CEU
Universidad
San Pablo

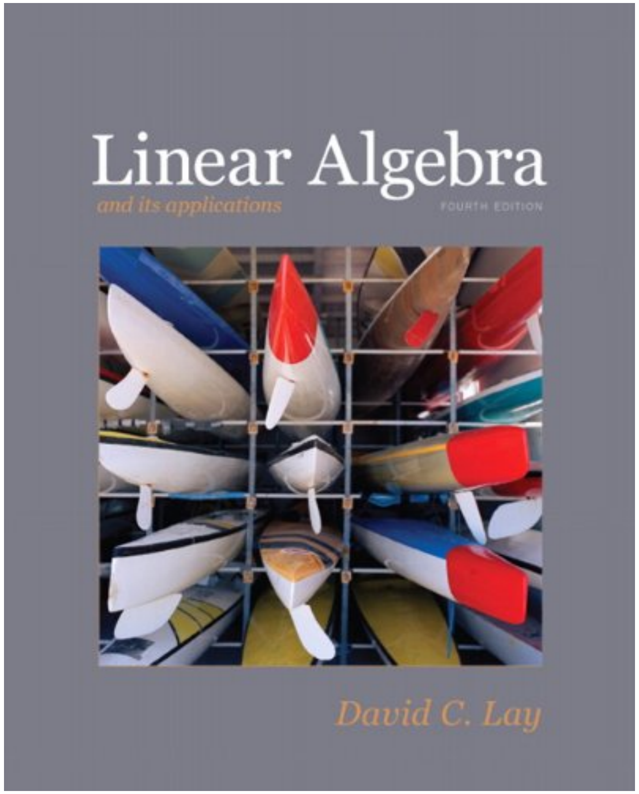
Tema 5: Espacios vectoriales

Curso 2016/2017

Ruzica Jevtic
Universidad San Pablo CEU
Madrid

Índice de contenidos

Referencias



Lay D. *Linear algebra and its applications (4th ed)*.
Chapter 4.

Índice de contenidos

- Definición
- Subespacio vectorial
- Subespacio generado por un conjunto de vectores
- Espacio nulo y espacio columna de una matriz
- Kernel y rango de una transformación lineal
- Conjuntos y bases linealmente independientes
- Bases para Nul{A} y Col{A}
- Sistemas de coordenadas
- Dimensión de un espacio vectorial
- Rango de una matriz
- Cambio de base

Espacio vectorial

Definición: Espacio vectorial

Un ***espacio vectorial*** es un conjunto no vacío, ***V***, de objetos (llamados *vectores*) en el que definimos 2 operaciones: la suma entre vectores y la multiplicación por un escalar (un elemento de cualquier cuerpo, $\mathbb{K}$), y que $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $\forall c, d \in \mathbb{K}$ se verifica que:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4. $\exists \mathbf{0} \in V \mid \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. $\forall \mathbf{u} \in V \ \ \exists!\, \mathbf{w} \in V \mid \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \ \ (normalmente\ escrito\ como\ \mathbf{w} = -\mathbf{u})$
6. $c\mathbf{v} \in V$
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

CEU Universidad San Pablo

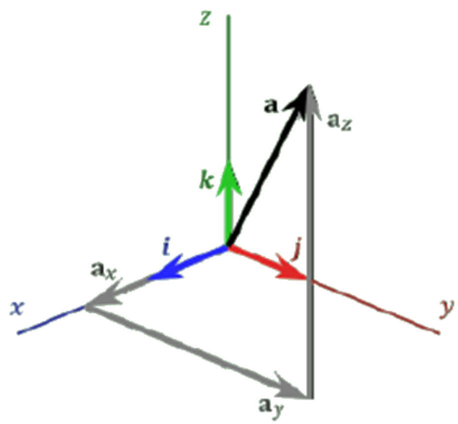
Espacio vectorial

Teorema: otras propiedades

11. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
12. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
13. $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$

Nota: el 0 y 1 se refieren al elemento neutro de la suma y la multiplicación respectivamente en el cuerpo $\mathbb{K}$. –1 es el número opuesto en $\mathbb{K}$ de 1 con respecto a la suma de escalares

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$



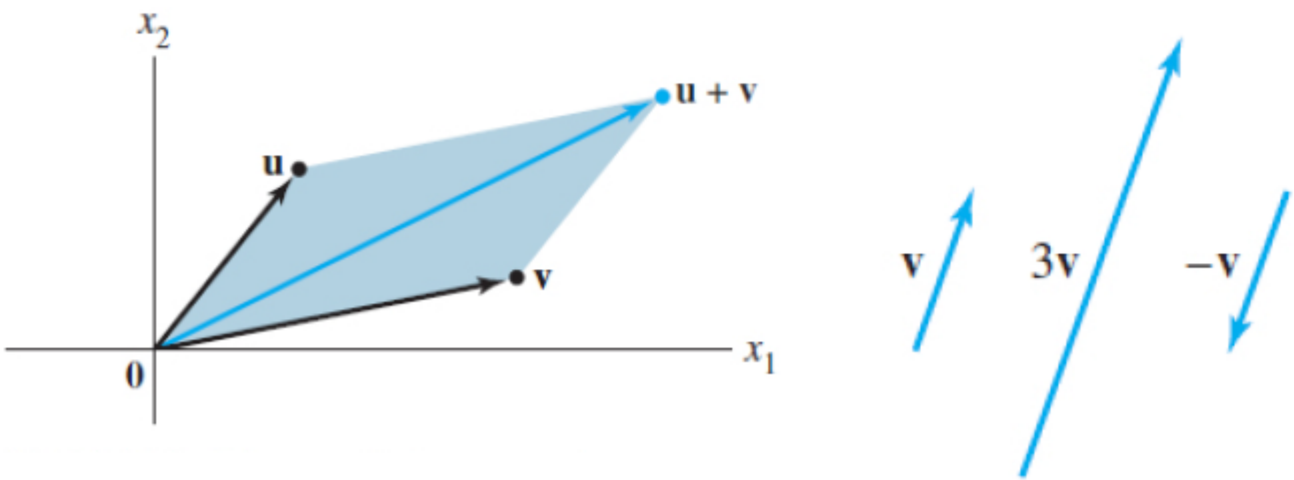
$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión finita para cualquier n. Igual que $\mathbb{C}^n$

Espacio vectorial

Ejemplo: Campos de fuerza en Física

Consideremos *V* como el conjunto de todas las flechas (segmentos de línea dirigidas) en 3D. Dos flechas son consideradas iguales si tienen la misma longitud y dirección.

Se define la suma de flechas y la multiplicación por un escalar como se muestra debajo:



Ejemplo: Campos de fuerza en Física (…continuación)

Este es un ejemplo de la aplicación de algunas de las propiedades de los espacios vectoriales

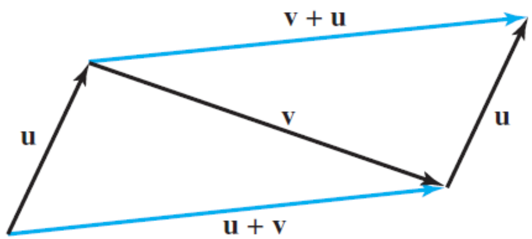


FIGURE 2 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

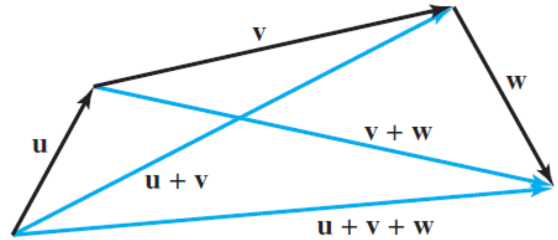
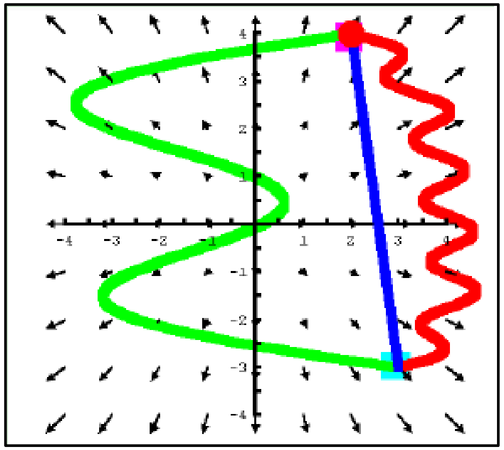


FIGURE 3 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

Estos campos de fuerza se definen para cada punto en el espacio 3D, que indica la fuerza que es aplicada en ese punto

Campo de fuerza conservativo



Espacio vectorial

Ejemplo: Secuencias infinitas

Sea *S* el conjunto de todas las secuencias infinitas de números

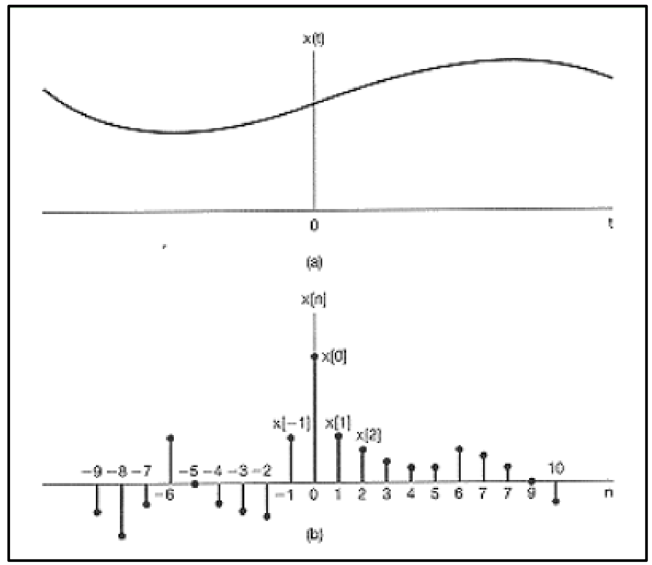
$$\mathbf{u} = (\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots)$$

Definimos la suma entre dos vectores y la multiplicación por un escalar como

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\dots, u_{-2}+v_{-2}, u_{-1}+v_{-1}, u_0+v_0, u_1+v_1, u_2+v_2, \dots)$$

$$c\mathbf{u} = (\dots, cu_{-2}, cu_{-1}, cu_0, cu_1, cu_2, \dots)$$

Procesamiento Digital de la Señal



Ejemplo: Polinomios de grado *n* ($\mathbb{P}_n$)

Sea $\mathbb{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado *n*

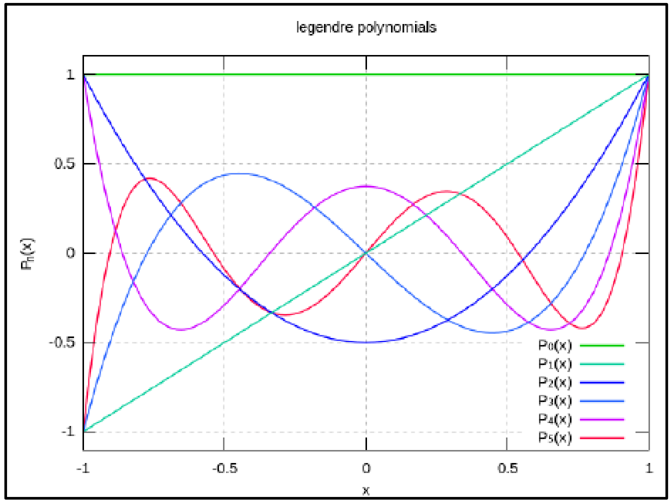
$$\mathbf{u}(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n$$

Definimos la suma entre dos vectores y la multiplicación por un escalar como

$$(u + v)(x) = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1)x + (u_2 + v_2)x^2 + \cdots + (u_n + v_n)x^n$$

$$(cu)(x) = cu_0 + cu_1 x + cu_2 x^2 + \cdots + cu_n x^n$$

Polinomios de Legendre



Espacio vectorial

Ejemplo: conjunto de funciones reales definidas para algún dominio

Sea $\mathbb{F}$ el conjunto de todas las funciones evaluadas reales definidas en algún dominio (f: $D \rightarrow \mathbb{R}$).

Definimos la suma entre dos vectores y la multiplicación por un escalar como

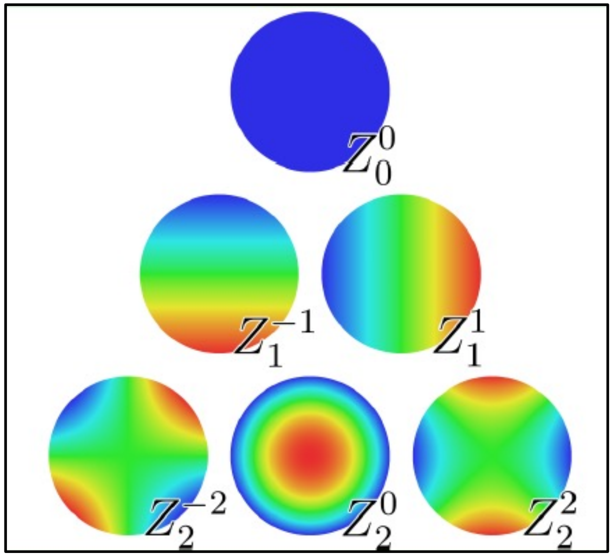
$$(u+v)(x) = u(x) + v(x)$$

$$(cu)(x) = cu(x)$$

Ej.: $u(x) = 3 + x$

Ej.: $v(x) = \sin x$

Ej.: polinomios de Zernike



CEU Universidad San Pablo

Índice de contenidos

CEU Universidad San Pablo

Subespacio vectorial

Algunas veces no necesitamos tratar con el espacio vectorial completo, sino sólo una parte del mismo. Sería deseable que esta parte tuviera las propiedades del espacio

Definición: Subespacio vectorial

Sea V un espacio vectorial, y $H \subseteq V$ una parte del mismo. H es un subespacio vectorial, si y sólo si, verifica:

1. $\mathbf{0} \in H$
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$ → H está cerrado con respecto la suma
3. $\forall \mathbf{u} \in H, \forall c \in \mathbb{K} \quad c\mathbf{u} \in H$ → H está cerrado con respecto a la multiplicación por un escalar

Ejemplo

$H = \{\mathbf{0}\}$ es un subespacio

El espacio vectorial de polinomios (de cualquier grado), $\mathbb{P} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, es un subespacio vectorial del espacio vectorial de funciones reales, definidas sobre $\mathbb{R}(\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\})$.

Subespacio vectorial

Ejemplo

$H = \mathbb{R}^2$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ porque $\mathbb{R}^2 \not\subset \mathbb{R}^3$. Por ejemplo, el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, pero $\mathbf{u} \notin \mathbb{R}^3$.

Ejemplo

$H = \mathbb{R}^2$ x {0} es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ porque todos los vectores de *H* son de la forma $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es obvio que *H* "parece" $\mathbb{R}^2$. Esta semejanza es llamada matemáticamente isomorfismo.

Ejemplo

Cualquier plano en 3D, que pase por el origen, es un subespacio $\mathbb{R}^3$.
Cualquier plano en 3D, que NO pase por el origen, NO es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, porque el **0** no pertenece al plano

Subespacio vectorial

Teorema

Si H es un subespacio vectorial, entonces H es un espacio vectorial

Demostración

$a) \Rightarrow 4$

$a \equiv \mathbf{0} \in H$

$4 \equiv \exists \mathbf{0} \in V | \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

$b) \Rightarrow 1$

$b \equiv \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$

$1 \equiv \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$

Dado que $H \subset V$ y gracias a que $b) \Rightarrow 2, 3, 7, 8, 9, 10$

$2 \equiv \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

$3 \equiv (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

$7 \equiv c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

$8 \equiv (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

$9 \equiv c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

$10 \equiv 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Subespacio vectorial

Teorema (…continuación de la demostración)

Demostración

c) $\Rightarrow$ 6

$$c \equiv \forall \mathbf{u} \in H,\ \forall c \in \mathbb{K} \quad c\mathbf{u} \in H$$

$$6 \equiv c\mathbf{v} \in V$$

Demostración de 5

Dado que H es un subconjunto de V, sabemos que para todo $\mathbf{u} \in H$, existe un único $\mathbf{w} \in H \mid \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$. El problema está en determinar si $\mathbf{w}$ está o no en H. También sabemos que $\mathbf{w} = (-1)\mathbf{u}$, y por c), $\mathbf{w} \in H$.

Índice de contenidos

- Definición
- Subespacio vectorial
- Subespacio generado por un conjunto de vectores
- Espacio nulo y espacio columna de una matriz
- Kernel y rango de una transformación lineal
- Conjuntos y bases linealmente independientes
- Bases para Nul{A} y Col{A}
- Sistemas de coordenadas
- Dimensión de un espacio vectorial
- Rango de una matriz
- Cambio de base

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo

Sean v_1, $v_2 \in V$ dos vectores de un espacio vectorial V. El subconjunto

$$H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

es un subespacio de V.

Demostración

Cualquier vector de H es de la forma $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$ para cualquier $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

- Demostración a) $0 \in H$
  Simplemente estableciendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, tenemos $\mathbf{0} \in H$
- Demostración b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbf{u} = \lambda_{1u}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2u}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v} = \lambda_{1v}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2v}\mathbf{v}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\lambda_{1u}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2u}\mathbf{v}_2) + (\lambda_{1v}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2v}\mathbf{v}_2) \\ &= (\lambda_{1u} + \lambda_{1v})\mathbf{v}_1 + (\lambda_{2u} + \lambda_{2v})\mathbf{v}_2 \in H \end{aligned}$$

CEU Universidad San Pablo

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo (…continuación)

- Demostración c) $c\mathbf{u} \in H$

Sea $\mathbf{u} \in H \;\Rightarrow$

$$\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 \;\Rightarrow\; c\mathbf{u} = c(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2) = c\lambda_1\mathbf{v}_1 + c\lambda_2\mathbf{v}_2 \;\in H$$

Teorema

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$ p vectores de un espacio vectorial V. El subconjunto

$$H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$$

es un subespacio de V.

Demostración

Análoga a la anterior demostración

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo

Consideremos el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4 \supset H = \{(a - 3b, b - a, a, b)\ \forall a, b \in \mathbb{R}\}$
¿Es un subespacio vectorial?

Solución

Todos los vectores de *H* pueden ser escritos como

$$H \ni \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a - 3b \\ b - a \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$$

Por lo tanto, $H = \mathrm{Span}\{(1, -1, 1, 0), (-3, 1, 0, 1)\}$ y por el teorema previo, es un subespacio vectorial

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios I
  - Ejercicio 4.1.1
  - Ejercicio 4.1.4
  - Ejercicio 4.1.5
  - Ejercicio 4.1.6
  - Ejercicio 4.1.19
  - Ejercicio 4.1.32

Índice de contenidos

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo

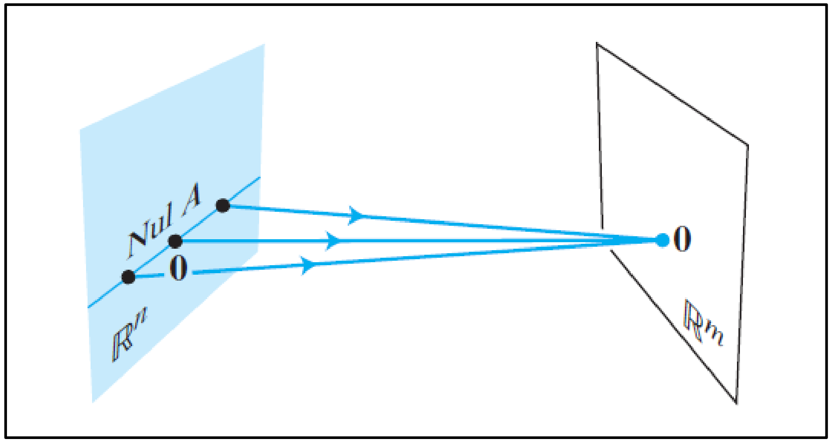
Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

El punto **x** = (5, 3, -2) tiene la propiedad de que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Definición: Espacio nulo

El **espacio nulo de una matriz** $A \in \mathcal{M}_{mxn}$ es el conjunto de vectores

$$\mathrm{Nul}\{A\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$



Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo (…continuación)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Nul}\{A\} = \left\{\left(-\frac{5}{2}x_3, -\frac{3}{2}x_3, x_3\right) \ \forall x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

El ejemplo previo (**x** = (5, 3, -2)) es el punto obtenido para $x_3 = -2$

CEU Universidad San Pablo

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Teorema

$\mathrm{Nul}\{A\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

Demostración

Es obvio que $\mathrm{Nul}\{A\} \subseteq \mathbb{R}^n$ porque A tiene n columnas

- Demostración a) $\mathbf{0} \in \mathrm{Nul}\{A\}$

  $A\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_m \Rightarrow \mathbf{0}_n \in \mathrm{Nul}\{A\}$

- Demostración b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{Nul}\{A\}$

  Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Nul}\{A\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ A\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow$

  $$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{Nul}\{A\}$$

- Demostración c) $c\mathbf{u} \in \mathrm{Nul}\{A\}$

  Sea $\mathbf{u} \in H \Rightarrow$

  $$A\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow c\mathbf{u} \in \mathrm{Nul}\{A\}$$

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo

Sea $H = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{array}\right\}$. ¿Es H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo

Sea $H = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{array} \right\}$. ¿Es H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?

Solución

Podemos reescribir las condiciones de pertenencia a *H* como:

$$\begin{array}{l} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

y, gracias al teorema previo, *H* es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo (…continuación)

Podemos incluso proporcionar una base para *H* :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Las soluciones de *A***x** = **0** son todos los puntos de la forma:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}d - c \\ 2c - \frac{1}{3}d \\ c \\ d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, *H* = Span{ (-1, 2, 1, 0), (1/3, -1/3, 0, 1) }.

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Definición: Espacio columna

Sea $A \in \mathcal{M}_{mxn}$ una matriz y $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ sus columnas. El ***espacio columna de la matriz A*** está definido como:

$$\mathrm{Col}\{A\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b} \ \text{ para algún } \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Teorema

El espacio columna de una matriz de *m x n* es un subespacio de $\mathbb{R}^m$

Demostración

Col{*A*} es un conjunto generado por un número de vectores y por un teorema previo (pag. 19), es un subespacio de $\mathbb{R}^m$

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo

Encontrar una matriz A tal que $\mathrm{Col}\{A\} = \{(6a - b, a + b, -7a)\ \forall a, b \in \mathbb{R}\}$

Solución

Podemos expresar los puntos de Col{A} como:

$$\mathrm{Col}\{A\} \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6a - b \\ a + b \\ -7a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, Col{A} = Span{ (6, 1, -7), (-1, 1, 0) }. Es decir, estas deben ser las 2 columnas de A

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Comparación entre espacio nulo y espacio columna

Contrast Between Nul *A* and Col *A* for an *m* x *n* Matrix *A*

Nul A	Col A
1. Nul A is a subspace of $\mathbb{R}^n$.	**1.** Col A is a subspace of $\mathbb{R}^m$.
2. Nul A is implicitly defined; that is, you are given only a condition ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) that vectors in Nul A must satisfy.	**2.** Col A is explicitly defined; that is, you are told how to build vectors in Col A.
3. It takes time to find vectors in Nul A. Row operations on $[\, A \quad \mathbf{0} \,]$ are required.	**3.** It is easy to find vectors in Col A. The columns of A are displayed; others are formed from them.
4. There is no obvious relation between Nul A and the entries in A.	**4.** There is an obvious relation between Col A and the entries in A, since each column of A is in Col A.
5. A typical vector $\mathbf{v}$ in Nul A has the property that $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.	**5.** A typical vector $\mathbf{v}$ in Col A has the property that the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ is consistent.
6. Given a specific vector $\mathbf{v}$, it is easy to tell if $\mathbf{v}$ is in Nul A. Just compute $A\mathbf{v}$.	**6.** Given a specific vector $\mathbf{v}$, it may take time to tell if $\mathbf{v}$ is in Col A. Row operations on $[\, A \quad \mathbf{v} \,]$ are required.
7. Nul $A = \{\mathbf{0}\}$ if and only if the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.	**7.** Col $A = \mathbb{R}^m$ if and only if the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution for every $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^m$.
8. Nul $A = \{\mathbf{0}\}$ if and only if the linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is one-to-one.	**8.** Col $A = \mathbb{R}^m$ if and only if the linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ maps $\mathbb{R}^n$ *onto* $\mathbb{R}^m$.

Índice de contenidos

Kernel y rango de una transformación lineal

Decimos que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es una transformación lineal, pero no es la única

Definición: Transformación lineal

La transformación $T : V \to W$ entre dos espacios vectoriales V y W es la regla que para cada vector $\mathbf{v} \in V$ asigna un único vector $\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \in W$, de tal forma que:

1. $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$
2. $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall c \in \mathbb{K}$

Ejemplo

Para una matriz $A \in \mathcal{M}_{mxn}$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} & \to & A\mathbf{x} \end{array}$$

es una transformación lineal (podemos verificar que T cumple las dos condiciones requeridas).

Kernel y rango de una transformación lineal

Ejemplo

Consideremos el espacio de todas las funciones continuas con todas sus derivadas continuas, que tienen un argumento real ($\mathbb{R}$) y devuelven un valor real ($\mathbb{R}$). A este espacio se le denomina $C^{\infty}(\mathbf{R})$. Por ejemplo, todos los polinomios pertenecen a este espacio, así como todas las funciones trigonométricas tipo *sin* o *cos*. Se puede demostrar que $C^{\infty}(\mathbf{R})$ es un espacio vectorial.

Consideremos la transformación que asigna a cada función de $C^{\infty}(\mathbf{R})$ su derivada:

$$\begin{array}{rcl} D : C^{\infty}(\mathbf{R}) & \to & C^{\infty}(\mathbf{R}) \\ f & \to & D(f) \end{array}$$

es una transformación lineal.

Demostración

1. $D(f+g) = D(f) + D(g)$
2. $D(cf) = cD(f)$

Kernel y rango de una transformación lineal

Definición: Kernel (Núcleo)

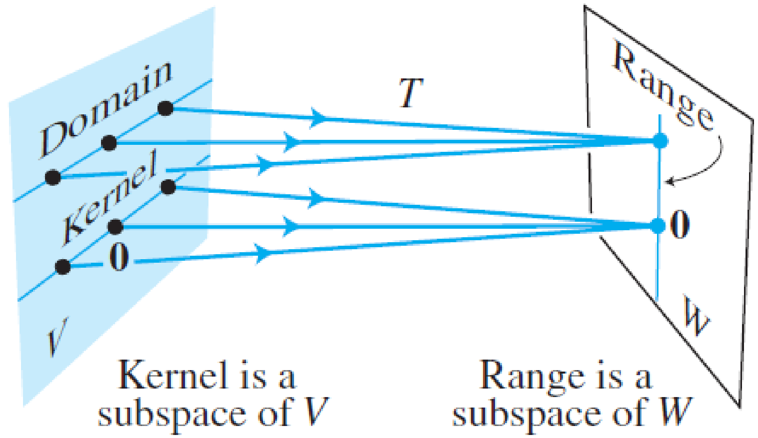
El ***kernel de una transformación*** T es el conjunto de todos los vectores tales que:

$$\mathrm{Ker}\{T\} = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Definición: Rango (Imagen - recorrido)

El ***rango de una transformación*** T es el conjunto de todos los vectores tales que:

$$\mathrm{Range}\{T\} = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists \mathbf{v} \in V \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$



Kernel y rango de una transformación lineal

Ejemplo (…continuación)

$\mathrm{Ker}\{T\} = \mathrm{Nul}\{A\}$

$\mathrm{Ker}\{D\} = \{f(x) = c\}$ porque $D(c) = 0$ *(* todas las funciones que son constantes *)*

Teorema

Si $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, entonces:

$$\mathrm{Ker}\{T\} = \mathrm{Nul}\{A\}$$

$$\mathrm{Range}\{T\} = \mathrm{Col}\{A\}$$

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios II
  - Ejercicio 4.2.3
  - Ejercicio 4.2.9
  - Ejercicio 4.2.11
  - Ejercicio 4.2.30
  - Ejercicio 4.2.31

Índice de contenidos

Conjuntos y bases linealmente independientes

Definición: Independencia lineal

Un conjunto de vectores $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \}$ es *linealmente **independiente***, si y sólo si, la única solución a la ecuación

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

es la solución trivial $(c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0)$. El conjunto es *linealmente **dependiente*** si existe otra solución a la ecuación.

Nota: no podemos simplemente poner todos los vectores como columnas de una matriz A y resolver $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, porque esto sólo es válido para vectores en $\mathbb{R}^n$, pero no es válido para cualquier espacio vectorial

CEU Universidad San Pablo

Conjuntos y bases linealmente independientes

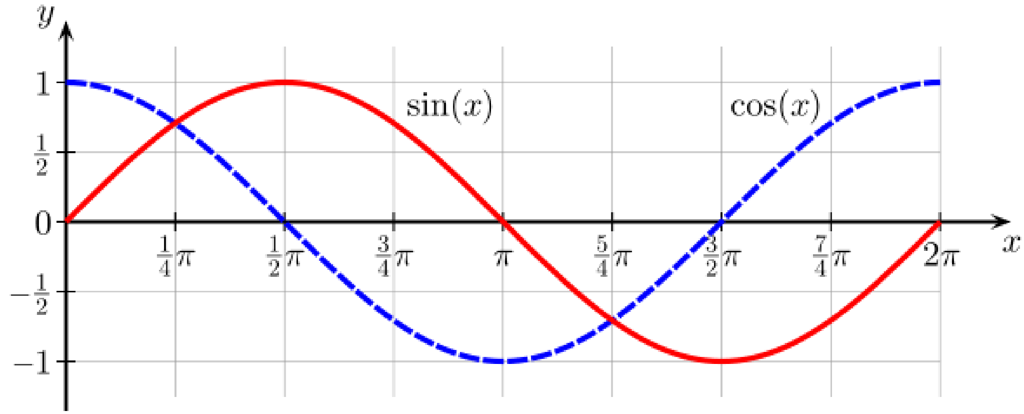
Ejemplo

- $\{\mathbf{v}_1\}$ es linealmente dependiente si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente dependiente si $\mathbf{v_2} = c\mathbf{v}_1$
- $\{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es linealmente dependiente

Ejemplo

En el espacio vectorial de funciones continuas en $\mathbb{R}$, $C(\mathbb{R})$, los vectores $f_1(x) = \sin x$ y $f_2(x) = \cos x$ son independientes porque

$$f_2(x) \neq c f_1(x)$$



Conjuntos y bases linealmente independientes

Teorema

Un conjunto de vectores $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \}$, con $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ es *lineamente* ***dependiente***, si cualquiera de los vectores $\mathbf{v}_j$ *($j > 1$)* es linealmente dependiente de los anteriores $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1} \}$

Ejemplo

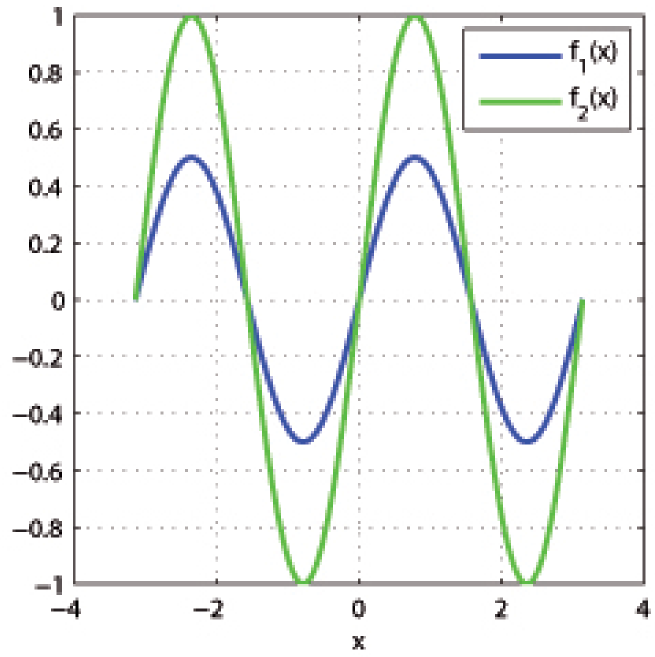
En el espacio vectorial de polinomios, consideramos los vectores $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 4 - x$. El conjunto $\{ p_0(x), p_1(x), p_2(x) \}$ es linealmente dependiente porque

$$p_2(x) = 4p_0(x) - p_1(x) \quad \Rightarrow \quad p_1(x) - 4p_0(x) + p_2(x) = 0$$

Conjuntos y bases linealmente independientes

Ejemplo

En el espacio vectorial de funciones continuas, consideramos los vectores $f_1(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$ y $f_2(x) = \sin(2x)$. El conjunto $\{ f_1(x), f_2(x) \}$ son linealmente **dependientes** porque $f_2(x) = 2\cdot f_1(x)$



CEU Universidad San Pablo

Conjuntos y bases linealmente independientes

Teorema: Base de un subespacio

Un conjunto de vectores $B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \}$ es una base del subespacio vectorial H, si y sólo si:

1. B es un conjunto de vectores linealmente independientes
2. $H = \mathrm{Span}\{ B \}$

En otras palabras, una base es un conjunto de vectores no redundantes que generan H

Ejemplo

Sea A una matriz invertible. Por el teorema de la matriz invertible (ver temas anteriores), sabemos que las columnas de A generan $\mathbb{R}^n$ y que son linealmente independientes. Por lo tanto, las columnas de A son una base de $\mathbb{R}^n$

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo

La base estándar de $\mathbb{R}^n$ son las columnas de I_n

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sean $\mathbf{v}_1 = (3, 0, -6)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 1, 7)$ y $\mathbf{v}_3 = (-2, 1, 5)$. ¿Es $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

Conjuntos y bases linealmente independientes

Ejemplo

La base estándar de $\mathbb{R}^n$ son las columnas de I_n

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sean $\mathbf{v}_1 = (3, 0, -6)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 1, 7)$ y $\mathbf{v}_3 = (-2, 1, 5)$. ¿Es $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

Solución

La pregunta es la misma que preguntar si A es invertible con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 6 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Dado que A es invertible, tenemos que $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

Conjuntos y bases linealmente independientes

Ejemplo

$B = \{ 1, x, x^2, x^3, \ldots \}$ es la base estándar del espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{P}$

Demostración

1. B es linealmente independiente

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad c_0 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots = 0 \Rightarrow c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = 0$$

La única forma de que un polinomio de grado cualquiera sea 0 para todos los valores de x es que todos los coeficientes del polinomio sean 0.

2. $\mathbb{P} = \mathrm{Span}\{ B \}$

Es obvio que cualquier polinomio puede ser escrito como una combinación lineal de elementos de B (de hecho, es la forma como lo hacemos normalmente)

Ejemplo

Sea H = Span{ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ } con $\mathbf{v}_1=(0, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2=(2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3=(6, 16, -5)$. Encontrar una base para H

Conjuntos y bases linealmente independientes

Ejemplo

Sea H = Span{ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ } con $\mathbf{v}_1$=(0, 2, -1), $\mathbf{v}_2$=(2, 2, 0), $\mathbf{v}_3$=(6, 16, -5). Encontrar una base para H

Solución

Todos los vectores en H son de la forma:

$$H \ni \mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

Nos damos cuenta que $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$, por lo tanto, $\mathbf{v}_3$ es redundante:

$$\begin{aligned} H \ni \mathbf{x} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3(5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) \\ &= (c_1 + 5c_3)\mathbf{v}_1 + (c_2 + 3c_3)\mathbf{v}_2 \\ &= c_1'\mathbf{v}_1 + c_2'\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Es suficiente construir nuestra base de H con $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

Conjuntos y bases linealmente independientes

Teorema del conjunto generador (*Spanning set theorem*)

Sea $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \}$ un conjunto de vectores y $H = \text{Span}\{S\}$. Entonces:

1. Si $\mathbf{v}_k$ es una combinación lineal del resto, entonces el conjunto $S - \{\mathbf{v}_k\}$ sigue generando H
2. Si $H \neq \{ \mathbf{0} \}$, entonces algún subconjunto de S es una base de H

Demostración

1. Asumimos que $\mathbf{v}_k$ es una combinación lineal del resto de vectores de la forma:

$$\mathbf{v}_k = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + a_p\mathbf{v}_p$$

Si consideramos cualquier vector $\mathbf{x}$ en H, puede ser expresado sin usar $\mathbf{v}_k$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p \\ &= (c_1 + a_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (c_{k-1} + a_{k-1})\mathbf{v}_{k-1} + \\ &\quad (c_{k+1} + a_{k+1})\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + (c_p + a_p)\mathbf{v}_p\end{aligned}$$

2. *Paso 1:* Si S es un conjunto linealmente independiente, entonces S es una base de H

   Paso 2: Si S no lo es, usando el punto anterior, podemos quitar un vector para generar S', que continuará generando H (volver a *Paso 1*)

CEU Universidad San Pablo

Índice de contenidos

Bases para Nul{A} y Col{A}

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. Resolvemos el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$(A|\mathbf{0}) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En azul se muestran las columnas pivote, de las cuales hemos aprendido que:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 &= -2x_4 + 2x_5 \end{aligned} \Rightarrow \mathrm{Nul}\{A\} \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

CEU Universidad San Pablo

Bases para Nul{*A*} y Col{*A*}

Ejemplo (…continuación)

$$\mathrm{Nul}\{A\} \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la base del **Nul{*A*}** es { (2,1,0,0,0), (1,0,-2,1,0), (-3,0,2,0,1) }:

$$\mathrm{Nul}\{A\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bases para Nul{A} y Col{A}

Ejemplo

Si consideramos $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ del ejemplo anterior, tenemos que :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Si llamamos B a la matriz anterior, entonces la columnas no-pivote podemos escribirlas como una combinación lineal de las columnas pivote:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= -2\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_4 &= -\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_5 &= 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

Bases para Nul{*A*} y Col{*A*}

Ejemplo (…continuación)

Dado que las operaciones por filas no cambian la dependencia lineal entre las columnas de una matriz, podemos derivar las mismas relaciones para la matriz *A*:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= -2\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_4 &= -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_5 &= 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

Finalmente, la base del **Col{*A*}** es { $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ }.

$$\mathrm{Col}\{A\} = \mathrm{Span}\,\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Bases para Nul{A} y Col{A}

Teorema

Las columnas pivote de A constituyen una base del Col{A}

Demostración

Sea B la matriz escalonada reducida de A

1. Las columnas pivote de B forman un conjunto linealmente independiente porque ninguno de sus elementos puede ser expresado como una combinación lineal de los elementos previos

2. Las relaciones de dependencia entre las columnas no se ven afectadas por las operaciones por filas. Por lo tanto, las correspondientes columnas pivote de A son también linealmente independientes y, consecuentemente, una base del Col{A}

Bases para Nul{*A*} y Col{*A*}

Lo más pequeño posible, lo más grande posible

Dos puntos de vista diferentes de una base:

1. El Teorema del Conjunto Generador (*Spanning Set Theorem*) establece que la base es el conjunto más pequeño posible que expande el subespacio requerido
2. Las bases tienen el máximo número de vectores que generan el subespacio requerido. Si añadimos uno más, el nuevo conjunto no será linealmente independiente

Ejemplo

- { (1,0,0), (2,3,0) } es un conjunto de 2 vectores linealmente **independientes**. Pero no pueden generar $\mathbb{R}^3$ porque para eso, necesitamos 3 vectores
- { (1,0,0), (2,3,0), (4,5,6) } es un conjunto de 3 vectores linealmente **independientes** que generan $\mathbb{R}^3$, por lo tanto, es una base de $\mathbb{R}^3$
- { (1,0,0), (2,3,0), (4,5,6), (7,8,9) } es un conjunto de 4 vectores linealmente dependientes que generan $\mathbb{R}^3$, pero que no son una base

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios III
  - Ejercicio 4.3.1
  - Ejercicio 4.3.8
  - Ejercicio 4.3.12
  - Ejercicio 4.3.24
  - Ejercicio 4.3.31
  - Ejercicio 4.3.32
  - Ejercicio 4.3.33

Índice de contenidos

Sistemas de coordenadas

Una razón importante para asignar una base a un espacio vectorial V es que hace que V "se comporte" como si fuese $\mathbb{R}^n$, lo que se denomina, un sistema de coordenadas

Teorema de Representación Única

Sea $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \}$ una base del espacio vectorial V, y consideramos cualquier vector $\mathbf{v} \in V$. Existe un único conjunto de escalares tales que:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \ldots + c_n\mathbf{b}_n$$

Demostración

Asumimos que existe otro conjunto de escalares tales que

$$\mathbf{v} = c_1'\mathbf{b}_1 + c_2'\mathbf{b}_2 + \ldots + c_n'\mathbf{b}_n$$

Restando ambas ecuaciones tenemos:

$$\mathbf{0} = (c_1 - c_1')\mathbf{b}_1 + (c_2 - c_2')\mathbf{b}_2 + \ldots + (c_n - c_n')\mathbf{b}_n$$

Pero dado que los vectores $\mathbf{b}_i$ forman una base y son linealmente independientes, deben ser:

$$(c_1 - c_1') = (c_2 - c_2') = (c_n - c_n') = 0$$

Sistemas de coordenadas

Definición: Coordenadas

Sea $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \}$ una base del espacio vectorial V, y consideramos cualquier vector $\mathbf{v} \in V$. Las **coordenadas** de **v** en B son los coeficientes c_i tales que:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_n\mathbf{b}_n \Rightarrow [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

La transformación $T : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_B$ es denominado ***función de coordenadas***

CEU Universidad San Pablo

Sistemas de coordenadas

Ejemplo

Sea B = { (1,0), (1,2) } una base de $\mathbb{R}^2$ y $[\mathbf{x}]_B$ = (–2,3), entonces

$$\mathbf{x} = -2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 = -2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$$

De hecho (1,6) son las coordenadas de **x** en la base estándar { $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ }

$$\mathbf{x} = 1\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$$

Es decir, el punto **x** no cambia, pero dependiendo del sistema de coordenadas empleado, “lo vemos” con diferentes coordenadas

Ejemplo (…continuación)

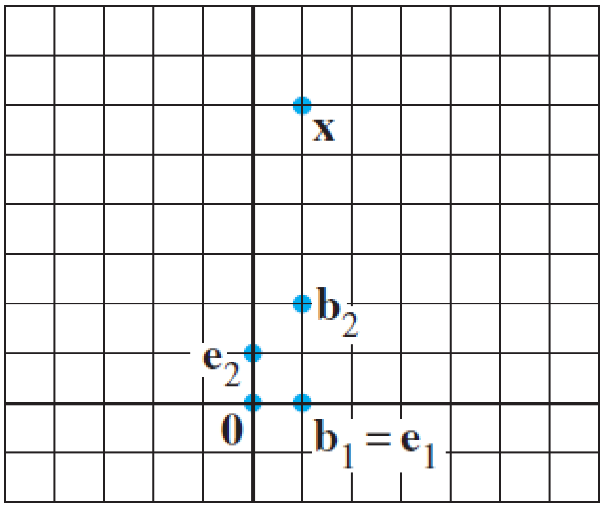


FIGURE 1 Standard graph paper.

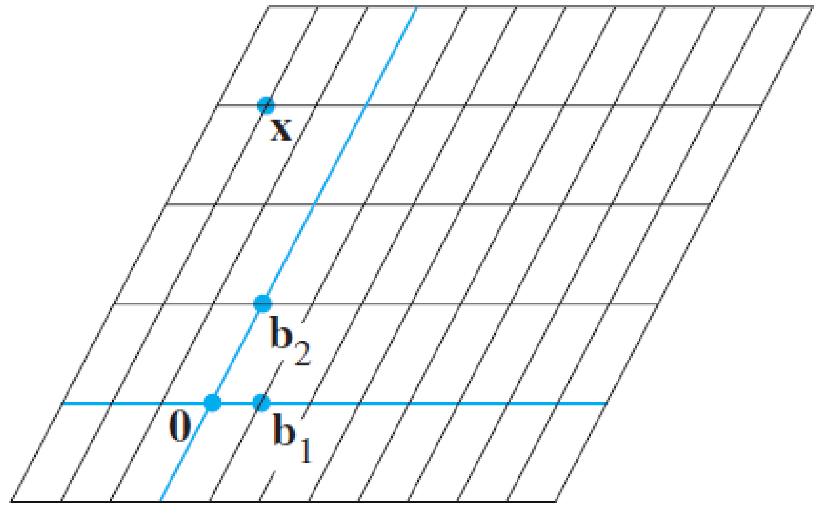


FIGURE 2 $\mathcal{B}$-graph paper.

Si tenemos un punto **x** en $\mathbb{R}$, podemos encontrar fácilmente sus coordenadas en cualquier base, como en el siguiente ejemplo

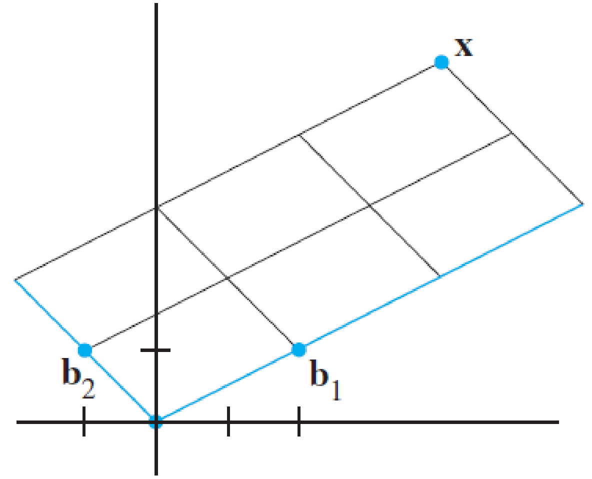
Ejemplo

Sean **x** = (4,5) y la base B = { (2,1), (-1,1) }. Necesitamos encontrar c_1 y c_2 tales que:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

De aquí podemos obtener fácilmente que $c_1 = 3$ y $c_2 = 2$

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Sistemas de coordenadas: cambio de base

Cambio desde la base estándar a una base arbitraria

Nótese que el sistema de ecuaciones previo es de la forma

$$\mathbf{x} = P_B[\mathbf{x}]_B$$

donde P_B es denominada **matriz de cambio de coordenadas** y sus columnas son los vectores de la base B. Como consecuencia, esta matriz es invertible, y podemos calcular las coordenadas del vector **x** en la base B como:

$$[\mathbf{x}]_B = P_B^{-1}\,\mathbf{x}$$

Cambio entre dos bases arbitrarias

Digamos que conocemos las coordenadas de un punto en alguna base B_1, y queremos saber sus coordenadas en alguna otra base B_2. Podemos usar

$$\mathbf{x} = P_{B_1}[\mathbf{x}]_{B_1} = P_{B_2}[\mathbf{x}]_{B_2} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{x}]_{B_2} = P_{B_2}^{-1}\,P_{B_1}[\mathbf{x}]_{B_1}$$

Sistemas de coordenadas: función coordenadas

Teorema: La función coordenadas es un isomorfirmo entre *V* y $\mathbb{R}^n$

La función coordenadas es una transformación lineal biyectiva

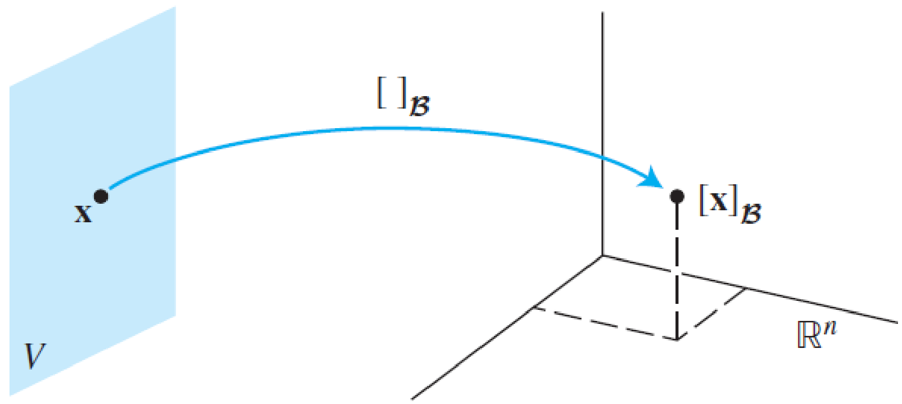


FIGURE 5 The coordinate mapping from V onto $\mathbb{R}^n$.

Corolario

Dado que la función coordenadas es una transformación lineal,

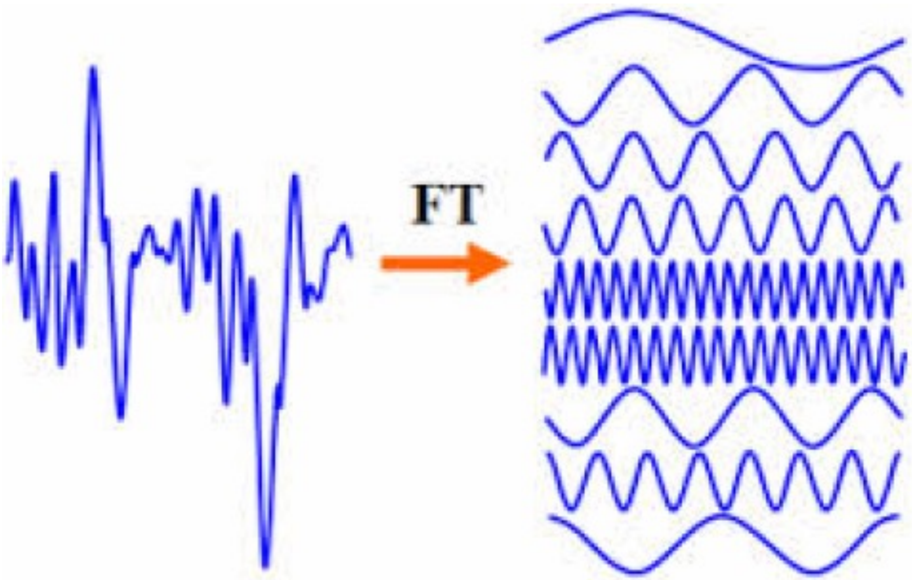
$$[a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_p\mathbf{u}_p]_B = a_1[\mathbf{u}_1]_B + a_2[\mathbf{u}_2]_B + \ldots + a_p[\mathbf{u}_p]_B$$

Sistemas de coordenadas: función coordenadas

Consecuencias

Cualquier operación en V puede ser ejecutada en $\mathbb{R}^n$ y después volver a V.

Para espacios de funciones, esto abre una nueva puerta para analizar funciones (señales, imágenes, …) en $\mathbb{R}^n$ usando una base apropiada: Transformada de Fourier, Transformada de Wavelet (ondículas), Transformación Discreta del Coseno, …



Ejemplo

Consideremos el espacio de polinomios de grado 2, $\mathbb{P}^2$. Cualquier polinomio en este espacio es de la forma:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

Si escogemos la base estándar en $\mathbb{P}^2$, es decir,

$$B = \{1, t, t^2\}$$

Entonces, tenemos la función coordenadas

$$T(p(t)) = [p]_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

que es un isomorfirmo de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo (...continuación)

Ahora podemos realizar cualquier razonamiento en $\mathbb{P}^2$ estudiando un problema análogo en $\mathbb{R}^3$.

Por ejemplo, estudiemos si los siguientes polinomios son linealmente independientes:

$$\begin{array}{rclcl} p_1(t) & = & 1+2t^2 & \Rightarrow & [p_1(t)]_B = (1,0,2) \\ p_2(t) & = & 4+t+5t^2 & \Rightarrow & [p_2(t)]_B = (4,1,5) \\ p_3(t) & = & 3+2t & \Rightarrow & [p_3(t)]_B = (3,2,0) \end{array}$$

Simplemente necesitamos ver si las coordenadas correspondientes en $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mirando las columnas no-pivote, hemos aprendido que:

$$p_3(t) = -5p_1(t) + 2p_2(t)$$

Finalmente, concluimos que los 3 polinomios **no** son linealmente independientes.

Ejemplo

Consideremos $\mathbf{v}_1 = (3, 6, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$, y $H = \mathrm{Span}\{B\}$. H es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ (un plano), porque sus puntos tienen sólo 2 coordenadas.

Por ejemplo, las coordenadas de $\mathbf{x} = (3, 12, 7) \in H$ son $[\mathbf{x}]_B = (2, 3)$.

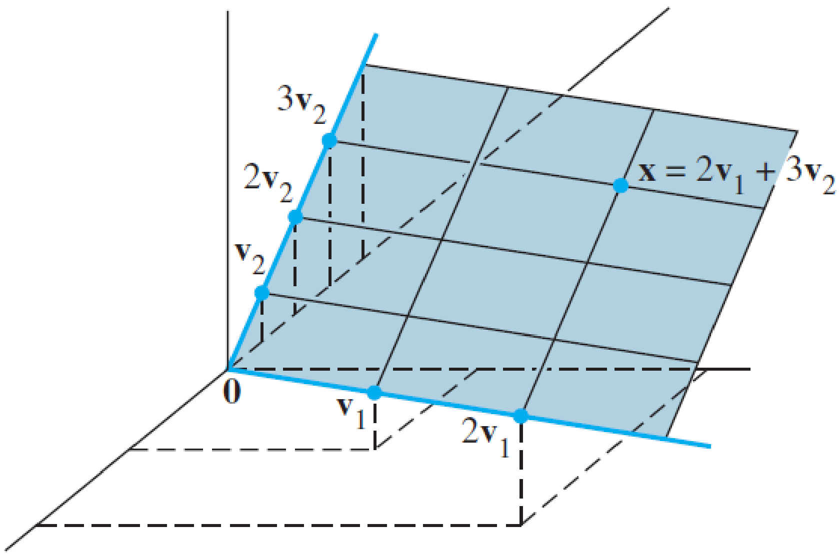


FIGURE 7 A coordinate system on a plane H in $\mathbb{R}^3$.

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios IV
  - Ejercicio 4.4.3
  - Ejercicio 4.4.8
  - Ejercicio 4.4.9
  - Ejercicio 4.4.13
  - Ejercicio 4.4.17
  - Ejercicio 4.4.19

Índice de contenidos

- Definición
- Subespacio vectorial
- Subespacio generado por un conjunto de vectores
- Espacio nulo y espacio columna de una matriz
- Kernel y rango de una transformación lineal
- Conjuntos y bases linealmente independientes
- Bases para Nul{A} y Col{A}
- Sistemas de coordenadas
- Dimensión de un espacio vectorial
- Rango de una matriz
- Cambio de base

Dimensión de un espacio vectorial

Si la base de un espacio vectorial V tiene n elementos, entonces V es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Este valor n es un número característico de cada espacio y se denomina ***dimensión***.

Teorema

Sea V un espacio vectorial con una base $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \}$. Entonces, cualquier subconjunto de V con más de n elementos es linealmente **dependiente**

Demostración

Sea S un subconjunto de V con $p > n$ vectores

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$$

Consideremos el conjunto de coordenadas de esos vectores:

$$\{[\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, \ldots, [\mathbf{v}_p]_B\}$$

Son $p > n$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, necesariamente linealmente dependientes. Es decir, existen unos $c_1, c_2, \ldots, c_p$, no todos ellos 0, tales que:

$$c_1[\mathbf{v}_1]_B + c_2[\mathbf{v}_2]_B + \cdots + c_p[\mathbf{v}_p]_B = 0 \in \mathbb{R}^n$$

Dimensión de un espacio vectorial

Teorema

Demostración (…continuación)

Si tenemos en cuenta que la función coordenadas es lineal, entonces tenemos que:

$$\left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p\right]_B = 0 \in \mathbb{R}^n$$

Finalmente, usamos el hecho de que la función coordenadas es biyectiva:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0 \in V$$

Y, por lo tanto, queda demostrado que p vectores en S son linealmente dependientes

Teorema

Si una base de un espacio vectorial tiene n vectores, entonces todas sus bases tienen n vectores

Demostración

Sea B_1 una base del espacio vectorial V con n vectores. Sea B_2 otra base de V. Por el teorema anterior, B_2 tiene como mucho n vectores. Asumimos ahora que B_2 tiene menos de n vectores, entonces por el teorema anterior, B_1 no sería una base. Esto es una contradicción con el hecho de que B_1 sea una base y, por lo tanto, B_2 no puede tener menos de n vectores

Dimensión de un espacio vectorial

Definición

Si un espacio vectorial V es generado por un conjunto finito de vectores, entonces V se dice que es ***finito-dimensional*** y su ***dimensión*** ($\dim\{V\}$) es el número de elementos de cualquiera de sus bases.

La dimensión de $V = \{\mathbf{0}\}$ es 0.

Si V no está generado por un conjunto finito de vectores, entonces se dice que es ***infinito-dimensional***.

Ejemplo

$\dim\{\mathbb{R}^n\} = n$

$\dim\{\mathbb{P}_2\} = 3$, porque una de sus bases es $\{1, t, t^2\}$

$\dim\{\mathbb{P}\} = \infty$

$\dim\{\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}\} = 2$, si forman una base, es decir, si son linealmente independientes

Dimensión de un espacio vectorial

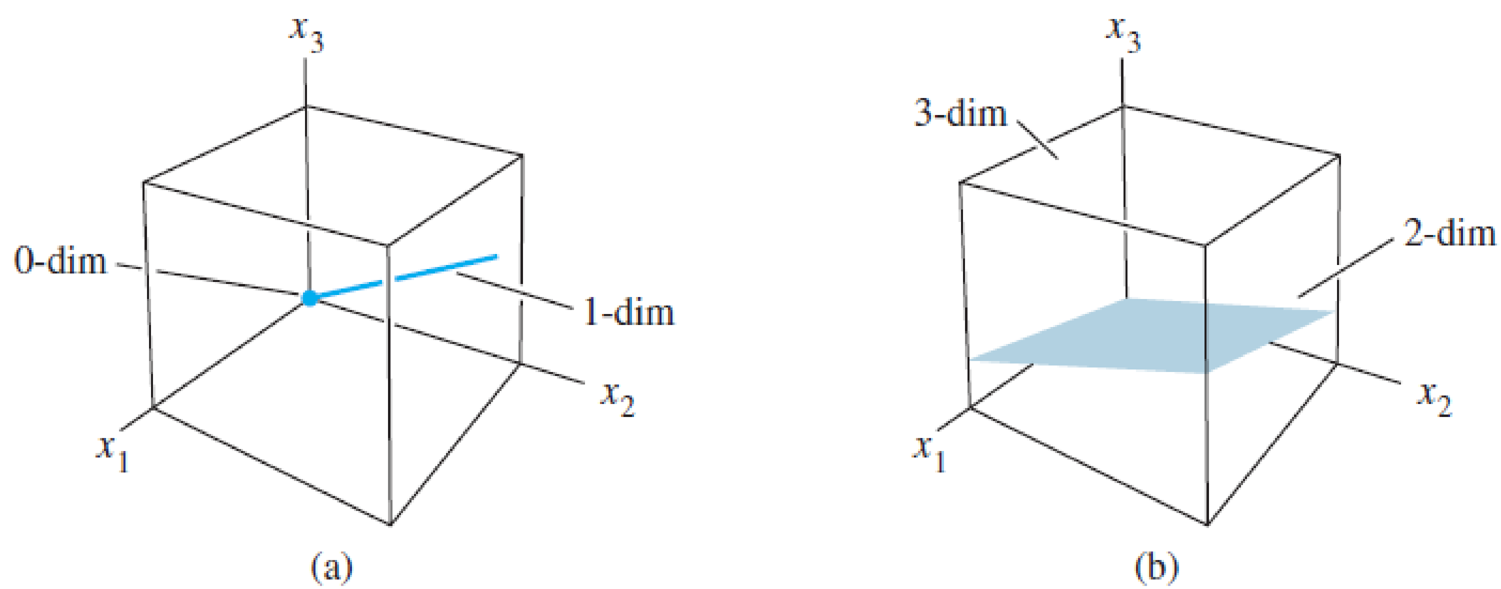
Ejemplo: clasificación de subespacios en $\mathbb{R}^3$ (según su dimensión)

Hay un único subespacio de dimensión 0 $(\{\mathbf{0}\})$

Hay infinitos subespacios de dimensión 1 (todas las rectas que pasan por el origen)

Hay infinitos subespacios de dimensión 2 (todos los planos que pasan por el origen)

Hay un único subespacio de dimensión 3 $(\mathbb{R}^3)$



Dimensión de un espacio vectorial

Teorema

Sea $H \subseteq V$ un subespacio vectorial de un espacio vectorial *V*. Entonces, $\dim\{H\} \leq \dim\{V\}$

Teorema

Sea *V* un espacio vectorial *n*-dimensional ($n \geq 1$)

- Cualquier subconjunto linealmente independiente de *V* con *n* elementos es una base
- Cualquier subconjunto de *V* con *n* elementos que genere *V* es una base

Dimensión de un espacio vectorial

Teorema

Considerando cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{mxn}$

- $\dim\{\text{Nul}\{A\}\}$ es el número de variables libres de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\dim\{\text{Col}\{A\}\}$ es el número de columnas pivote de A

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

El número de columnas pivote de A es 2 = $\dim\{\text{Col}\{A\}\}$ (en rojo), mientras que el número de variables libres es 3 = $\dim\{\text{Nul}\{A\}\}$ (las variables libres son x_2, x_4 y x_5)

CEU Universidad San Pablo

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios V
  - Ejercicio 4.5.1
  - Ejercicio 4.5.13
  - Ejercicio 4.5.21
  - Ejercicio 4.5.22
  - Ejercicio 4.5.25
  - Ejercicio 4.5.26

Índice de contenidos

Rango de una matriz

Informalmente, el ***rango de una matriz*** es el número de filas linealmente **independientes** de esa matriz. También puede ser definido como el número de columnas linealmente **independientes** de esa matriz, porque ambas definiciones producen el mismo resultado

Definición: Espacio de filas de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mxn}$, el **espacio de filas** (*row space*) de A es el espacio generado por todas las filas de A ($\mathrm{Row}\{A\} \subseteq \mathbb{R}^n$)

Teorema

$$\mathrm{Row}\{A\} = \mathrm{Col}\{A^T\}$$

Rango de una matriz

Teorema

Si una matriz *A* es equivalente por filas a otra matriz *B*, entonces Row{*A*} = Row{*B*}. Si *B* está en su forma escalonada, entonces las filas no-nulas de *B* forman una base de Row{*A*}

Demostración

- *Demostración* $Row\{A\} \supseteq Row\{B\}$

  Dado que las filas de *B* son obtenidas mediante operaciones por filas sobre *A*, entonces cualquier combinación lineal de las filas de *B* puede ser obtenida como combinación lineal de las filas de *A*.

- *Demostración* $Row\{A\} \subseteq Row\{B\}$

  Dado que las operaciones por filas son reversibles, cualquier combinación lineal de las filas de *A* puede ser obtenida como combinación lineal de las filas de *B*.

- *Demostración filas no-nulas de B forman una base*

  Estas filas son linealmente independientes porque cualquier fila no-nula de *B* no puede ser obtenida como combinación lineal de las filas anteriores (porque está en forma escalonada y hay números en las columnas primeras que tienen 0s debajo).

Rango de una matriz

Ejemplo: Calcular una base para los espacios fila, columna y nulo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\1\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}-5\\-2\\0\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\2\\-4\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}5\\-7\\20\\0\end{matrix} \end{bmatrix}$$

Las columnas pivote son las que están resaltadas en rojo. En este punto, ya podemos construir una base para los espacios fila y columna de *A*.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^5 \supset \mathrm{Row}\{A\} &= \mathrm{Span}\{(1,3,-5,1,5),(0,1,-2,2,-7),(0,0,0,-4,20)\} \\ \mathbb{R}^4 \supset \mathrm{Col}\{A\} &= \mathrm{Span}\{(-2,1,3,1),(-5,3,11,7),(0,1,7,5)\} \end{aligned}$$

Para calcular el espacio nulo de *A* necesitamos la forma escalonada reducida:

$$A \sim B \sim C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo: Calcular una base para los espacios fila, columna y nulo (…continuación)

$$A \sim B \sim C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 + x_5 &=& 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_5 &=& 0 \\ x_4 - 5x_5 &=& 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& -x_3 - x_5 \\ x_2 &=& 2x_3 - 3x_5 \\ x_4 &=& 5x_5 \end{array} \Rightarrow \mathrm{Nul}\{A\} \ni \mathbf{x} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{R}^5 \supset \mathrm{Nul}\{A\} = \mathrm{Span}\{(-1,2,1,0,0),(-1,-3,0,5,1)\}$$

Rango de una matriz

Definición: Rango de una matriz

$$\mathrm{Rango}\{A\} \text{ o } \mathrm{Rank}\{A\} = \dim\{\mathrm{Col}\{A\}\}$$

Es decir, por definición, Rank{*A*} es el número de columnas pivote de *A*

Teorema del Rango

Para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{mxn}$,

1. $\dim\{\mathrm{Row}\{A\}\} = \dim\{\mathrm{Col}\{A\}\}$
2. $\mathrm{Rank}\{A\} + \dim\{\mathrm{Nul}\{A\}\} = n$

Demostración

1. Sea *B* la forma escalonada reducida de *A*. Por definición, Rank{*A*} es el número de columnas pivote de *A* (y lo que es lo mismo, el número de columna pivote de *B*). Dado que *B* está en forma escalonada reducida, cada una de sus filas no-cero tiene un pivote y, por lo tanto, el número de filas no-cero coincide con el número de columnas pivote. Las bases de Row{*B*} = Row{*A*} deben tener tantos elementos como columnas pivote.

2. Por un teorema anterior (pág. 74), sabemos que dim{Nul{*A*}} es el número de variables libres en *A***x** = **0**, es decir, el número de columnas no-pivote de *B*. Por tanto:

$$\dim\{\mathrm{Col}\{A\}\} + \dim\{\mathrm{Nul}\{A\}\} = n$$

Pero, por definición, Rank{*A*} = dim{Col{*A*}}, lo cual demuestra el teorema.

Rango de una matriz

Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_{7\text{x}9}$. Sabemos que dim{Nul{$A$}} = 2. ¿Cuál es el Rank{A}?

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_{7\text{x}9}$. Sabemos que $\dim\{\mathrm{Nul}\{A\}\} = 2$. ¿Cuál es el $\mathrm{Rank}\{A\}$?

Solución

De acuerdo con el teorema anterior:

$$\mathrm{Rank}\{A\} = n - \dim\left\{\mathrm{Nul}\{A\}\right\} = 9 - 2 = 7$$

Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_{7\text{x}9}$. Sabemos que dim{Nul{$A$}} = 2. ¿Cuál es el Rank{A}?

Solución

De acuerdo con el teorema anterior:

$$\text{Rank}\{A\} = n - \dim\left\{\text{Nul}\{A\}\right\} = 9 - 2 = 7$$

Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_{6\text{x}9}$. ¿Podría ser que dim{Nul{A}} = 2?

Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_{7x9}$. Sabemos que dim{Nul{A}} = 2. ¿Cuál es el Rank{A}?

Solución

De acuerdo con el teorema anterior:

$$\text{Rank}\{A\} = n - \dim\big\{\text{Nul}\{A\}\big\} = 9 - 2 = 7$$

Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_{6x9}$. ¿Podría ser que dim{Nul{A}} = 2?

Solución

Supongamos que dim{Nul{A}} = 2, entonces:

$$\text{Rank}\{A\} = n - \dim\big\{\text{Nul}\{A\}\big\} = 9 - 2 = 7$$

Pero, dado que A tiene sólo 6 filas, el rango máximo sólo puede ser 6 (no 7), y por lo tanto, tenemos que $\dim\big\{\text{Nul}\{A\}\big\} \geq 3$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{Nul}\{A\} = \{(0, x_2, 0) \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{Row}\{A\} = \{(x_1, 0, x_3) \quad \forall x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{Col}\{A\} = \{(x_2, x_2, x_3) \quad \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{Nul}\{A^T\} = \{(x_1, -x_1, 0) \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

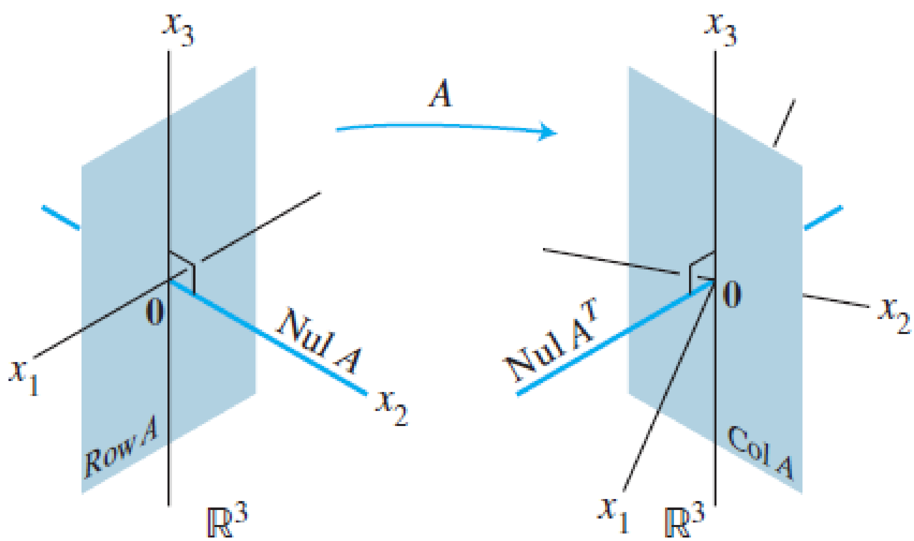


FIGURE 1 Subspaces determined by a matrix A.

Rango de una matriz

Teorema de la Matriz Invertible (…continuación)

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$,

xix. Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$

xx. $\text{Col}\{A\} = \mathbb{R}^n$

xxi. $\dim\{\text{Col}\{A\}\} = n$

xxii. $\text{Rank}\{A\} = n$

xxiii. $\text{Nul}\{A\} = \{\mathbf{0}\}$

xxiv. $\dim\{\text{Nul}\{A\}\} = 0$

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios VI
  - Ejercicio 4.6.1
  - Ejercicio 4.6.13
  - Ejercicio 4.6.15
  - Ejercicio 4.6.19
  - Ejercicio 4.6.26
  - Ejercicio 4.6.28
  - Ejercicio 4.6.29

Índice de contenidos

- Definición
- Subespacio vectorial
- Subespacio generado por un conjunto de vectores
- Espacio nulo y espacio columna de una matriz
- Kernel y rango de una transformación lineal
- Conjuntos y bases linealmente independientes
- Bases para Nul{A} y Col{A}
- Sistemas de coordenadas
- Dimensión de un espacio vectorial
- Rango de una matriz
- Cambio de base

Cambio de base

Ejemplo

Asumimos que tenemos un vector **x** que tiene dos coordenadas diferentes en dos sistemas de coordenadas diferentes *B* y *C*.

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } [\mathbf{x}]_C = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

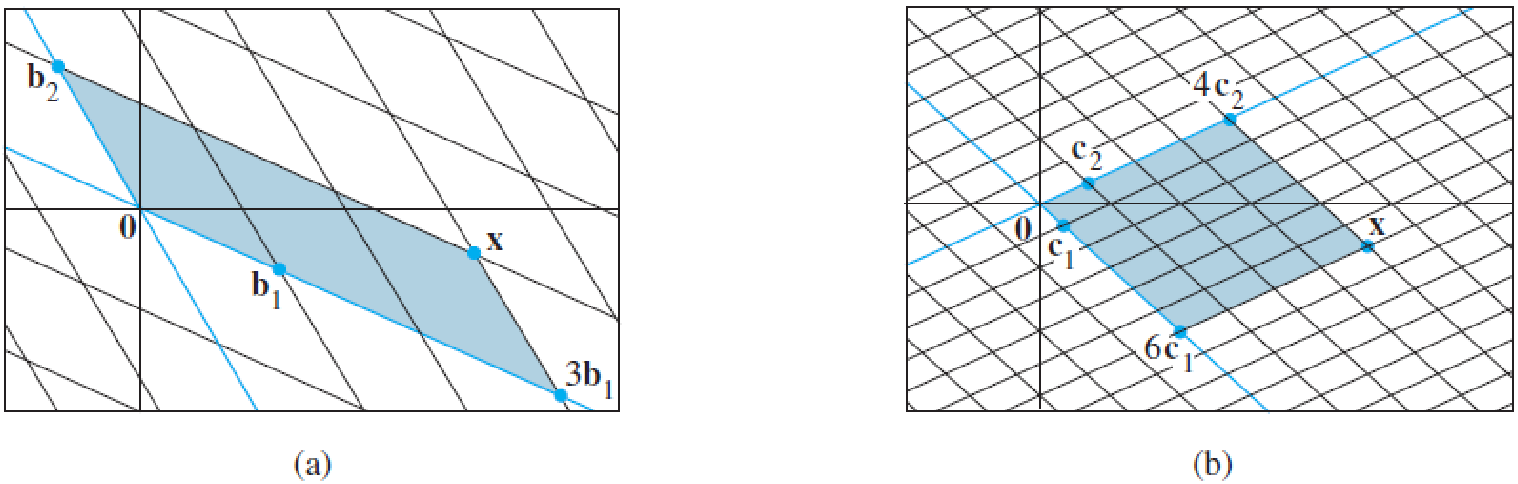


FIGURE 1 Two coordinate systems for the same vector space.

Cambio de base

Ejemplo (…continuación)

Consideramos que para nuestro ejemplo:

$$\mathbf{b}_1 = 4\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$$
$$\mathbf{b}_2 = -6\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$$

Podemos calcular las coordenadas de los vectores de la base *B* en el sistema de coordenadas de *C* como:

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_1]_C &= (4, 1) \\ [\mathbf{b}_2]_C &= (-6, 1) \end{aligned}$$

Las coordenadas de **x** en la base *B* son:

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

Ahora, si aplicamos la transformación de la función coordenadas tenemos:

$$[\mathbf{x}]_C = 3[\mathbf{b}_1]_C + [\mathbf{b}_2]_C = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (…continuación)

Nótese que las columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son las coordenadas de cada uno de los elementos de la base *B*, expresados en el sistema de coordenadas *C*, y que el cambio global de coordenadas entre *B* y *C* tiene la forma:

$$[\mathrm{x}]_C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} [\mathrm{x}]_B$$

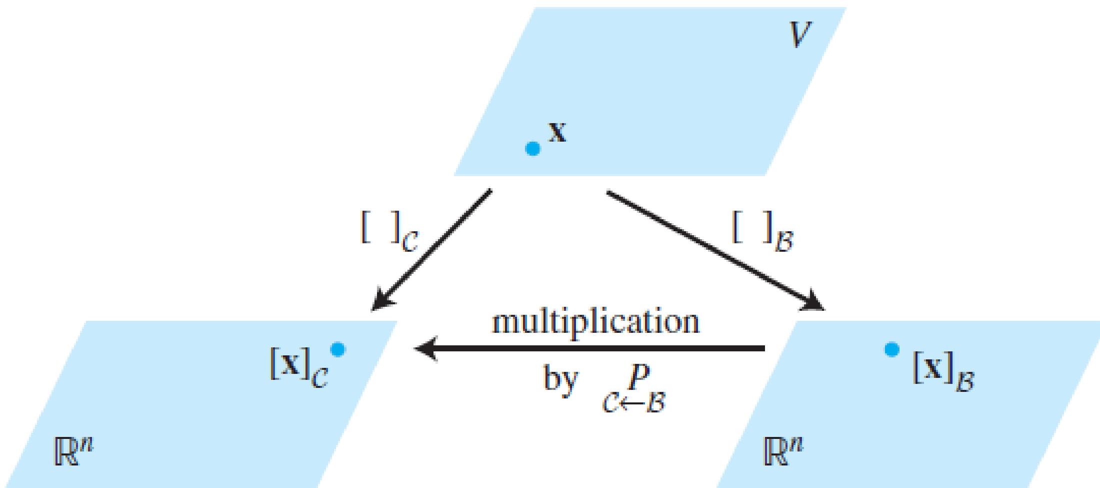
Cambio de base

Teorema: Cambio de base

Sean $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \}$ y $C = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n \}$ dos bases de un espacio vectorial V.

Podemos transformar las coordenadas de un sistema de coordenadas en el otro multiplicando por una matriz n x n invertible, denominada $P_{C\leftarrow B}$, cuyas columnas son las coordenadas de los vectores B en la base C.

$$[\mathbf{x}]_C = P_{C\leftarrow B}[\mathbf{x}]_B$$



Cambio de base

Corolario

Para convertir de coordenadas de *C* de vuelta en coordenadas de *B*, simplemente tenemos que invertir la transformación

$$P_{B\leftarrow C} = P_{C\leftarrow B}^{-1}$$

Corolario

Consideremos la base estándar en *V* dada por $E = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \}$. La matriz para convertir las coordenadas de *B* a *E* es simplemente:

$$P_{E\leftarrow B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos que para dos bases diferentes

$$\mathbf{x} = P_{E\leftarrow B}[\mathbf{x}]_B = P_{E\leftarrow C}[\mathbf{x}]_C$$

Por lo que

$$[\mathbf{x}]_C = P_{E\leftarrow C}^{-1}\, P_{E\leftarrow B}[\mathbf{x}]_B$$

Cambio de base

"Truco" numérico

Dadas 2 bases *B* y *C*, podemos calcular fácilmente las coordenadas de *B* en la base de *C* de la siguiente forma. Definimos dos matrices $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, cuyas columnas son los elementos de las bases. Entonces

$$(\, \mathcal{C} \mid \mathcal{B} \,) \sim (\, I_n \mid P_{C \leftarrow B} \,)$$

Ejemplo

Supongamos que tenemos $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \}$ y $C = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \}$, siendo

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\left[\begin{array}{cc:cc} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ -4 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

Y por lo tanto,

$$\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \qquad P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} -3/2 & -2 \\ 5/2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios VII
  - Ejercicio 4.7.1
  - Ejercicio 4.7.7

CEU Universidad San Pablo