Departamento de Ingeniería de Telecomunicación
Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Jaén

TEMA 4

TRANSMISIÓN DIGITAL EN BANDA BASE (I)

Teoría de la Comunicación (2º grado)

2020-2021

Contenidos

1. Introducción
2. Modelo de un sistema de comunicaciones digital (SCD)
3. El ruido en los sistemas SCD en banda base. Filtro adaptado
4. El ruido en los sistemas SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP

Objetivos específicos

- Características de los sistemas de comunicación **analógicos** y **digital**, destacando las ventajas de estos últimos.

- Modelo de sistema de comunicación digital en banda base.

- **Filtro adaptado** para la **detección** de señales que llegan acompañadas de ruido aditivo, blanco y gaussiano

- **Criterio de máximo a posteriori** y de **máxima semejanza.** Diseño de receptores digitales óptimos.

Introducción (I)

• En los sistemas de **comunicación digital,** la señal moduladora *x(t)* es una señal digital

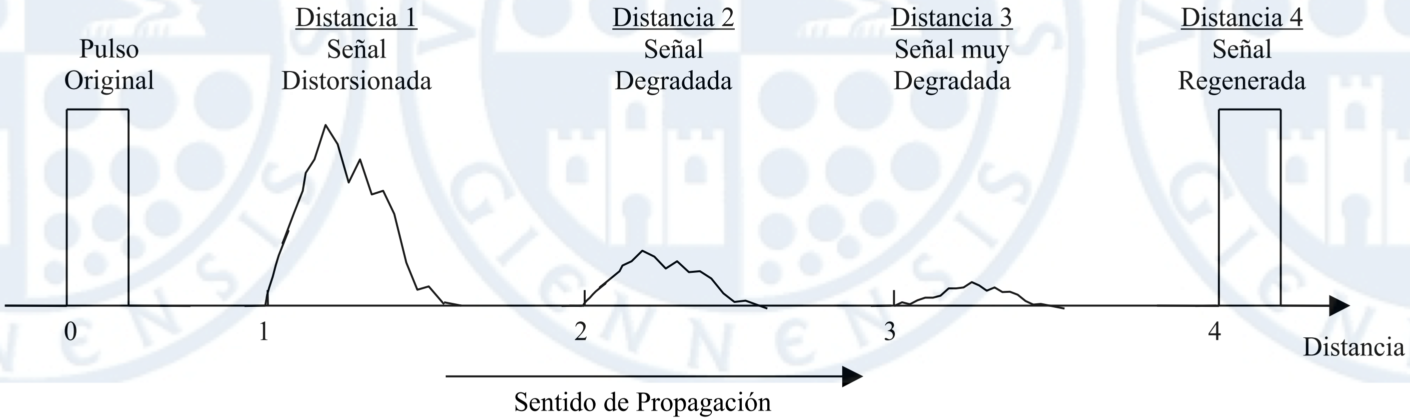
- La señal moduladora está formada por un conjunto **discreto, numerable y finito** de elementos $\{m_1, ..., m_M\}$ (**símbolos** pertenecientes a un determinado **alfabeto**):
- Cada símbolo m_i se transmite con una cierta **probabilidad** p_i.
- Se denomina **mensaje** a cualquier combinación de símbolos transmitidos

VENTAJAS DE LOS SCD:

• Regeneración de símbolos sencilla
• Detección y corrección de errores
• Circuitería digital más eficiente y barata
• TDM digital más fácil que FDM analógica
• Transparencia frente a la fuente de información
• Servicios: almacenamiento, compresión y criptografía
• Transmisión eficiente en canales muy adversos (satélite)

INCONVENIENTES DE LOS SCD:

• Mayor ancho de banda (sin utilizar codificación fuente)
• Se requiere sincronizar
• Fluctuaciones de fase de relojes de sincronización (jitter)
• Se requieren convertidores A/D y D/A

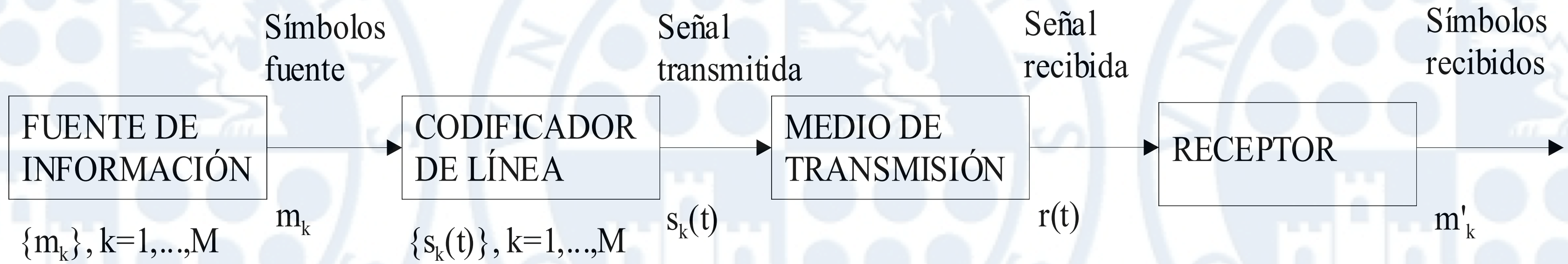


Ejemplo de regeneración de un pulso

Introducción (II)

- Los principales recursos que limitan la capacidad del canal en un sistema de comunicaciones son la potencia (etapas de transmisión y recepción) y el ancho de banda (medio de transmisión)
  - Sistemas limitados en potencia
    - En estos sistemas el **ruido (AWGN)** generado en el canal es quien impone la limitación ya que si el ruido es considerable, el receptor puede llegar a tomar una decisión errónea (a mayor ruido a la entrada del receptor, mayor probabilidad de error de símbolo)
    - Diseño óptimo del receptor para minimizar la probabilidad de error de símbolo debida al ruido.
  - Sistemas limitados en banda
    - En estos sistemas la limitación viene impuesta por la distorsión (interferencia entre símbolos, (Inter Symbol Interference, ISI)) que produce el medio de transmisión al ser tratado como un sistema lineal **limitado en banda**.
- En esta asignatura, los efectos del ruido y limitación en banda del canal se estudiarán por separado, con el fin de mejorar la comprensión de sus efectos

Modelo de un SCD en banda base (I)



• **Fuente de información:** formada por M símbolos m_k

$$\{m_k\} \quad k = 1, 2 \ldots M$$

Cada símbolo m_k se se transmite cada T segundos de acuerdo a una probabilidad p_k

• **Codificador de línea**. Asigna a cada símbolo m_k una **única** señal $s_k(t)$ definida en energía, de **duración menor o igual** a T. Dependiendo de cuales sean las características (facilidad de sincronización, la posibilidad de enviar componente continua, la potencia disponible, la máxima probabilidad de error permitida, etc) del medio de transmisión se utilizará un código de línea u otro.

• **Medio de transmisión**. Consideraremos que el medio de transmisión (canal) puede considerarse un **sistema LTI** (distorsión lineal) y que añade ruido aditivo blanco y gaussiano (Additive White Gausian Noise, AWGN).

• **Receptor**. A partir de la señal recibida, $r(t)$, se debe decidir que símbolo de entre el conjunto de símbolos que conforman el alfabeto de fuente es el que ha sido transmitido. La decisión se suele tomar basándose en técnicas ESTADÍSTICA (naturaleza estadística de la fuente de información y comportamiento aleatorio del medio de transmisión).

Modelo de un SCD en banda base (II)

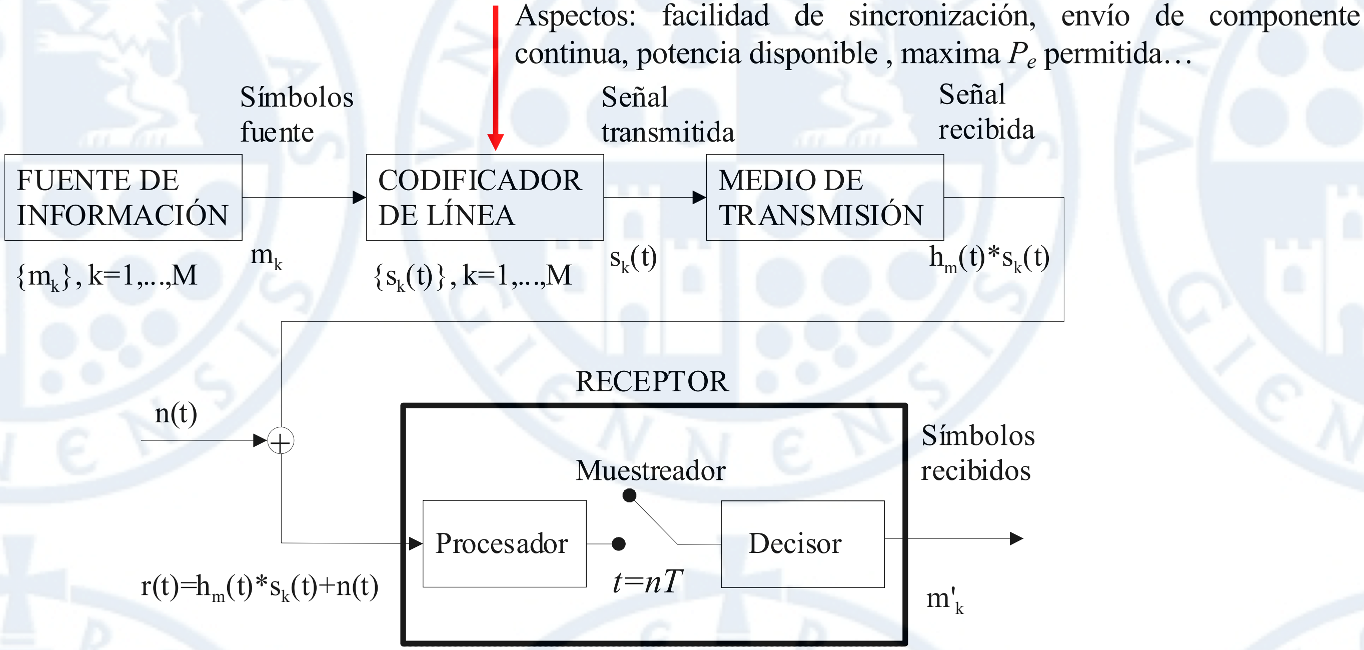


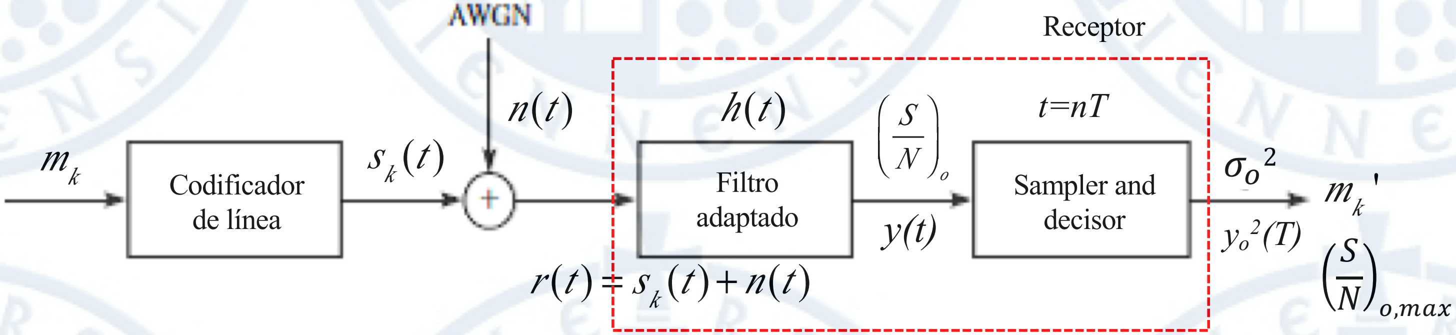
Diagrama de bloques de un sistema SCD con ruido

- Bloques del **receptor**
  - **Procesador de señal:** calcula un <u>estadístico suficiente *F*</u> a partir de las muestras de la señal *r(t)* capturadas cada periodo de símbolo *T*
  - **Decisor**: a partir del estadístico suficiente *F* y de acuerdo a un criterio (minimizar la probabilidad de error de símbolo P_e), este elemento decide qué símbolo m_i se ha transmitido en cada intervalo *T*

IMPORTANTE: a partir de este punto, se estudiará la perturbación del ruido AWGN (independiente de la señal transmitida) en un SCD en banda base para el caso de señalización binaria. Por tanto, la señal que recibe el receptor es la suma de la señal transmitida $s_k(t)$ atenuada por el medio de transmisión $h_m(t)$, pero no se considera el efecto de ISI

El ruido en los SCD en banda base. Filtro adaptado a una señal (I)

- **Filtro adaptado (matched filter):** es un filtro lineal *h(t)* que proporciona la **máxima** relación señal a ruido $\left(\frac{S}{N}\right)_o$ a su salida para una determinada forma de onda $s_k(t)$.
  - La salida del filtro *h(t)* adaptado se muestrea en $t=nT$ donde la relación señal a ruido es máxima para la forma de onda $s_k(t)$ de un determinado símbolo m_k recibido



" simplemente se correla con el patrón que se busca $s_k(t)$"

La salida $y(t)|_{t=T}$ consistirá en la suma de una componente de señal (determinista) $s(t)=s_k(t)$ y una componente de ruido (v.a. gaussiana: $\eta_n = 0$ y varianza σ_o^2)

$$y(T)=r(t)*h(t)\Big|_{t=T}=s(t)*h(t)\Big|_{t=T}+n(t)*h(t)\Big|_{t=T}=y_o(T)+n_o(T)$$

¿Qué filtro *h(t)* se debe diseñar en recepción para obtener máxima relación señal a ruido $\left(\frac{S}{N}\right)_{o,max}$ a la salida del muestreador $(t=T)$ sabiendo que se ha transmitido $s(t) = s_k(t)$?

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{y_o^2(T)}{\sigma_o^2}$$

El ruido en los SCD en banda base. Filtro adaptado a una señal (II)

$$y_o(t) = s(t) * h(t) \overset{TF^{-1}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\cdot H(f)\cdot e^{j\omega t}\, df \Rightarrow y_o(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\cdot H(f)\cdot e^{j\omega T}\, df$$

$$\sigma_o^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f)\cdot\left|H(f)\right|^2 df = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(f)\right|^2 df \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\cdot H(f)\cdot e^{j\omega T}\, df\right|^2}{\frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(f)\right|^2 df}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\cdot f_2(x)\,dx\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left|f_1(x)\right|^2 dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f_2(x)\right|^2 dx$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(f)\right|^2 df\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left|S(f)e^{j\omega T}\right|^2 df}{\frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(f)\right|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(f)\right|^2 df\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left|S(f)\right|^2 df}{\frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(f)\right|^2 df} \leq \frac{2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left|S(f)\right|^2 df}{\eta} \leq \frac{2\cdot E_s}{\eta} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{o,\max} = \frac{2\cdot E_s}{\eta}$$

$$\boxed{h(t) = s(T-t) = s_k(T-t) \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_o = \left(\frac{S}{N}\right)_{o,max} = \frac{2E_S}{\eta}}$$

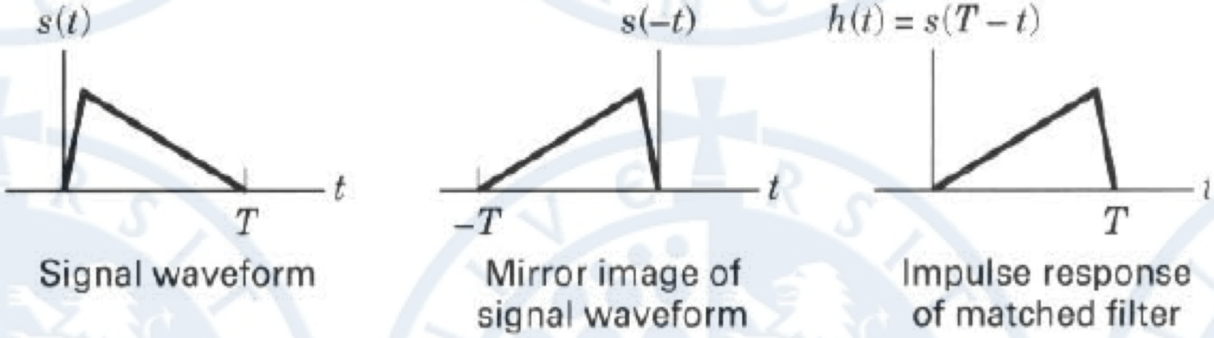
MATCHED FILTER

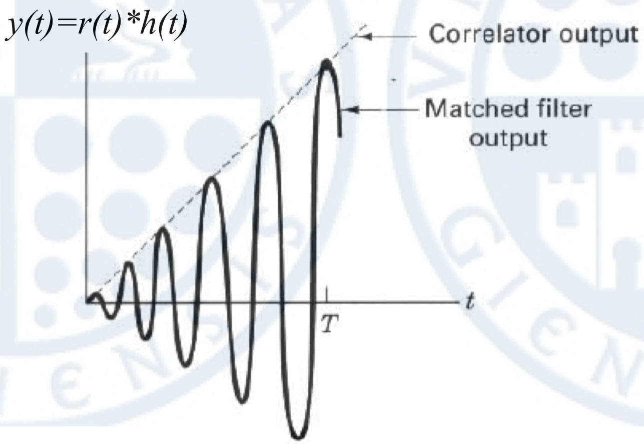
Se puede observar que *h(t)* es un filtro causal

El ruido en los SCD en banda base. Filtro adaptado a una señal (III)

Propiedad del filtro adaptado: máxima relación $(S/N)_{o,max}$ a la salida del filtro adaptado $h(t)$ en $t=T$,

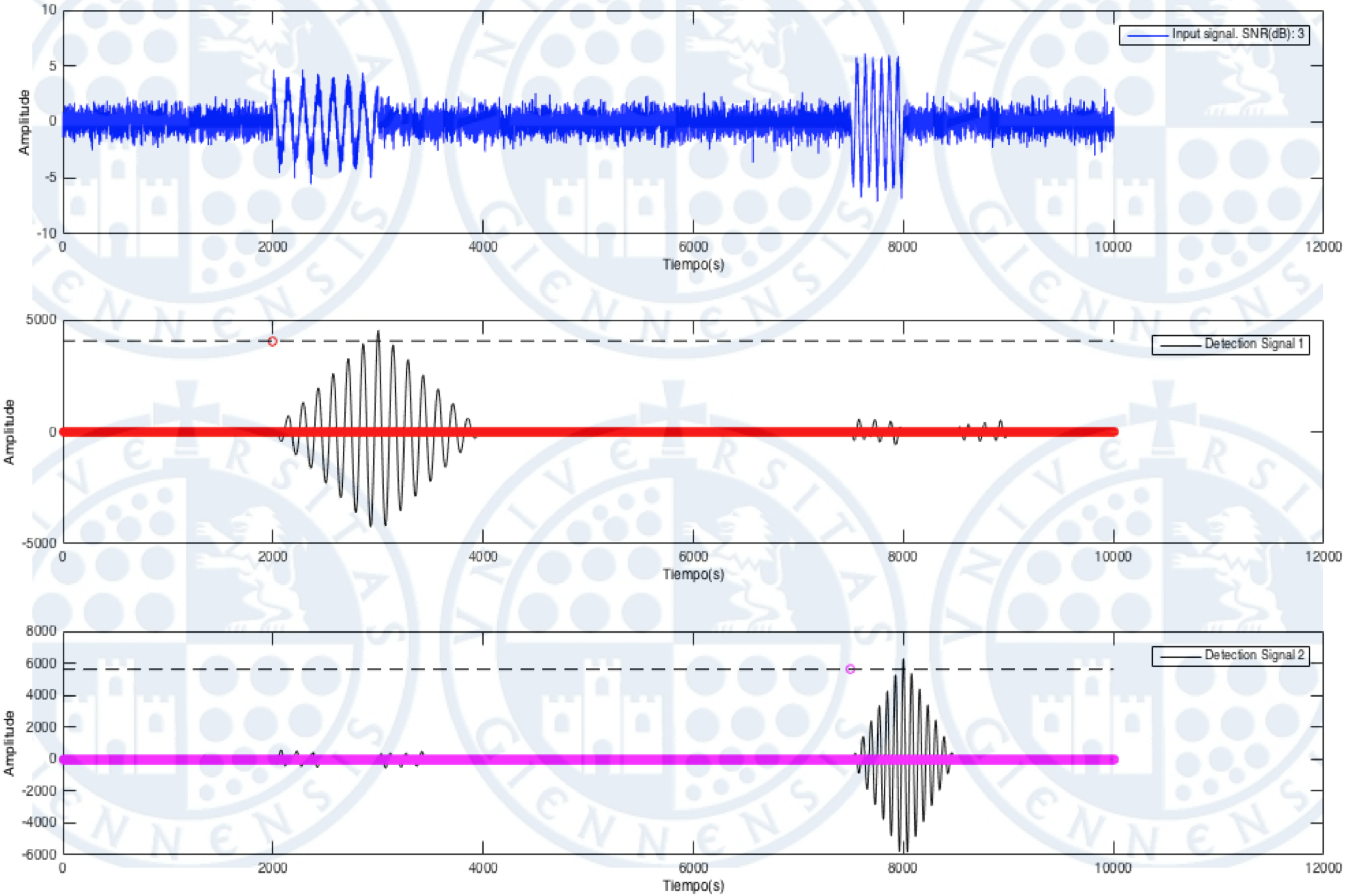
- Dependencia de la energía del símbolo recibido E_s
- No dependencia de la forma de onda $s_k(t)$ específica del símbolo recibido
- Dependencia de la densidad espectral de potencia del ruido a la entrada del filtro



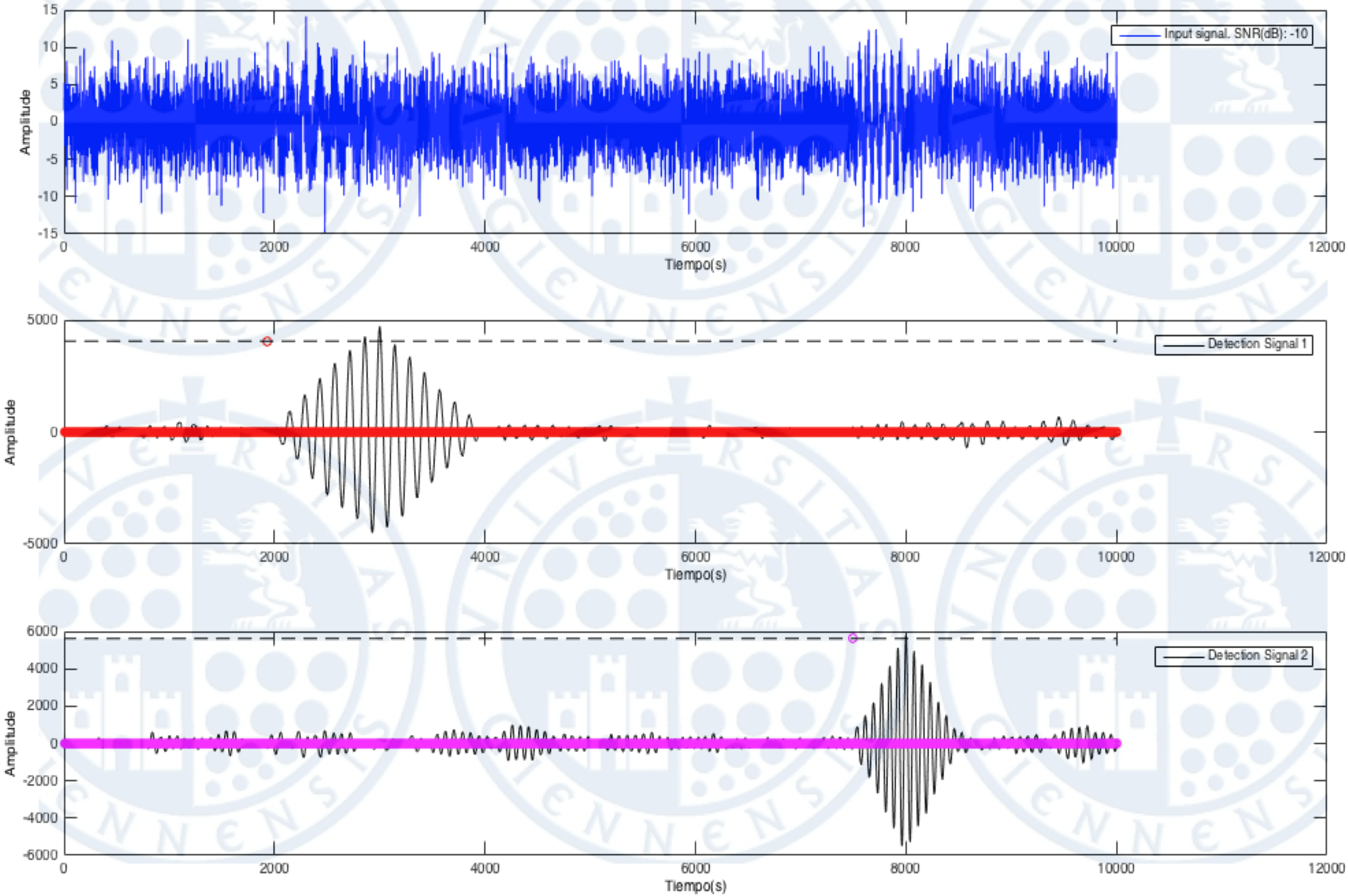


Ejemplo visual

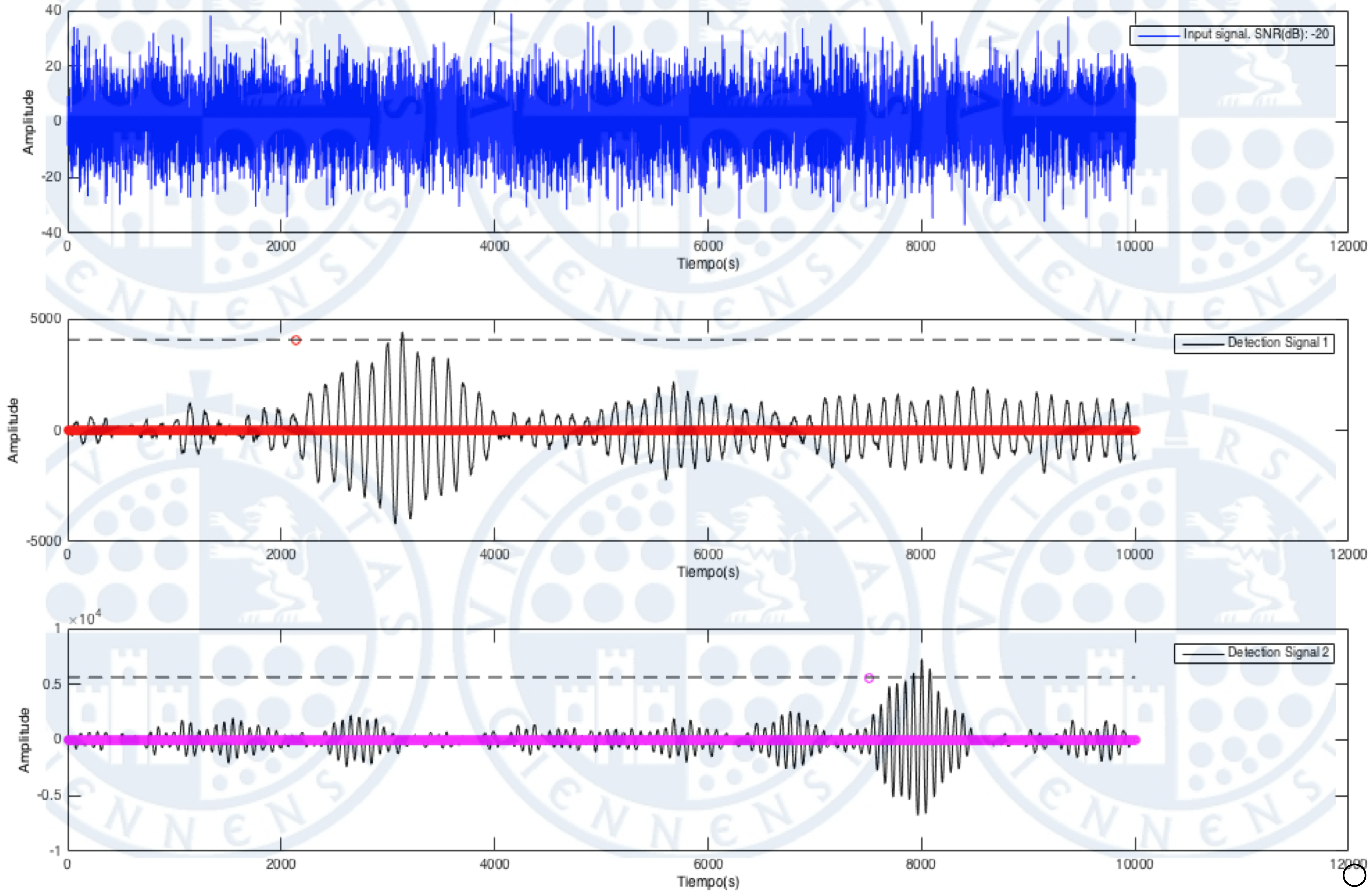
El ruido en los SCD en banda base. Filtro adaptado a una señal (IV)



El ruido en los SCD en banda base. Filtro adaptado a una señal (V)



El ruido en los SCD en banda base. Filtro adaptado a una señal (VI)



El ruido en los SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP (I)

- Debido a que la señal recibida por el receptor tiene naturaleza aleatoria, es necesario utilizar herramientas estadísticas para extraer la información de manera **óptima**

- Establecido un criterio, un **receptor** es **óptimo** cuando no existe otro receptor que ofrezca un mejor comportamiento atendiendo al criterio establecido.

  - El criterio adoptado en comunicaciones analógicas suele ser la maximización de la (S/N) o minimización del error cuadrático medio entre señal transmitida y recibida

  - El criterio adoptado en comunicaciones digitales suele ser la **minimización** de la **probabilidad de error** P_e de símbolo (**minimizar** la **equivocación** del receptor al decidir el **símbolo** que se ha transmitido).

- En comunicaciones digitales se utilizan, fundamentalmente, dos criterios que permiten diseñar receptores óptimos:

  - Criterio del **máximo a posteriori** (Maximum a posteriori estimation MAP). Este criterio conduce a mínima P_e. El receptor bajo este criterio se denomina observador ideal

  - Criterio de **máxima semejanza** (MS ó ML). Este criterio es una particularización del MAP para el caso en que todos los símbolos son **equiprobables**.

El ruido en los SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP (II)

Considere un SCD donde no existe limitación en banda y el canal es AWGN

• M posibles mensajes pertenecientes al alfabeto fuente $\{m_1, \ldots, m_M\}$. Cada símbolo m_i fuente tiene una determinada probabilidad de transmisión P_i, que se conocen como ***probabilidades "a priori"***

$$\{P_1, \ldots, P_M\} \Rightarrow \sum_i P_i = 1$$

• Para transmitir el mensaje m_i se envía la señal $s_i(t)$ durante un periodo de símbolo de duración T, conocido como **intervalo de símbolo**

• La **señal observada** (recibida) $r(t)$ por el receptor durante cada intervalo de símbolo,

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

donde $n(t)$ es ruido AWGN ($\eta_n = 0$, $G_n(f) = \eta/2$)

• La señal $r(t)$ es muestreada por el receptor, obteniendo N muestras por símbolo ($\Delta T = T/N$) para tomar su decisión en el intervalo de símbolo $[0, T]$,

$$\vec{r} = \left[r(0), r(\Delta T), r(2 \cdot \Delta T), \ldots, r((N-1)\Delta T)\right]$$

NOTA: ya que la señal r(t) es la suma de un proceso ***gaussiano*** *n(t) y una señal $s_i(t)$ (determinística dentro de cada intervalo de símbolo), las muestras de r(t) serán variables aleatorias* ***gaussianas*** *con un valor medio que dependerá de la señal $s_i(t)$ transmitida y una varianza igual a la del ruido* σ_n^2

El ruido en los SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP (III)

• Cálculo de las **probabilidades condicionales**:

$$p\left(\frac{r_k}{m_i}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n}\cdot e^{-\frac{(r_k-s_{ik})^2}{2\cdot\sigma_n^2}} \qquad \begin{matrix} k=0,\dots N-1 \\ i=1,\dots,M \end{matrix}$$

$r_k = r(k\cdot\Delta T)$ y $s_{ik} = s_i(k\cdot\Delta T)$

• Cálculo de las **probabilidades de transición** (verosimilitudes o semejanzas) a partir de las probabilidades condicionales:

$$p\left(\frac{\vec{r}}{m_i}\right)=\prod_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n}\cdot e^{-\frac{(r_k-s_{ik})^2}{2\cdot\sigma_n^2}} \qquad i=1,\dots,M$$

• La **probabilidad de error** en la decisión viene dada por:

$$P_e=P_1\cdot P\left(\frac{e}{m_1}\right)+P_2\cdot P\left(\frac{e}{m_2}\right)+\dots$$

representando e/m_i un error en la decisión condicionado a que se transmitió el símbolo m_i.

• La mínima probabilidad de error en la decisión ocurre si se elige el símbolo m_i con **mayor probabilidad a posteriori (REGLA MAP):**

$$m_i^{'}=\max_{m_i}\left\{p\left(\frac{m_i}{\vec{r}}\right)\right\}=\max_{m_i}\left\{p\left(\frac{\vec{r}}{m_i}\right)\cdot P_i\right\}$$

El ruido en los SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP (IV)

Expresando la regla MAP de forma más conveniente para su uso en el diseño de sistemas de comunicación digital,

$$m_i' = \max_{m_i}\left\{ p\left(\vec{r}\Big/ m_i\right)\cdot P_i \right\} = \max_{m_i}\left\{ \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n}\cdot e^{-\frac{(r_k - s_{ik})^2}{2\cdot\sigma_n^2}} \cdot P_i \right\}$$

$$m_i' = \max_{m_i}\left\{ \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n\right)^N}\cdot e^{-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(r_k - s_{ik})^2}{2\cdot\sigma_n^2}} \cdot P_i \right\} = \max_{m_i}\left\{ e^{-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(r_k - s_{ik})^2}{2\cdot\sigma_n^2}} \cdot P_i \right\}$$

$$m_i' = \max_{m_i}\left\{ \ln\left(e^{-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(r_k - s_{ik})^2}{2\cdot\sigma_n^2}} \cdot P_i \right)\right\} = \max_{m_i}\left\{ -\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(r_k - s_{ik})^2}{2\cdot\sigma_n^2} + \ln\left(P_i\right) \right\}$$

$$m_i' = \max_{m_i}\left\{ -\sum_{k=0}^{N-1}\left(r_k - s_{ik}\right)^2 + 2\cdot\sigma_n^2\cdot\ln\left(P_i\right) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_i' = \min_{m_i}\left\{ \sum_{k=0}^{N-1}\left(r_k - s_{ik}\right)^2 - 2\cdot\sigma_n^2\cdot\ln\left(P_i\right) \right\}$$

El ruido en los SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP (V)

Multiplicando por $\Delta T > 0, \Delta T \to 0$ y operando **se obtiene la regla MAP**

$$\boxed{m_i^{'} = \min_{m_i}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left(r_k - s_{ik}\right)^2 \Delta T - 2\cdot\sigma_n^2\cdot\ln\left(P_i\right)\Delta T\right\} \Rightarrow m_i^{'} = \min_{m_i}\left\{\int_0^T\left(r\left(t\right)-s_i\left(t\right)\right)^2 dt - \eta\cdot\ln\left(P_i\right)\right\}}$$

Aplicando MAP para implementar el **receptor óptimo** basado en **correladores** o **filtros adaptados**

$$m_i^{'} = \min_{m_i}\left\{\int_0^T s_i^2\left(t\right)dt - \int_0^T 2\cdot r\left(t\right)\cdot s_i\left(t\right)dt - \eta\cdot\ln\left(P_i\right)\right\} \Rightarrow m_i^{'} = \min_{m_i}\left\{E_i - 2\cdot\int_0^T r\left(t\right)\cdot s_i\left(t\right)dt - \eta\cdot\ln\left(P_i\right)\right\}$$

$$\boxed{m_i^{'} = \max_{m_i}\left\{\int_0^T r\left(t\right)\cdot s_i\left(t\right)dt + \frac{\eta}{2}\cdot\ln\left(P_i\right) - \frac{1}{2}E_i\right\}}$$

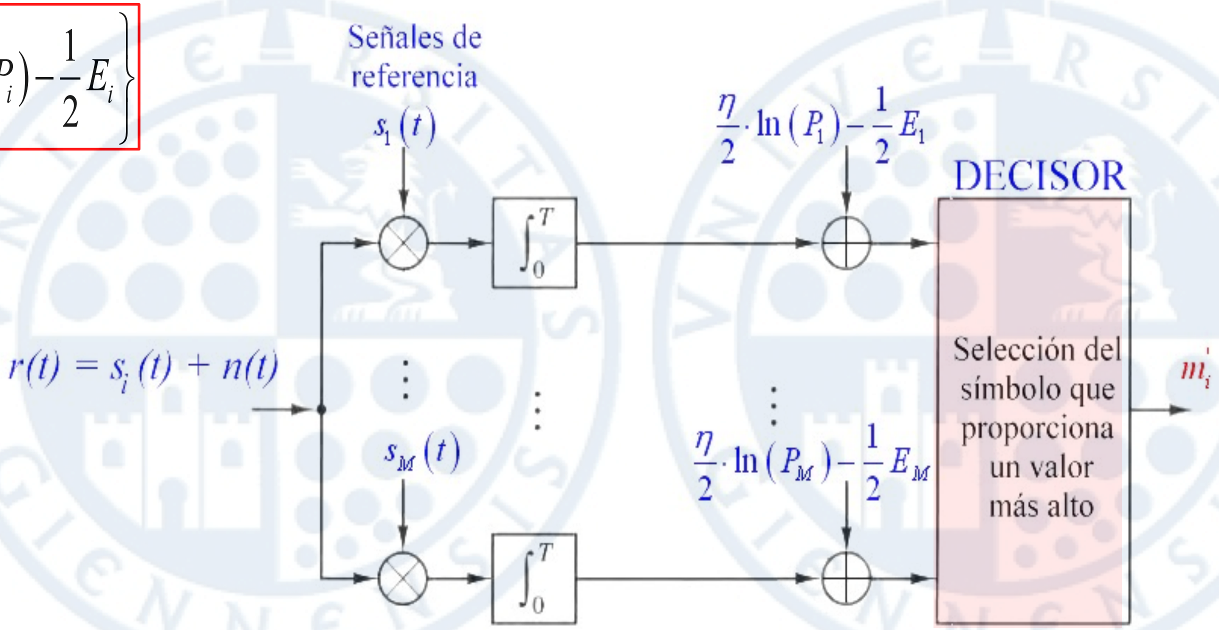
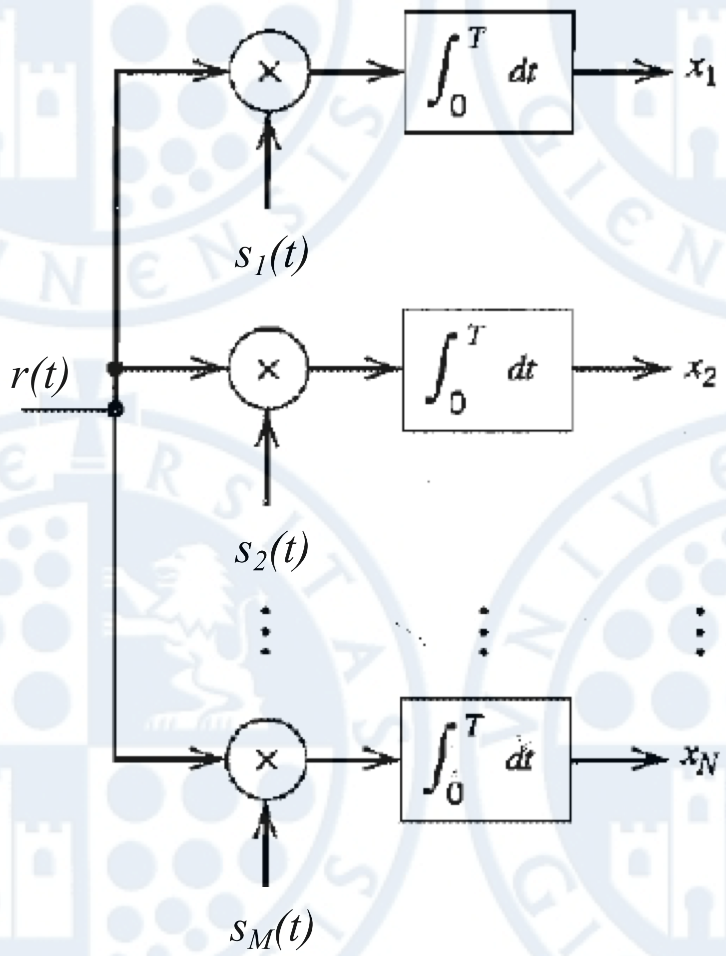
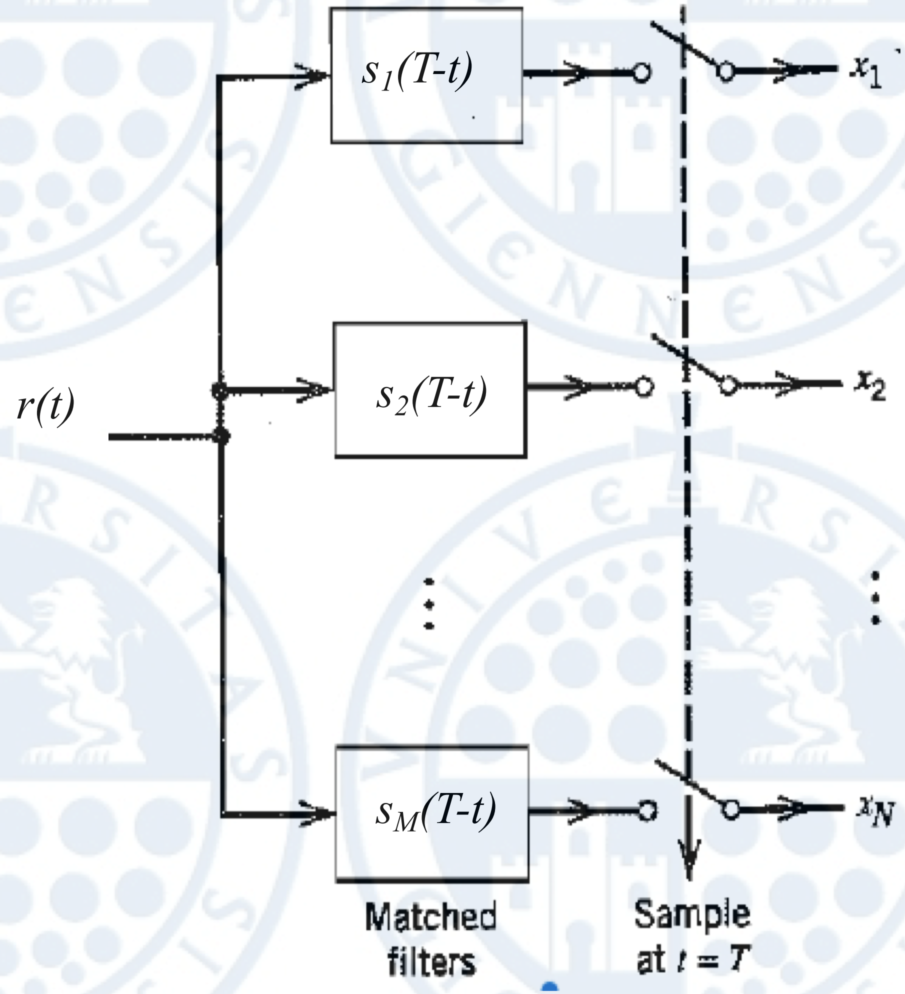


Diagrama del receptor óptimo con correladores

El ruido en los SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP (VI)

Comparación de diagramas de receptor óptimo basado en correladores y filtro adaptado





Se observa que la salida de cada correlador es igual a la salida de cada filtro adaptado si y solo si la salida del filtro adaptado se muestrea en $t = T$

El ruido en los SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP. Caso binario (I)

- Suponiendo fuentes binarias, el **receptor óptimo MAP binario** (alfabeto formado por **dos símbolos** $m_0 \leftrightarrow s_0(t)$, $m_1 \leftrightarrow s_1(t)$),

$$m_i' = \max_{m_i}\left\{\int_0^T r(t)\cdot s_i(t)\,dt + \frac{\eta}{2}\cdot\ln(P_i) - \frac{1}{2}E_i\right\}$$

“0” $\rightarrow \int_0^T r(t)\cdot s_0(t)\,dt + \frac{\eta}{2}\cdot\ln(P_0) - \frac{1}{2}E_0$

“1” $\rightarrow \int_0^T r(t)\cdot s_1(t)\,dt + \frac{\eta}{2}\cdot\ln(P_1) - \frac{1}{2}E_1$

- Cálculo del estadístico suficiente F : permite decidir con mínima P_e

$$\int_0^T r(t)\cdot s_0(t)\,dt + \frac{\eta}{2}\cdot\ln(P_0) - \frac{1}{2}E_0 \underset{m_1}{\overset{m_0}{\gtrless}} \int_0^T r(t)\cdot s_1(t)\,dt + \frac{\eta}{2}\cdot\ln(P_1) - \frac{1}{2}E_1$$

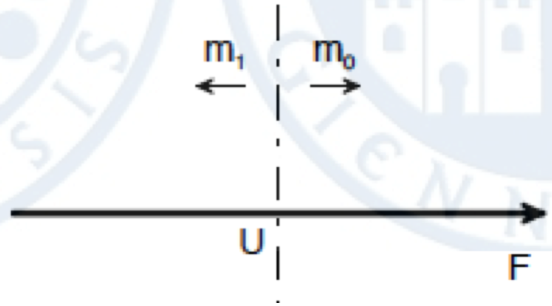
estadístico suficiente F

$$\int_0^T r(t)\cdot\left(s_0(t) - s_1(t)\right)dt \underset{m_1}{\overset{m_0}{\gtrless}} \left[\frac{\eta}{2}\cdot\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + \frac{1}{2}\left(E_0 - E_1\right)\right] \Rightarrow \boxed{F = \int_0^T r(t)\cdot\left(s_0(t) - s_1(t)\right)dt}$$

- El decisor compara el estadístico F con un umbral de decisión U

$$\left.\begin{array}{l} F = \int_0^T r(t)\cdot\left(s_0(t) - s_1(t)\right)dt \\ U = \frac{\eta}{2}\cdot\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + \frac{1}{2}\left(E_0 - E_1\right) \end{array}\right\} \begin{cases} F > U \Rightarrow \text{Se detecta } m_0 \\ F < U \Rightarrow \text{Se detecta } m_1 \end{cases}$$

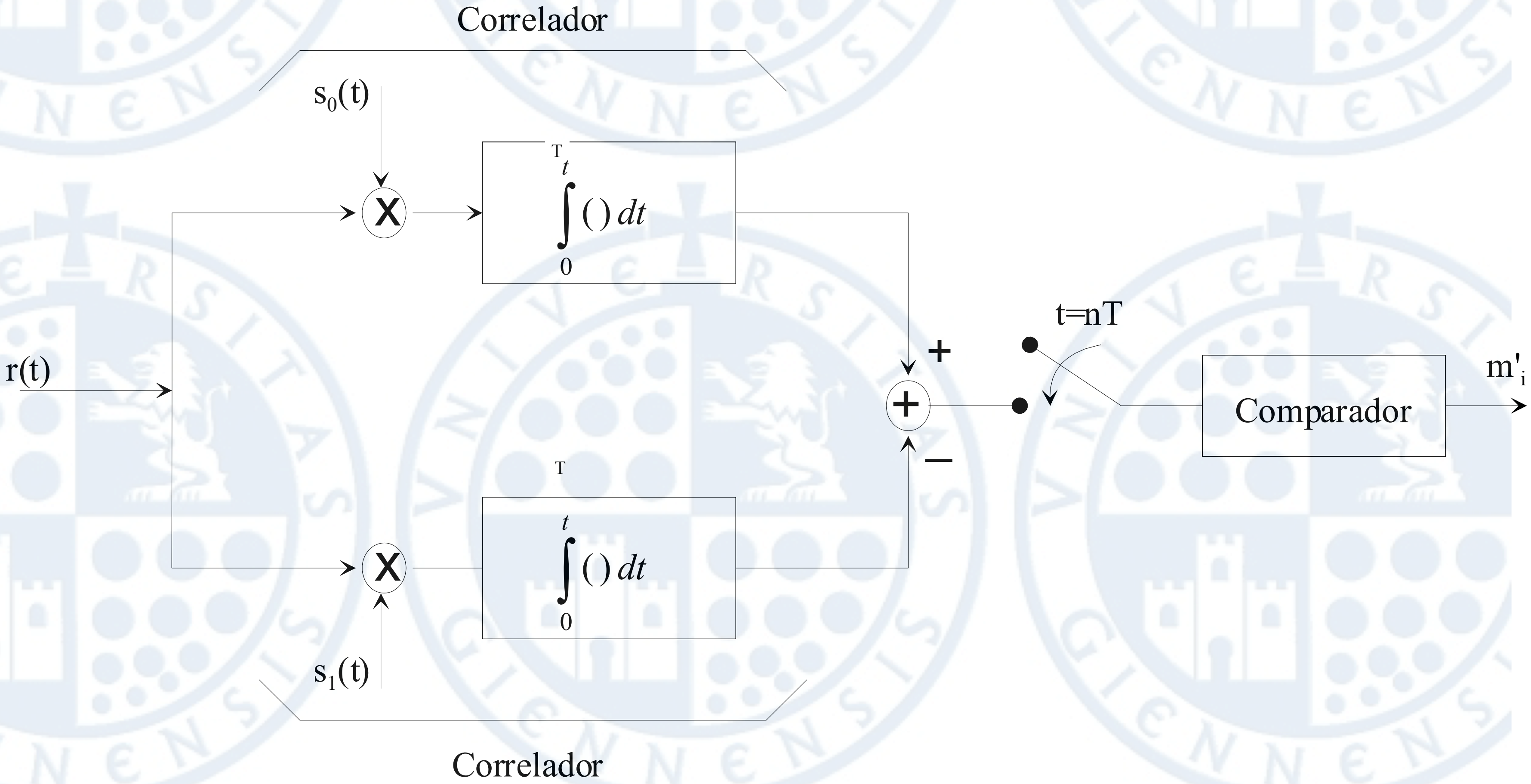
umbral U



El ruido en los SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP. Caso binario (II)

Las correlaciones para el cálculo del estadístico *F* se pueden implementar mediante dos estructuras: correladores y filtro adaptado

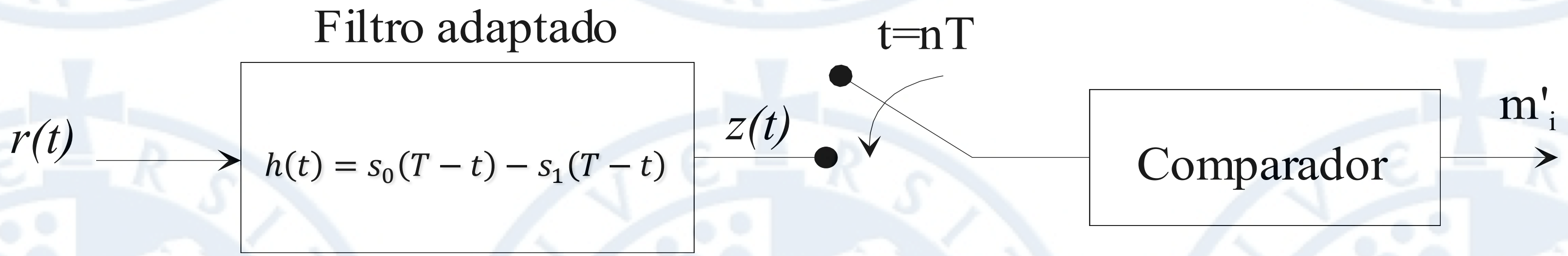
⟹ **Estructura 1: receptor binario óptimo con correladores**



El ruido en los SCD en banda base. Receptores óptimos: mínima probabilidad de error. MAP. Caso binario (III)

⟹ **Estructura 2: receptor binario óptimo con filtro adaptado *h(t)***

- El filtro ideal *h(t)* es un filtro adaptado a la diferencia de las señales transmitidas $s_0(t), s_1(t)$
- La relación entre **correlación** y **convolución** $\left(\rho_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)\right)$ posibilita que se utilice un filtro adaptado a las señales transmitidas $s_0(t)$, $s_1(t)$ para que el proceso de filtrado sea **equivalente** al cálculo de la **diferencia entre correlaciones**



$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h(t-\tau) \partial\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)[s_0(T-[t-\tau]) - s_1(T-[t-\tau])]\partial\tau = \overset{t=T}{\Longrightarrow} = \int_0^T r(\tau)[s_0(\tau) - s_1(\tau)]\partial\tau$$

- La salida del filtro adaptado se muestrea en los instantes $t = nT$
- Por su **sencillez**, en la práctica se utiliza el receptor óptimo implementado mediante filtro adaptado