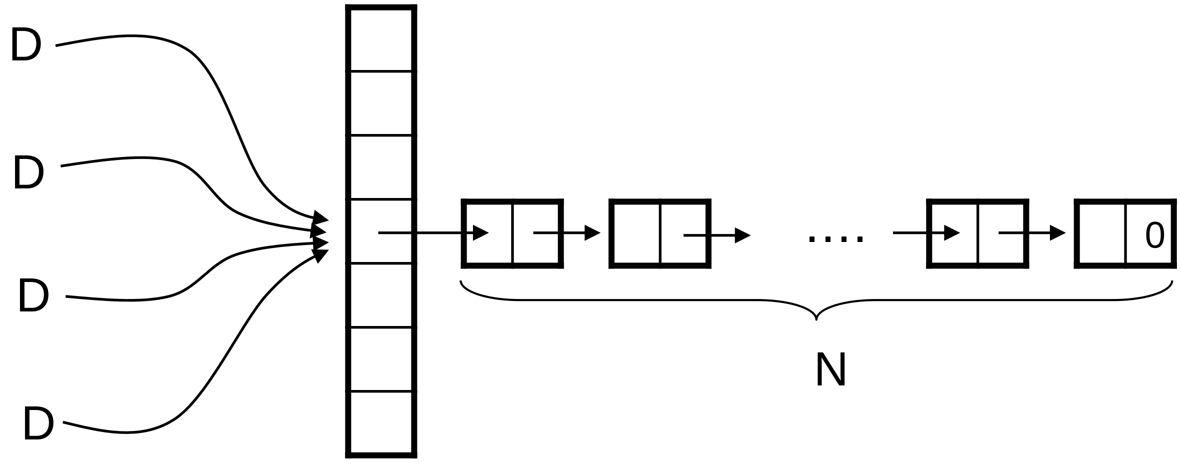
Buscar en Encadenamiento

- Pseudocódigo: Blin en lista enlazada.

```
ind Buscar(dato D, tabla T)
    return BLin(D,T[h(k(D))]);
```

- Coste ya no O(1), pues en **BLin** hay un bucle

- Además W_{BLin} (N)=N si para todo k, h(k) = h_0



Obs: Esta situación puede pasar, pero debería ser muy poco probable si la función hash está bien construida.

Encadenamiento con hash uniforme I

- **Proposición:** Sea h función hash uniforme en tabla hash con encadenamiento y dimensión **m** y sean **N** los datos a introducir; entonces:

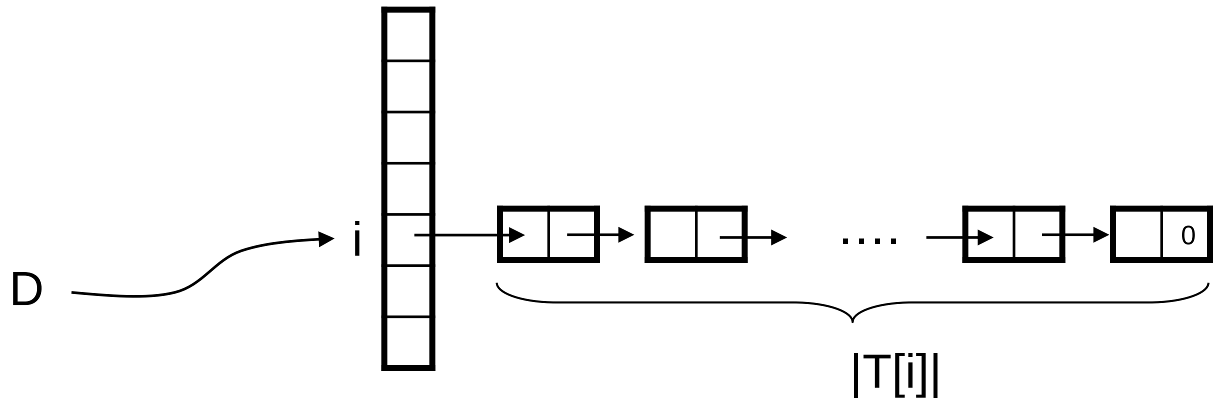
$$(i) \quad A^{f}_{BHE}(N,m) = \frac{N}{m} = \lambda \longleftarrow \text{Factor de carga}$$

$$(ii) \quad A^{e}_{BHE}(N,m) = 1 + \frac{\lambda}{2} + O(1)$$

- λ se denomina el **factor de carga:** cuanto mayor es, tanto más costosa es la búsqueda

Coste medio en búsqueda sin éxito

- **Demostración (i):** Sea **D** un dato que no esta en la tabla hash y sea h(k(D))=h(D)=i, sea n_{BHE}(D,T)=|T[i]| (número de elementos en la lista enlazada de la posición i de la tabla hash).



$$\Rightarrow A^{f}_{BHE}(N,m)=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{p(h(D)=i)}_{h\text{ uniforme}}|T[i]|=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|T[i]|=\frac{N}{m}=\lambda$$

Coste medio en búsqueda con éxito

- **Demostración (ii):** ***Vamos a reducir la búsqueda con éxito a una búsqueda sin éxito en una tabla más pequeña***.
- Para ello numeramos los datos de la tabla T, según el orden en el que los introducimos en la tabla T, $\{D_1, D_2, \ldots, D_j, \ldots, D_N\}$
- Además denotamos por T_i al estado de la tabla T **antes** de introducir el elemento D_i (la tabla T_i tiene los elementos $D_1, D_2, \ldots, D_{j-1}$),
- Por tanto D_i **no está** en T_i, con lo cual se tiene:

$$\underbrace{n^e_{BHE}(D_i, m; T)}_{\text{búsqueda con éxito}} = 1 + \underbrace{n^f_{BHE}(D_i, m; T_i)}_{\text{búsqueda sin éxito}}$$

Búsqueda con éxito=
1+Búsqueda sin éxito

Nota: aquí asumimos que cada elemento $\mathbf{D_i}$ se inserta al final de la lista enlazada.

Coste medio en búsqueda con éxito II

- Asumimos la aproximación

$$n^e_{BHE}(D_i, m) \cong 1 + A^f_{BHE}(i-1, m) = 1 + \frac{i-1}{m} \longleftarrow$$

Factor de carga en T_i

entonces

$$A^e_{BHE}(N,m) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n^e_{BHE}(D_i,m) \cong \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(1+\frac{i-1}{m}\right) = 1 + \frac{1}{Nm}\sum_{j=1}^{N-1} j =$$

$$= 1 + \frac{1}{Nm}\frac{N(N-1)}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{N}{m} - \frac{1}{2m} = 1 + \frac{\lambda}{2} + O(1)$$

$$A^f_{BHE}(N,m) = \frac{N}{m} = \lambda$$

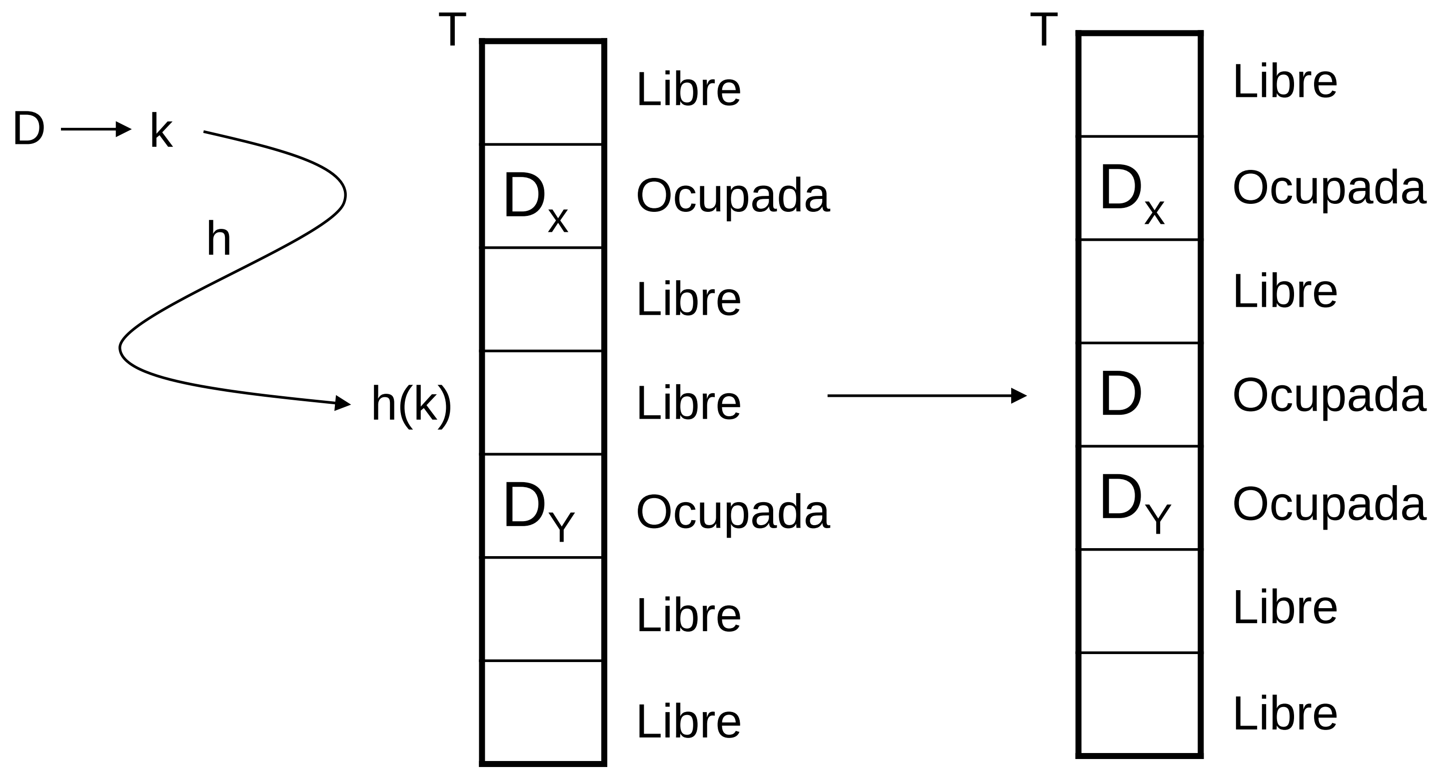
$$A^e_{BHE}(N,m) = 1 + \frac{\lambda}{2} + O(1)$$

Obs: Si la función hash es uniforme se obtienen búsquedas en tiempo constante si $\lambda=\Theta(1)$, lo cual ocurre si $N \cong m$. Por ejemplo si N=200 y m=100

$A^f \cong 200/100=2$ $\quad$ $A^e \cong 1+2/2=2$

Hashing por direccionamiento abierto

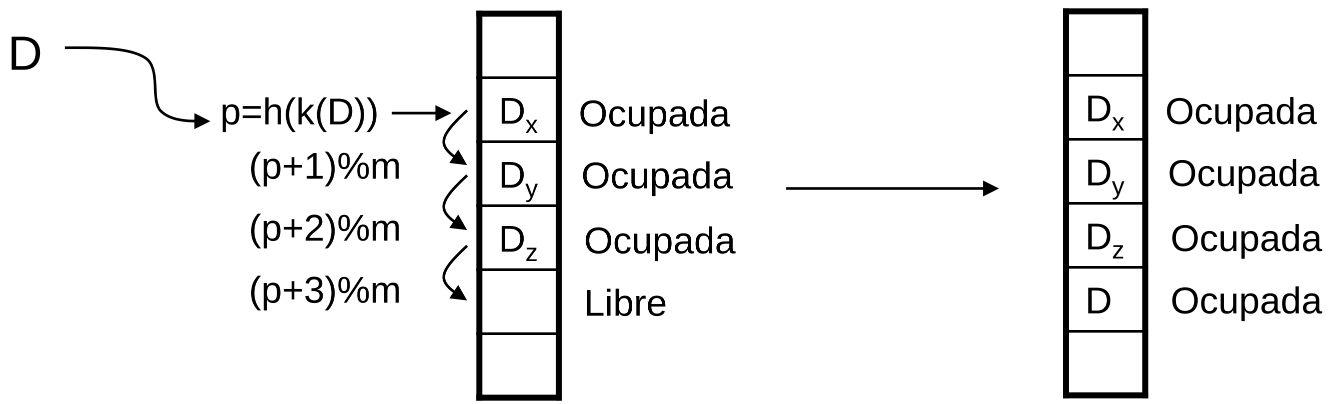
- En el hash por direccionamiento abierto la tabla T contiene los datos



- ¿Qué hacemos cuando la función hash nos asigna una casilla que está ya ocupada (colisión)?

Colisiones en direccionamiento abierto

- Hay varios métodos para resolución de colisiones en direccionamiento abierto mediante repetición de sondeos
- **Sondeos lineales:** Si la posición **p=T[h(D)]** está ocupada, se intenta colocar **D** sucesivamente el las posiciones **(p+1)%m, (p+2)%m,…., ** hasta llegar a un **i** donde la posición **(p+i)%m** está libre.



Colisiones en direccionamiento abierto

- **Sondeos cuadráticos:** Igual que los sondeos lineales pero intentando en las posiciones **$p=(p+0^2)\%m$, $(p+1^2)\%m$, $(p+2^2)\%m$,….,** hasta que para algún **i**, **$(p+i^2)\%m$** esté libre**.**
- **Sondeos aleatorios:** Intentamos las posiciones, **p_1, p_2, p_3,….,p_i** obtenidas aleatoriamente
  - Este método es inviable en la práctica
  - Pero es la situación "ideal" en tablas hash
  - Facilita el cálculo del rendimiento de las búsquedas.

Diferencias en los métodos

- **Obs 1:** En hash con encadenamiento, la posición de un dato D, siempre será una posición fija de la tabla (h(k(D)), En hash con direccionamiento abierto, la posición de D dependerá h(k(D) y **del estado de la tabla** en el momento de la Inserción.
- **Obs 2:** En hash con encadenamiento λ (=N/m), puede ser >1.

  En hash con direccionamiento abierto siempre se tiene $N \leq m$, y por tanto $\boldsymbol{\lambda \leq 1}$.

  En la práctica se usa N< m y $\lambda <1$ (por ejemplo m=2*N y $\lambda=0.5$).

Coste medio con sondeos aleatorios I

- **Proposición:** Sea h función hash uniforme en tabla hash con direccionamiento abierto y sondeos aleatorios. Entonces:

$$(i) \quad A_{SA}^{f}(N,m) = \frac{1}{1-\lambda}$$

$$(ii) \quad A_{SA}^{e}(N,m) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1-\lambda}$$

Obs 1: $\text{Si } \lambda \to 1 \text{ entonces } A_{SA}^{f}(N,m) \to \infty$

Obs 2: $\text{Si } \lambda \to 1 \text{ entonces } A_{SA}^{e}(N,m) \to \infty$

Nota: Estos dos resultados se dejan como ejercicio.

Coste medio en búsqueda sin éxito

- Demostración (i): Sea T una tabla hash con DA, de dimensión m y N datos. Como h es uniforme se tiene, dado un dato **D**

N datos en una
Tabla de tamaño m

$$p(T[h(D)] \text{ ocupada}) = N/m = \lambda$$

$$p(T[h(D)] \text{ libre}) = 1-\lambda$$

$$\Rightarrow A_{SA}^{f}(N,m) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(\text{hacer k sondeos}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \lambda^{k-1}(1-\lambda) =$$

nº de sondeos hechos

Para hacer k sondeos tiene que ocurrir $\left\{ \begin{array}{l} \text{k-1 posiciones ocupadas} \end{array} \right.$ y $\left. \begin{array}{l} \text{1 posición libre} \end{array} \right\} \Downarrow$

p(hacer k sondeos) $=\lambda^{k-1}(1-\lambda)^{1}$

$$= (1-\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \lambda^{k-1} = (1-\lambda) \frac{d\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k}\right)}{d\lambda} = (1-\lambda) \frac{d\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)}{d\lambda} = (1-\lambda) \frac{1}{(1-\lambda)^{2}} = \frac{1}{1-\lambda}$$

Coste medio en búsqueda con éxito I

- **Proposición (ii):** $$A^e_{SA}(N,m) = \frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{1-\lambda}$$
- **Demostración:** De nuevo **vamos a reducir la búsqueda con éxito a una búsqueda sin éxito en una tabla más pequeña**.
- Al igual que en BHE enumeramos los datos de la tabla T, según el orden en el que los introducimos en la tabla T, $\{D_1, D_2, \ldots, D_j, \ldots, D_N\}$, y denotamos por T_i al estado de la tabla T antes de introducir el elemento D_i.

Obs: Si $n^e_T(D_i)$ es el número de sondeos necesarios para **encontrar** (= al numero necesario para **insertar**) el elemento D_i en la tabla T_i tenemos que

$$n^e_T(D_i) = n^f_{T_i}(D_i) \cong A^f_{SA}(i-1, m)$$

Coste medio en búsqueda con éxito II

- Por tanto se tiene:

$$A_{SA}^{e}(N,m)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}n_{T}^{e}(D_i)\cong\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{i-1}{m}}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{1-\frac{j}{m}}$$

Esta última expresión se puede aproximar mediante una integral, con lo que se tiene:

$$A_{SA}^{e}(N,m)\cong\frac{1}{N}\int_0^N\frac{1}{1-\frac{x}{m}}dx=\frac{1}{N/m}\int_0^{N/m}\frac{1}{1-u}du=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\frac{1}{1-u}du$$

Cambio de variable.
u=x/m ⇒ dx=m·du

Esta integral es inmediata, con lo que se obtiene:

$$A_{SA}^{e}(N,m)\cong\frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{1-\lambda}$$

Costes medios para otros sondeos I

- En la demostración anterior vemos que si tenemos la expresión del rendimiento de la búsqueda sin éxito

$$f(\lambda) = A_{SA}^{f}(N,m) = \frac{1}{1-\lambda}$$

podemos calcular el rendimiento de la búsqueda con éxito calculando

$$A_{SA}^{e}(N,m) \cong \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(u)du = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} \frac{1}{1-u}du$$

- Este argumento lo podemos repetir con cualquier tipo de sondeo **S** con direccionamiento abierto, es decir

$$\boxed{\text{Si } \; A_{S}^{f}(N,m) = f(\lambda) \quad \text{entonces} \quad A_{S}^{e}(N,m) \cong \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(u)du}$$

Costes medios para otros sondeos II

- Proposición: Si se usan sondeos lineales:

$$(i) A_{SL}^{f}(N,m) \cong \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1-\lambda)^2}\right)$$

$$(ii) A_{SL}^{e}(N,m) \cong \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1-\lambda)^2}\right)du = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1-\lambda}\right)$$

En esta sección …

- Hemos aprendido
  - El concepto de tabla hash.
  - Los mecanismos de construcción y búsqueda en una tabla hash.
  - El concepto de función hash uniforme
  - Algunos tipos universales de funciones hash (división y multiplicación).

En esta sección ……

- Y también
  - Los principales métodos de resolución de colisiones en una tabla hash: **encadenamiento** y **direccionamiento abierto**
  - Los principales métodos de **sondeo** en una tabla hash con **direccionamiento abierto.**
  - A estimar el **rendimiento medio** de las búsquedas con o sin éxito en el caso de **sondeos aleatorios**.
  - A reducir el rendimiento medio de las búsquedas **con éxito** al rendimiento de las búsquedas **sin éxito**.

Herramientas y técnicas a trabajar

- Funcionamiento y construcción de tablas hash
- Diseño de tablas hash que aseguren un cierto rendimiento
- Estimación de costes medios de búsquedas con éxito a partir de costes medios sin éxito
- Problemas a resolver (al menos): los recomendados de la sección 13