

# Apuntes de Álgebra Lineal

---

PROFESOR: Ricardo Visiers Bañón

**Octubre 2016**

<b>1</b>	<b>SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES .....</b>	<b>5</b>
1.1	Ecuaciones lineales.....	5
1.2	Sistemas de ecuaciones lineales .....	5
1.2.1	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales .....	6
1.3	Eliminación gaussiana y eliminación de Gauss-Jordan .....	8
1.3.1	Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás .....	10
1.3.2	Eliminación de Gauss-Jordan .....	11
1.4	Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales .....	12
<b>2</b>	<b>MATRICES Y DETERMINANTES .....</b>	<b>14</b>
2.1	Matrices. Definiciones .....	14
2.2	Operaciones con matrices .....	16
2.2.1	Suma de matrices .....	16
2.2.2	Multiplicación por un escalar .....	16
2.2.3	Producto de matrices .....	17
2.2.4	Propiedades de las operaciones con matrices.....	18
2.2.5	Matriz identidad, potencias de una matriz.....	19
2.2.6	Propiedades de la traspuesta.....	20
2.3	Inversa de una matriz.....	20
2.3.1	Cálculo de la matriz inversa por eliminación de Gauss-Jordan .....	22
2.3.2	Propiedades de la matriz inversa.....	23
2.3.3	Matrices y sistemas de ecuaciones lineales .....	25
2.3.4	Matrices elementales .....	27
2.3.5	LU-factorización .....	30
2.4	Determinantes .....	34
2.4.1	Definición de determinante de una matriz de $2 \times 2$ .....	34
2.4.2	Definición de los menores y cofactores de una matriz.....	35
2.4.3	Determinante de una matriz de orden 3.....	35
2.4.4	Determinante de una matriz de $n \times n$ .....	35
2.4.5	Cálculo de determinantes.....	36
2.4.6	Propiedades de los determinantes.....	39
2.4.7	Aplicaciones de los determinantes.....	42
<b>3</b>	<b>ESPACIOS VECTORIALES .....</b>	<b>45</b>
3.1	Espacios vectoriales .....	45
3.1.1	Propiedades de la multiplicación por un escalar .....	45
3.2	Subespacios vectoriales.....	46
3.2.1	Intersección de subespacios vectoriales.....	47
3.2.2	Subespacios de $R^n$ .....	47
3.2.3	Unión y suma de subespacios .....	48
3.2.4	Suma directa. Subespacios independientes .....	50
3.3	Dependencia e independencia lineal .....	53
3.3.1	Combinación lineal de vectores. ....	53
3.3.2	Sistemas de generadores .....	54
3.3.3	Dependencia e independencia lineal .....	56
3.4	Sistemas generadores .....	59
3.5	Bases y dimensión de un espacio vectorial .....	63
3.5.1	Base de un espacio vectorial .....	63
3.5.2	Dimensión de un espacio vectorial.....	66
3.5.3	Dimensiones de los subespacios .....	66
3.6	Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales.....	68

3.6.1	Espacio de filas y espacio de columnas de una matriz.....	68
3.6.2	Rango de una matriz .....	71
3.6.3	Núcleo de una matriz .....	71
3.6.4	Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales .....	74
3.6.5	Sistemas lineales con matriz de coeficientes cuadrada.....	76
3.7	Cambios de base en $R_n$ .....	76
3.7.1	Coordenadas en espacios generales n-dimensionales.....	80
<b>4</b>	<b>APLICACIONES LINEALES .....</b>	<b>82</b>
4.1	Introducción.....	82
4.2	Propiedades de las aplicaciones lineales .....	83
4.3	Núcleo e imagen de una aplicación lineal .....	84
4.3.1	Núcleo de una aplicación lineal.....	84
4.3.2	Imagen de una aplicación lineal.....	86
4.4	Isomorfismos de espacios vectoriales.....	89
4.4.1	Aplicaciones lineales inyectivas y suprayectivas .....	89
4.4.2	Isomorfismos entre espacios vectoriales .....	92
4.5	Matrices de las aplicaciones lineales .....	93
4.5.1	Matriz canónica de una aplicación lineal.....	93
4.5.2	Bases no canónicas y espacios vectoriales generales .....	94
4.6	Equivalencia, semejanza y congruencia de matrices.....	96
4.6.1	Expresión matricial de un cambio de base.....	96
4.6.2	Equivalencia de matrices .....	97
4.6.3	Semejanza de matrices.....	99
4.6.4	Congruencia de matrices .....	100
4.7	Operaciones con aplicaciones lineales .....	101
4.7.1	Espacio vectorial $LV, W$ .....	101
4.7.2	Composición de aplicaciones lineales.....	101
4.7.3	Aplicación lineal inversa .....	103
4.8	Valores y vectores propios .....	104
4.8.1	Valores y vectores propios .....	104
4.8.2	Subespacios propios .....	105
4.8.3	Cálculo de valores y vectores propios.....	105
4.8.4	Valores y vectores propios de aplicaciones lineales .....	109
4.9	Diagonalización .....	109
4.9.1	Diagonalización y aplicaciones lineales .....	112
4.10	Matrices simétricas y diagonalización ortogonal .....	113
4.10.1	Matrices simétricas .....	113
4.10.2	Matrices ortogonales .....	114
4.10.3	Propiedad de las matrices simétricas .....	115
4.10.4	Diagonalización ortogonal .....	116
<b>5</b>	<b>FORMAS CUADRÁTICAS .....</b>	<b>119</b>
5.1	Definiciones.....	119
5.1.1	Aplicaciones bilineales .....	119
5.1.2	Formas bilineales .....	119
5.2	Formas bilineales en espacios de dimensión finita.....	119
5.3	Formas bilineales sobre un espacio.....	120
5.3.1	Formas bilineales simétricas.....	121
5.3.2	Formas bilineales antisimétricas o alternadas .....	121
5.3.3	Proposición.....	121
5.4	Formas bilineales sobre un espacio de dimensión finita.....	122

5.4.1	Formas bilineales simétricas y antisimétricas en espacios de dimensión finita.....	123
5.4.2	Cambios de base .....	123
5.5	Formas cuadráticas.....	124
5.5.1	Primeras propiedades .....	125
5.5.2	Formas cuadráticas definidas .....	125
5.5.3	Forma polar asociada a una forma cuadrática.....	125
5.5.4	El espacio vectorial $Q, V, K$ de formas cuadráticas .....	127
5.5.5	Aplicación lineal asociada a una forma cuadrática .....	127
5.6	Formas cuadráticas en espacios de dimensión finita .....	128
5.6.1	Ecuación de una forma cuadrática.....	128
5.6.2	Cambio de base .....	128
5.6.3	Aplicación lineal asociada a una forma cuadrática .....	129
5.6.4	Rango de una forma cuadrática.....	130
5.7	Conjugación respecto de una forma cuadrática.....	130
5.7.1	Vectores conjugados.....	130
5.7.2	Vectores autoconjugados.....	130
5.7.3	Proposición.....	131
5.7.4	Conjuntos conjugados.....	131
5.7.5	Formas cuadráticas ordinarias y degeneradas .....	131
5.7.6	Subespacio conjugado de un vector .....	132
5.8	Conjugación en el caso de dimensión finita .....	133
5.8.1	Núcleo de una forma cuadrática .....	134
5.8.2	Formas cuadráticas ordinarias y degeneradas .....	134
5.9	Diagonalización de una forma cuadrática .....	134
5.10	Diagonalización de una forma cuadrática mediante operaciones elementales .....	137
5.11	Descomposición en cuadrados .....	141
5.11.1	Descomposición en cuadrados .....	141
5.11.2	Método de Gauss .....	142
5.12	Formas cuadráticas reales.....	145
5.12.1	Formas cuadráticas reales definidas .....	145
5.12.2	Formas cuadráticas reales semidefinidas .....	146
5.13	Rango y signatura de una forma cuadrática .....	147
5.13.1	Rango de una forma cuadrática $w$ (rang $w$ ) .....	147
5.13.2	Signatura de una forma cuadrática $w$ (sig $w$ ) .....	148
5.14	Expresión canónica de una forma cuadrática .....	150
5.14.1	Expresión canónica de una forma cuadrática .....	150
5.14.2	Consecuencia.....	151
5.15	Caracterización de las formas cuadráticas definidas y semidefinidas .....	151
5.15.1	Proposición.....	152
5.15.2	Matrices simétricas definidas y semidefinidas .....	153
<b>6</b>	<b>ANEXO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO ESCALAR .....</b>	<b>154</b>
1	Definiciones.....	154
1.1	Conjuntos ortogonales y ortonormales.....	154
	Definición .....	154
1.2	Método de normalización de Gram-Schmidt .....	154