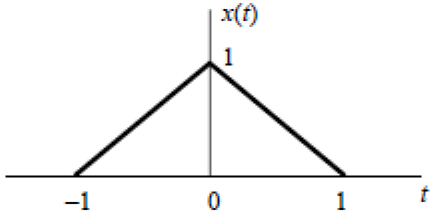
Señales y Sistemas

Dada la señal en tiempo continuo especificada por

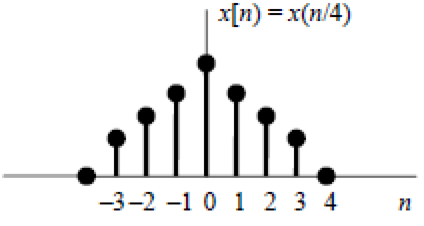
$$x(t) = \begin{cases} 1-|t| & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

Determine la secuencia de tiempo discreto resultante obtenida mediante muestreo uniforme de $x(t)$ con un intervalo de muestreo de (a) 0.25 s; (b) 0.5 s.

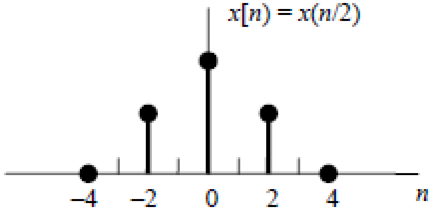
Solución: Es más fácil resolver este problema gráficamente. La señal $x(t)$ se grafica en la Fig. 1.2*a*. Las Figs. 1.2*b* y *c* muestran gráficos de las secuencias de las muestras resultantes obtenidas para los intervalos de muestreo especificados.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

(a) $T_s = 0.25$ s. De la Fig. 1.2*b* obtenemos

$$x[n] = \{\ldots, 0, 0.25, 0.5, 0.75, \underset{\uparrow}{1}, 0.75, 0.5, 0.25, 0, \ldots\}$$

(b) $T_s = 0.5$ s. De la Fig. 1.2*c*, obtenemos

$$x[n] = \{\ldots, 0, 0.5, \underset{\uparrow}{1}, 0.5, 0, \ldots\}$$

Ejemplo 3. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales periódicas con períodos fundamentales T_1 y T_2, respectivamente. ¿Cuáles son las condiciones para que la suma $z(t) = x_1(t) + x_2(t)$ sea periódica y cuál es el período fundamental de $z(t)$?

Solución: Puesto que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas con períodos fundamentales T_1 y T_2, respectivamente, se tiene que

$$x_1(t) = x_1(t+T_1) = x_1(t+mT_1), \quad m \text{ un entero positivo}$$

$$x_2(t) = x_2(t+T_2) = x_2(t+nT_2), \quad n \text{ un entero positivo}$$

Entonces,

$$z(t) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+nT_2)$$

Para que $z(t)$ sea periódica con período T, se necesita que

$$z(t) = z(t+T) = x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+nT_2)$$

y entonces se debe cumplir que

$$mT_1 = nT_2 = T$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m} = n\text{úmero racional}$$

En otras palabras, la suma de dos señales periódicas es periódica solamente si la relación entre sus periodos respectivos es un número racional. El período fundamental es entonces el mínimo común múltiplo de T_1 y T_2, y está dado por la Ec. (1.3) si los enteros m y n son primos relativos. Si la relación T_1/T_2 es un número irracional, entonces las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ no tienen un período común y $z(t)$ no puede ser periódica.

Ejemplo 7.

Considere la señal $x(t)$ mostrada en la Fig. 1.12. Se desea graficar $x(t-2)$ y $x(t+3)$.

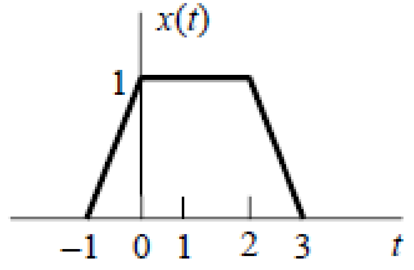


Figura 1.12

Solución:

Es fácil verificar que

$$x(t)=\begin{cases} t+1 & -1\le t\le 0 \\ 1 & 0\le t\le 2 \\ -t+3 & 2\le t\le 3 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

Para realizar la operación de desplazamiento, se reemplaza t por $t-2$ en la expresión para $x(t)$:

$$x(t-2)=\begin{cases}(t-2)+1 & -1\le t-2\le 0\\ 1 & 0\le t-2\le 2\\ -(t-2)+3 & 2\le t-2\le 3\\ 0 & \text{otros valores de } t\end{cases}$$

o, equivalentemente

$$x(t-2)=\begin{cases}t-1 & 1\le t\le 2\\ 1 & 2\le t\le 4\\ -t+3 & 4\le t\le 5\\ 0 & \text{otros valores de } t\end{cases}$$

La señal $x(t)$ se grafica en la Fig. 1.13*a* y puede describirse como la función $x(t)$ desplazada dos unidades hacia la derecha. En la misma forma se puede demostrar que

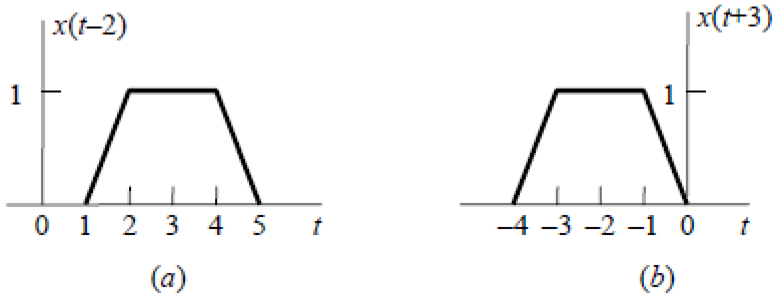


Figura 1.13

En la misma forma se puede demostrar que

$$x(t+3)=\begin{cases} t+4 & -4\leq t\leq -3 \\ 1 & -3\leq t\leq -1 \\ -t & -1\leq t\leq 0 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

Esta última señal se grafica en la Fig. 1.13b y representa una versión de $x(t)$ desplazada tres unidades hacia la izquierda.

Se desea dibujar $x(-t)$ y $x(3-t)$ si $x(t)$ es como se muestra en la Fig. 1.14.

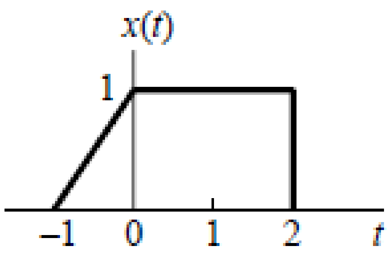


Figura 1.14

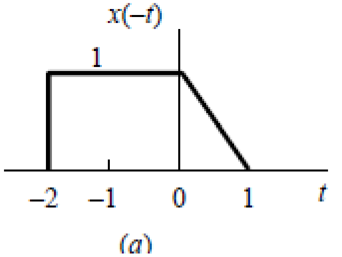
Solución: La señal $x(t)$ se puede escribir como

$$x(t)=\begin{cases} t+1 & -1\leq t\leq 0 \\ 1 & 0\leq t\leq 2 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

Reemplazando ahora t por $-t$, se obtiene

$$x(-t)=\begin{cases} -t+1 & -1\le -t\le 0 \\ 1 & 0\le -t\le 2 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases} = \begin{cases} -t+1 & 0\le t\le 1 \\ 1 & -2\le t\le 0 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

La señal $x(-t)$ se muestra en la Fig. 1.15a.



En la misma forma se puede demostrar que

$$x(3-t)=\begin{cases} 4-t & 3\le t\le 4 \\ 1 & 1\le t\le 3 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

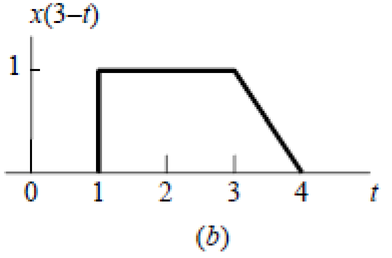


Figura 1.15

y $x(3-t)$ es como se muestra en la Fig. 1.15b.

EJEMPLO 5. Considere las señales en la Fig. 1.7. Se quiere clasificar cada señal calculando la energía y la potencia en cada caso.

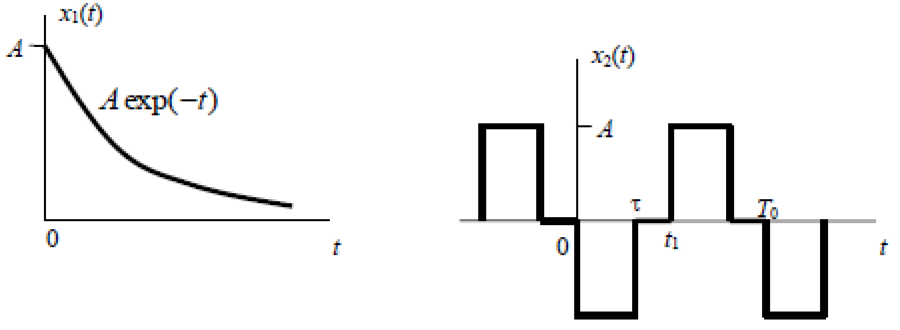


Figura 1.7. Señales de energía y de potencia.

Solución:

La señal en la Fig. 1.7*a* es aperiódica y su energía total es

$$E_\infty = \int_0^\infty A^2 \exp(-2t)\,dt = \frac{A^2}{2}$$

la cual es finita. La potencia promedio es

$$P = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_0^{2T} A^2 \exp(-2t)\,dt\right) = \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T} = 0$$

En consecuencia, la señal en la Fig. 1.7*a* es una señal de energía con una energía igual a $A^2/2$ y potencia promedio cero.

La señal en la Fig. 1.7*b* es periódica con período T_0. Su potencia promedio es

$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x_2(t)|^2\,dt = \frac{1}{T_0}\left(\int_0^{\tau} A^2\,dt + \int_{t_1}^{t_1+\tau} A^2\,dt\right) = \frac{2A^2\tau}{T_0}$$

Así que $x_2(t)$ es una señal de potencia con energía infinita y potencia promedio igual a $2A^2\tau/T_0$

Ejemplo 6. Considere las dos señales aperiódicas mostradas en la Fig. 1.8. Estas dos señales son ejemplos de señales de energía.

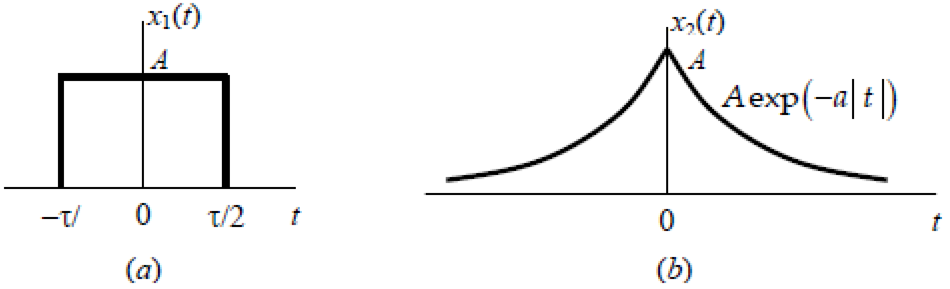


Figura 1.8. Ejemplos de señales de energía.

La función pulso rectangular rect(t/τ) mostrada en la Fig. 1.8*a* está estrictamente limitada en el tiempo, ya que $x_1(t)$ es igual a cero para t fuera de la duración del pulso. La otra señal está asintóticamente limitada en el sentido de que $x(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$. En cualquiera de los casos, la potencia promedio es igual a cero. La energía para la señal $x_1(t)$ es

$$E_1 = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x_1^2(t)\,dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A^2 dt = A^2\tau$$

y para $x_2(t)$ es

$$E_1 = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} A^2 \exp(-2a|t|)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{a}[1-\exp(-2aT)] = \frac{A^2}{a}$$

Puesto que E_1 y E_2 son finitas, las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales de energía.

Considere la señal $x(t)$ mostrada en la Fig. 1.12. Se desea graficar $x(t-2)$ y $x(t+3)$.

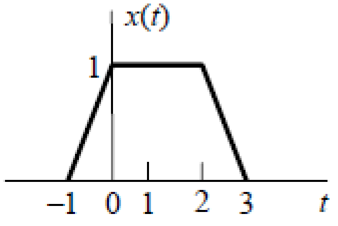


Figura 1.12

Solución: Es fácil verificar que

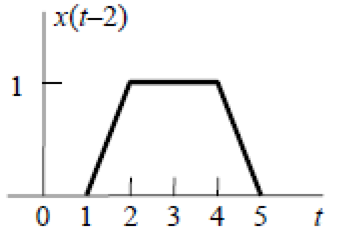
$$x(t)=\begin{cases} t+1 & -1\le t\le 0 \\ 1 & 0\le t\le 2 \\ -t+3 & 2\le t\le 3 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

Para realizar la operación de desplazamiento, se reemplaza t por $t-2$ en la expresión para $x(t)$:

$$x(t-2)=\begin{cases} (t-2)+1 & -1\le t-2\le 0 \\ 1 & 0\le t-2\le 2 \\ -(t-2)+3 & 2\le t-2\le 3 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$x(t-2)=\begin{cases} t-1 & 1\le t\le 2 \\ 1 & 2\le t\le 4 \\ -t+3 & 4\le t\le 5 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

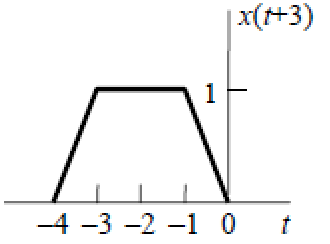


(a)

Figura 1.13

La señal $x(t)$ se grafica en la Fig. 1.13a y puede describirse como la función $x(t)$ desplazada dos unidades hacia la derecha. En la misma forma se puede demostrar que

$$x(t+3)=\begin{cases} t+4 & -4\le t\le -3 \\ 1 & -3\le t\le -1 \\ -t & -1\le t\le 0 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$



(b)

Figura 1.13

Esta última señal se grafica en la Fig. 1.13b y representa una versión de $x(t)$ desplazada tres unidades hacia la izquierda.

Ejemplo 9. Se desea graficar la señal $x(3t - 6)$, donde $x(t)$ es la señal del Ejemplo 7. Usando la definición de $x(t)$ dada en el Ejemplo 7, obtenemos

$$x(3t-6)=\begin{cases} 3t-5 & \frac{5}{3}\le t\le 2 \\ 1 & 2\le t\le 8/3 \\ -3t+9 & \frac{8}{3}\le t\le 3 \\ 0 & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

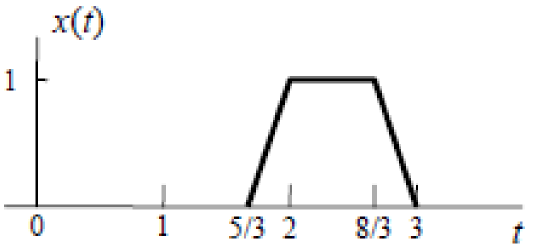


Figura 1.18

La señal $x(3t - 6)$ se grafica en la Fig. 1.18 y puede considerarse como $x(t)$ comprimida por un factor de 3 (o escalada en el tiempo por un factor de 1/3) y luego desplazada dos unidades hacia la derecha; observe que si $x(t)$ es desplazada primero y luego escalada por una factor de 1/3, hubiésemos obtenido una señal diferente; en consecuencia, las operaciones de desplazamiento y de escalamiento en el tiempo *no son conmutativas*. El resultado obtenido se puede justificar escribiendo la operación en la forma siguiente:

$$x(3t-6)=x(3(t-2))$$

la cual indica que se ejecuta primero la operación de escalamiento y después la de desplazamiento.

Ejemplo 11. Considere la señal $x(t)$ definida por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Las partes par e impar de esta señal, conocida como la función escalón, están dadas por

$$x_p(t) = \frac{1}{2} \text{ para todo } t, \text{ excepto en } t = 0$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_i(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & t < 0 \\ \dfrac{1}{2}, & t > 0 \end{cases}$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

El único problema aquí radica en el valor de las funciones en $x = 0$. Si definimos $x(0) \equiv 1/2$, entonces

$$x_p(0) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x_i(0) = 0$$

Las señales $x_p(t)$ y $x_i(t)$ se grafican en la Fig. 1.20.

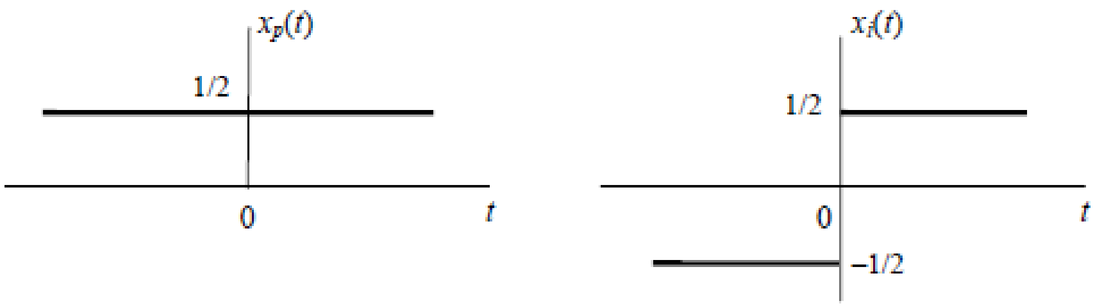


Figura 1.20. Descomposición de la función escalón en sus partes par e impar.

Ejemplo 12. Considere la señal

$$x(t)=\begin{cases} A\exp(-\alpha t), & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

La parte par de $x(t)$ está dada por

$$x_p(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}A\exp(-\alpha t) & t>0\\ \frac{1}{2}A\exp(\alpha t) & t<0\end{cases}=\frac{1}{2}A\exp\left(-\alpha\left|t\right|\right)$$

y la parte impar por

$$x_i(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\exp(-\alpha t), & t>0\\ -\frac{1}{2}\exp(\alpha t). & t<0\end{cases}$$

Las señales $x_p(t)$ y $x_i(t)$ se muestran en la Fig. 1.21.

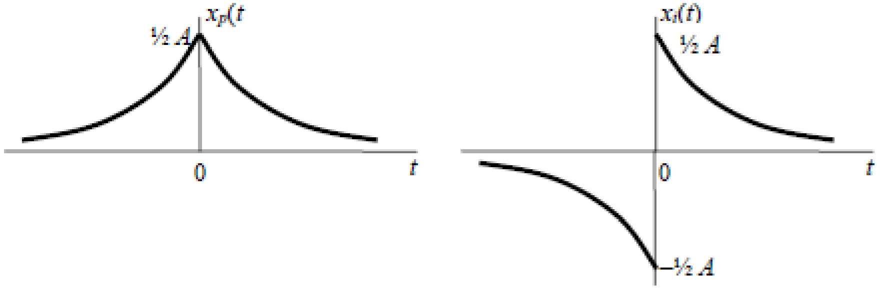


Figura 1.21

Ejemplo 14. Algunas veces es deseable expresar la suma de dos exponenciales complejas como el producto de una sola exponencial compleja. Por ejemplo, suponga que se quiere graficar la magnitud de la señal

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$$

Para hacer esto, primero extraemos un factor común del lado derecho de la ecuación, tomando como frecuencia de ese factor el promedio de las dos frecuencias de las exponenciales en la suma, y se obtiene

$$x(t) = e^{j2.5t}\,(e^{-j0.5t} + e^{j0.5t})$$

la cual, por la relación de Euler, se puede escribir como

$$x(t) = 2\,e^{j2.5t}\cos 0.5t$$

y de aquí se obtiene directamente la expresión para la magnitud de $x(t)$:

$$|x(t)| = 2\,|\cos 0.5t|$$

Así que $|x(t)|$ es lo que se conoce comúnmente como una sinusoide rectificada de onda completa, como se muestra en la Fig. 1.24.

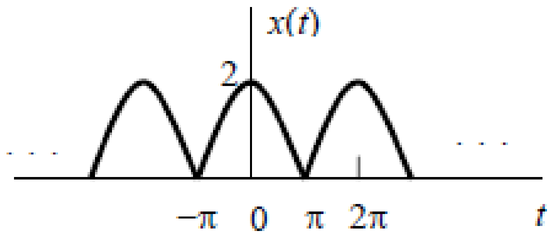


Figura 1.24

Ejemplo 15. Halle y dibuje la primera derivada de las señales siguientes:

(a) $x(t) = u(t) - u(t-a) \quad a > 0$

(b) $x(t) = t[u(t) - u(t-a)] \quad a > 0$

Solución:

(a) Usando la Ec. $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

tenemos que $u'(t) = \delta(t)$ y $u'(t-a) = \delta(t-a)$

Entonces,

$$x'(t) = u'(t) - u'(t-a) = \delta(t) - \delta(t-a)$$

Las señales $x(t)$ y $x'(t)$ se dibujan en la Fig. 1.30.

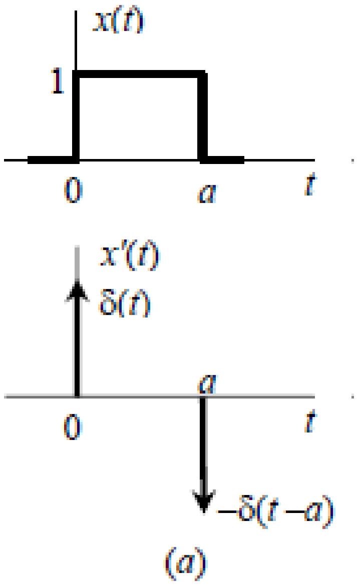


Figura 1.30

(b) Usando la regla para la derivada del producto de dos funciones y el resultado de la parte (a), se obtiene

$$x'(t) = u(t) - u(t-a) + t[\delta(t) - \delta(t-a)]$$

Pero, por las Ecs. $\delta(t-t_0) = \dfrac{du(t-t_0)}{dt}$ $\varphi(t)\delta(t) = \varphi(0)\delta(t)$

$$t\delta(t) = (0)\delta(t) = 0 \quad \text{y} \quad t\delta(t-a) = a\delta(t-a)$$

Y, por ello,

$$x'(t) = u(t) - u(t-a) - a\delta(t-a)$$

Las señales $x(t)$ y $x'(t)$ se grafican en la Fig. 1.30*b*.

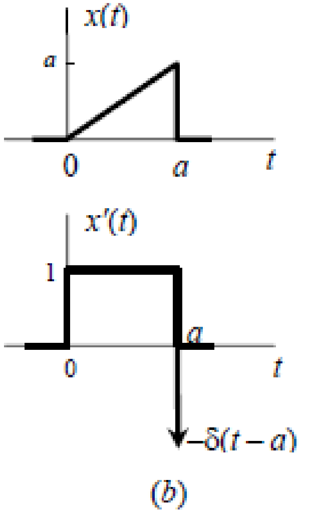


Figura 1.30

Ejemplo 16. Sea

$$x[n] = e^{j(7\pi/9)n}$$

Entonces

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{7\pi/9}{2\pi} = \frac{7}{18} = \frac{m}{N}$$

Así pues, $x[n]$ es periódica y su período fundamental, obtenido al hacer $m = 7$, es igual a 18.

Ejemplo 16. Sea

$$x[n] = e^{j(7\pi/9)n}$$

Entonces

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{7\pi/9}{2\pi} = \frac{7}{18} = \frac{m}{N}$$

Así pues, $x[n]$ es periódica y su período fundamental, obtenido al hacer $m = 7$, es igual a 18.