FUNDAMENTOS FÍSICOS Y TECNOLÓGICOS DE LA INFORMÁTICA

TEMA I.- ELECTROSTÁTICA

TEMA 1.- ELECTROSTÁTICA

GUIÓN DEL TEMA

Referencias Bibliográficas

- ✓ Alonso M. y Finn E., vol. II: Campos y Ondas, ed. Addison-Wesley Iberoamericana.
- ✓ Feynman R, Leighton R. y Sands M., Fisica, vol. II: Electromagnetismo y Materia, ed. Pearson Educación.
- ✓ S. Velayos, Temas de Física III, Electrostática y Corriente Eléctrica, ed. Copigraf, s.l.

1.1.- Introducción.

La Electrostática, comprende el estudio de las leyes que rigen los fenómenos eléctricos, producidos por cargas eléctricas en reposo, lo que supone el estudio de las fuerzas que se ponen de manifiesto tanto entre cargas puntuales como entre cuerpos cargados.

En la naturaleza, podemos considerar la existencia de cuatro tipos de interacciones o fuerzas, que de mayor a menor intensidad son:

	Escala de Intensidad
Interacción Nuclear Fuerte	**1**(referencia)
Interacción Electromagnética	$\mathbf{10^{-2}}$
Interacción Nuclear Débil	$\mathbf{10^{-5}}$
Interacción Gravitatoria	$\mathbf{10^{-38}}$

Tanto la Interacción Nuclear Débil como la Interacción Nuclear Fuerte, decrecen muy rápidamente con la distancia y prácticamente son imperceptibles a escala macroscópica, pero son muy importantes a distancias atómicas del orden de 10^{-13} cm.

Los fenómenos que estudia la Electrostática, están dentro del campo de las Interacciones Electromagnéticas.

Dada la magnitud de la interacción Electromagnética, cabria preguntarse sobre la naturaleza de las fuerzas que mantienen unido el núcleo atómico, en el cual existen partículas positivas, pero no negativas que pudieran contrarrestar la gran fuerza de repulsión que originaria la explosión del mismo.

La respuesta está en que además de las fuerzas eléctricas de repulsión existen otras no eléctricas que llamaremos fuerzas nucleares, que contrarrestan a las eléctricas. Las fuerza nucleares actuan a corta distancia y decrecen cuando aumenta esta, mucho más rápidamente que eléctricas; por esta razón cuando un núcleo crece de tamaño comienza a ser inestable, de manera que ciertas perturbaciones, como el bombardeo con neutrones lentos, pueden hacer que "explote", liberando su energía nuclear, que realmente es la debida a las fuerzas eléctricas de repulsión. Esto es lo que ocurre con el núcleo de uranio de 92 protones.

Vistas así las cosas, las diferentes partes que formen un electrón deberían repelerse y no ser posible como lo es, su existencia estable. La ciencia todavía no tiene una explicación plausible a tal hecho, que supondría conseguir formular una teoría completa del Electromagnetismo.

1.2.- Carga Eléctrica. Cuantización de la Carga.

Carga Eléctrica

Al igual que la masa la carga eléctrica, es una propiedad intrínseca de la materia, que en este caso caracteriza a la misma, bajo el punto de vista eléctrico.

Únicamente existe carga eléctrica de dos tipos, considerados opuestos por sus efectos. Así se prueba con experimentos con varillas de vidrio y ámbar o caucho, cuyas superficies se electrizan por frotamiento con carga opuesta, que históricamente se han identificado como positivas en el caso del vidrio y negativas en el caso del ámbar o del caucho.

La no existencia de un tercer tipo de carga, se pone de manifiesto por el hecho de que ningún cuerpo cargado eléctricamente, es a la vez repelido o atraído por una varilla de vidrio y una de ámbar electrizadas, o lo que es lo mismo por carga positiva y carga negativa.

Se considera como Carga Neta de una porción de materia a la suma de las cargas totales que de distinta naturaleza posee.

Normalmente la carga neta de un cuerpo es nula, al existir el mismo número de cargas positivas que negativas. La ruptura de este equilibrio supone que el cuerpo pasa a presentar un estado de electrización determinado, que será positivo si tiene un mayor número de carga positivas que negativas, lo cual puede conseguirse, bien aportando carga positiva al cuerpo en estado de carga neutro o bien por perdida de cargas negativas. El proceso opuesto llevará a que el cuerpo se cargue negativamente; en cualquiera de los dos casos se produce un fenómeno que llamaremos ionización.

Por tanto un ión es un átomo con carga neta distinta de cero y un cuerpo diremos está ionizado, si el mismo tiene también carga distinta de cero.

Principio de Conservación de la Carga
En toda interacción o fenómeno que tenga lugar en un sistema aislado, la carga eléctrica permanece constante.

Determinación de la carga eléctrica de un cuerpo

La carga eléctrica de cualquier cuerpo se puede determinar en función de una carga q que se tome como referencia.

Supongamos una cuerpo A con carga q y midamos la fuerza que ejerce sobre el otro cuerpo cargado B situada a una cierta distancia d. Sustituyamos ahora el cuerpo A por otro A_1 de carga q_1 y midamos de nuevo la fuerza que B ejerce sobre él, cuando se le sitúa a la misma distancia. Se verifica entonces que $\frac{q_1}{q} = \frac{F_1}{F}$ y por tanto $\mathbf{q_1 = q}\ \frac{\vec{\mathbf{F}}_1}{\vec{\mathbf{F}}}$

Cuantización de la carga
El valor de cualquier carga eléctrica siempre es múltiplo entero exacto de la carga del electrón.

Partícula	Valor de la carga en **C**	Masa de la partícula en **Kg**
Electrón (e)	$-1{,}6021\text{x}10^{-19}$	$9{,}1095\text{x}10^{-31}$
Protón (p)	$+1{,}6021\text{x}10^{-19}$	$1{,}6726\text{x}10^{-27}$
Neutrón (n)	0	$1{,}6749\text{x}10^{-27}$

Tabla de valores de cargas y masas de partículas comunes, **medidos experimentalmente.**

1.3.- LEY DE COULOMB (Francis Charles Agustín Coulomb 1736-1806)

En el final del s. XIX, en 1784 el físico francés Coulomb, determinó la ley cuantitativa que establece la fuerza entre dos cargas eléctricas puntuales.

Midiendo con una balanza de torsión dicha fuerza, llegó a establecer como expresión matemática de dicha fuerza la siguiente.

$\vec{F} = K_e \frac{q\, q'}{r^2} \vec{u}_r$ **Solo aplicable a cargas eléctricas puntuales en reposo.**

Siendo: **K_e =** $\frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} = 10^{-7}\, c^2 = 9\ 10^9\ Nm^2c^{-2}$ la denominada constante eléctrica

q y q´ el valor de las cargas eléctricas puntuales.

ε_0 la permitividad eléctrica del vacío, de valor $\varepsilon_o = \frac{10^{-7}}{4\Pi c^2} = 8{,}85x10^{-12}\, N^{-1} m^{-2} c^2$

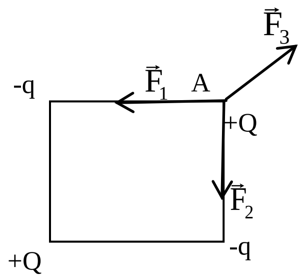
r la distancia entre las cargas puntuales.

$\vec{u}_r$ el vector unitario de dirección la de la línea que une las cargas y sentido de una hacia otra, si estas son de distinto signo y el contrario si son de igual signo.

Unidad de carga: Se define como tal el Coulombio, símbolo **C** y corresponde al valor de la carga que colocada en el espacio vacío a 1m de otra de igual valor y signo, sufre una fuerza de repulsión de $8{,}9874\text{x}10^9$N .

Ejemplo de aplicación de la Ley de Coulomb.

Determinar el valor de **+Q** para que la fuerza sobre la carga +Q situada en el punto **A**, sea nula. Tómese igual a **l** la distancia entre las cargas **–q** y **+Q**.



La Fuerza total $\vec{F}$ sobre la carga +Q, colocada en A , será la suma vectorial de todas las fuerzas.
$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ y según se pide esta fuerza debe ser igual a cero $\vec{F} = 0$. Considerando esta condición, según componentes en la dirección de $\vec{F}_1$, se puede poner $F_3 = F_1 \cos 45° + F_2 \cos 45°$ dado que en módulo $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, $F_3 = F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2F_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$, sustituyendo

$F_3 = K_e \frac{Q \times Q}{\left(l\sqrt{2}\right)^2}$ y $F_1 = K_e \frac{q \times Q}{l^2}$ en la anterior expresión:

$$K_e \frac{Q^2}{l^2 2} = 2K_e \frac{q \times Q}{l^2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De donde $\boxed{Q = 2q\sqrt{2}}$ (C)

1.4.- CAMPO ELÉCTRICO

Si en una región del espacio, existe un campo, en dicha región al colocar un elemento de prueba de la misma naturaleza que el campo, este sufre una interacción o lo que es lo mismo la acción de una fuerza.

Por tanto existirá un Campo Eléctrico, si una carga eléctrica colocada en cualquier punto de dicha región, experimenta una fuerza. Dicha fuerza es debida a la presencia de otras cargas en la región.

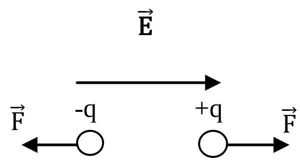
Se comprueba que la fuerza es proporcional al valor de la carga y que la constante de proporcionalidad, solo depende del punto del campo eléctrico en el que estemos determinando dicha fuerza y no del valor de la carga que utilicemos para ello. La constante de proporcionalidad identifica así una característica específica y única de cada punto de la región a la que en función del efecto dinámico que produce sobre la carga de prueba, se define como una magnitud vectorial que llamamos campo eléctrico, y cuyo valor identificamos como intensidad del campo eléctrico y diremos que en cada punto de la referida región existe un campo eléctrico cuya expresión será:

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$; La unidad de Campo eléctrico en el S.I. será: $NC^{-1} = m\,Kg\,s^{-2}C^{-1}$

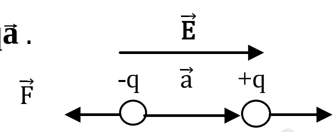
¡Verificar la equivalencia de unidades!

Efecto del campo eléctrico sobre cargas en reposo

La fuerza que experimenta una carga eléctrica situada en una región donde exista un campo eléctrico, la desplazará en el sentido del campo si es positiva y en el contrario si es negativa.



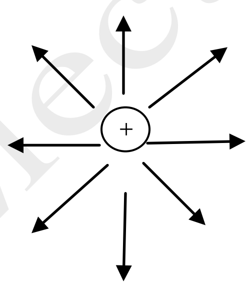
El efecto por tanto del campo eléctrico sobre un átomo desplazará su carga positiva, en el sentido del campo y su carga negativa en sentido contrario. La carga neta total del átomo seguirá siendo nula, pero el desplazamiento de carga hace que el centro de masas de la carga positiva no coincida con el de la carga negativa, diremos en este caso que el átomo está polarizado, y el sistema eléctrico al que se asimila es el de dos cargas puntuales iguales y de distinto signo situadas muy próximas, sistema conocido como Dipolo Eléctrico, que se caracteriza por el llamado momento bipolar $\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{q}\vec{\mathbf{a}}$.

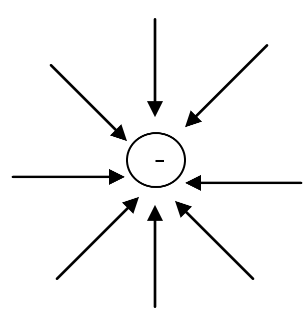


Dipolo eléctrico

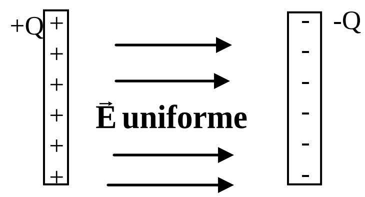
Según lo indicado si en una región donde exista un campo eléctrico uniforme, introducimos una porción de materia, se produce un efecto de polarización de dicha materia.

Líneas de fuerza.- Líneas imaginarias, tal que en cada punto de las mismas el campo el campo es tangente. Mediante este modelo, se puede “visualizar, al menos, la dirección del campo eléctrico en cada punto de la región donde exista.





Campo Eléctrico Uniforme: Es aquel que tiene el mismo valor (módulo, dirección y sentido) en todos los puntos en que está definido.



Campo eléctrico producido por una distribución discreta de cargas (Cargas puntuales).

Se determina en primer lugar el Campo Eléctrico producido por una carga puntual de valor +q, en un punto a distancia r de ella.

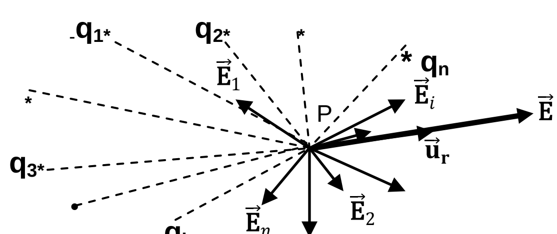
Coloquemos en un punto a distancia r de la carga +q, otra carga puntual de valor +q´, según las definición de campo eléctrico, el valor en el punto donde está esta segunda carga será: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q´}$, siendo $\vec{F}$ la fuerza que el campo eléctrico ejerce sobre +q´. La fuerza $\vec{F}$, se puede calcular por la ley de Coulomb y su valor es $\vec{F} = K_e \frac{qq´}{r^2}\vec{u}_r$ donde $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección del campo, por tanto tendremos:

Campo de una carga puntual de valor +q a distancia r de ella será: $\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q´} = K_e \frac{q}{r^2}\vec{u}_r}$

En el caso de que el campo eléctrico esté producido por varias cargas puntuales (distribución discreta), el campo eléctrico total en un punto P será la suma vectorial de los campos que produciría cada una de las cargas en dicho punto, si se encontrase ella sola (Principio de Superposición).

Supongamos ahora n cargas puntuales q_1, q_2, q_3,.......q_n, colocadas según la figura, el Campo Eléctrico total en el punto P, se puede expresar como:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \bullet\bullet\bullet + \vec{E}_i + \bullet\bullet\bullet\ \vec{E}_n = K_e \frac{q_1}{r_1^2}\vec{U}_{r_1} + K_e \frac{q_2}{r_2^2}\vec{U}_{r_2} + \bullet\bullet\bullet + K_e \frac{q_i}{r_i^2}\vec{U}_{r_i} + \bullet\bullet\bullet + K_e \frac{q_n}{r_n^2}\vec{U}_{r_n} = K_e \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_r$$



Distribuciones continuas

Bajo el punto de vista de la carga eléctrica y estimando un modelo que represente mejor la realidad, hemos de considerar que la carga puede estar distribuida de manera continua en forma lineal, superficial o cúbica.

Densidad lineal de carga

Esto supone establecer para la forma lineal un modelo, que podemos asimilar a la carga sobre un hilo unidimensional que caracterizaremos por una **densidad lineal de carga** (landa) $\lambda = \frac{dq}{dl}$ de unidades C• cm^{-1}. Ejem.- Carga distribuida sobre un hipotético hilo unidimensional.

Densidad superficial de carga

En el caso de **distribución superficial de carga**, el modelo se puede considerar como modelo una superficie, (dos dimensiones) cargada, que caracterizaremos por una densidad superficial de carga (sigma) $\sigma = \frac{dq}{ds}$ de unidades C• cm.$^{-2}$. Ejem.- Carga distribuida sobre la superficie de una esfera.

Densidad cúbica o volumétrica de carga

Finalmente la distribución de carga mas general será la **cúbica, o volumétrica**, cuyo modelo corresponde a la carga sobre un volumen (tres dimensiones) y que caracterizaremos por una densidad cúbica de carga que se identifica por (ro) $\rho = \frac{dq}{dv}$ cuyas unidades serán C • cm^{-3}.

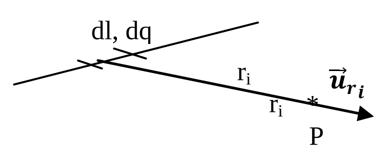
Ejem.- Carga distribuida en el interior de una esfera maciza no conductora.

Campo eléctrico creado por una distribución continúa de cargas

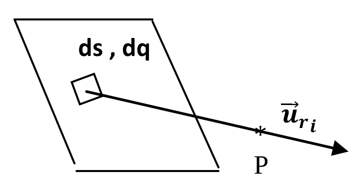
Para calcular el campo eléctrico que crea una distribución continua de carga en un punto P, se considera el campo que crea una carga **dq** en dicho punto, asimilada a una carga puntual, obteniéndose el campo total como suma vectorial de los infinitos campos $d\vec{E}$ creados por cada carga dq de la distribución en P. Esto supone que la suma finita de la expresión del campo creado por un sistema de cargas continuas se convierte en una integral extendida a toda la región donde existen cargas. No debe olvidarse que se está calculando el campo eléctrico como suma vectorial de infinitas magnitudes vectoriales y por tanto la integral ha de aplicarse bien sobre componentes o bien previamente, analizar la distribución para justificar cual sería la dirección del campo eléctrico producido por la misma y aplicar la integral utilizando esta característica ya que la integral realiza únicamente una suma de magnitudes escalares.

En consecuencia:

Para distribución lineal $d\vec{E}_i = K\frac{dq}{r_i^2}\vec{u}_{r_i} = K\frac{\lambda dl}{r_i^2}\vec{u}_{r_i}$



Para una distribución superficial $d\vec{E}_i = K\frac{dq}{r_i^2}\vec{u}_{r_i} = K\frac{\sigma ds}{r_i^2}\vec{u}_{r_i}$



Para una distribución cúbica $d\vec{E}_i = K\frac{dq}{r_i^{2}}\vec{u}_{r_i} = K\frac{\rho dv}{r_i^{2}}\vec{u}_{r_i}$

Como se ha indicado los campos totales se obtendrán por integración.

1.5.- ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA. DIFERENCIA DE POTENCIAL. POTENCIAL ELÉCTRICO.

Energía Potencial Electrostática.

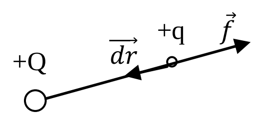
Para definir el concepto de energía potencial al igual que para el de Potencial en un punto, se necesita que previamente se haya determinado un nivel de referencia al que se le asigna un valor, normalmente cero. La elección del sistema de referencia , más práctico, depende del tipo de distribución que tengan las cargas que crean el campo electrostático, así para un distribución de cargas puntuales, el nivel de referencia cero se sitúa en el infinito.

Al considerar un Campo eléctrico, observamos que una carga eléctrica colocada en cualquier punto del mismo, sufre la acción de una fuerza lo que supone que a cada punto del campo eléctrico se le puede asociar una energía que llamaremos energía potencial electrostática, debido al carácter electrostático del campo.

La energía potencial electrostática corresponde exactamente al trabajo realizado, en presencia del campo electrostático, para desplazar la carga eléctrica desde el nivel de energía cero, en este caso fijado en el infinito, hasta el punto que ocupa. Por tanto el concepto de energía es relativo, y se debe entender la expresión energía electrostática de una carga en un punto del campo eléctrico, como la diferencia de energía entre dicho punto y el nivel que se tome de referencia.

Para una carga puntual q situada a distancia r de otra carga Q que crea el campo eléctrico, la energía electrostática será:

$$W = \int_{\infty}^{r} \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} q\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} \frac{qQ}{r^{2}}\cdot dr = \frac{qQ}{r}\ ;$$



Se ha tomado el nivel de referencia con energía 0J en el infinito.

La expresión anterior corresponde al trabajo realizado por la fuerza $\vec{f}$, al desplazar la carga q desde el infinito hasta una distancia r de la carga Q. La fuerza $\vec{f}$ corresponde a la acción del campo electrostático, que crea la carga Q en el espacio que la rodea, sobre la carga q.

Diferencia de Potencial entre dos puntos de un campo eléctrico

Corresponde al trabajo realizado para desplazar la unidad de carga entre ambos puntos, bajo la interacción del campo eléctrico. El camino seguido para ir de un punto a otro no influye en el trabajo obtenido, ya que el campo electrostático en un campo conservativo, por lo que tendrá función potencial escalar que identificamos con la letra V. Dicha función es conocida como Potencial Electrostático.

Unidad del Potencial eléctrico.- Voltio (V), en honor al físico italiano **Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta** (1745 –1827).
El trabajo para desplazar una carga cualquiera, bajo la interacción del campo electrostático, se puede calcular aplicando el teorema de la Energía Potencial, y en consecuencia dicho trabajo solo será función del valor de la función potencial en el punto inicial y del valor en el punto final.

$$W_{AB} = E_{PA} - E_{PB} = qV_A - qV_B = q\,(V_A - V_B). \quad (1)$$

Diferencia de Potencial : $\dfrac{W_{AB}}{q} = V_A - V_B$

La expresión (1), nos invita a introducir una nueva unidad, el electrón voltio, para expresar la energía, ya que dicha expresión representa la energía como producto de la carga por el potencial.

El electrón voltio, que indicamos por eV, se considera como unidad de energía de valor:

$1{,}6021\text{x}10^{-19}$ C (carga del electrón) x 1V = $1{,}6021\text{x}10^{-19}$ J. Por tanto 1eV = $1{,}6021\text{x}10^{-19}$ J

Potencial Electrostático

Una carga eléctrica colocada en un campo electrostático, sufre la interacción del mismo lo cual se manifiesta como una fuerza eléctrica; por tanto para situar dicha carga en diferentes puntos del campo eléctrico, habrá que realizar diferentes trabajos que se calcularán respecto a un nivel de referencia, al que le vamos a asignar valor de energía cero y que situaremos en el infinito.

Se define por tanto el **potencial eléctrico V(r),** en los diferentes puntos de un campo electrostático, como la energía electrostática que tiene la **unidad de carga eléctrica** en cada punto del mismo, o lo que es igual como el trabajo que se habrá realizado para llevar la carga puntual desde el sistema de referencia en el infinito (Energía potencial cero), hasta colocarla en el punto E_p(r), donde se identifique el potencial eléctrico. $\boxed{V(r) = \dfrac{E_p(r)}{q} \text{ (V)}}$; 1V = 1J C

Relación entre el campo Electrostático y el Potencial Electrostático asociado al mismo

Al ser el campo electrostático un campo conservativo, tiene función potencial escalar y en consecuencia, se puede encontrar una función escalar, que conocemos como potencial electrostático, que permite expresar el campo a partir de dicha función escalar, utilizando el operador vectorial Gradiente, en la forma siguiente: $\vec{E} = -\text{grad}V$ donde el signo menos nos indica que el campo eléctrico está siempre dirigido hacia potenciales decreciente.

En el caso más general la expresión anterior nos permite expresar las componentes del campo en función del gradiente del Potencial Eléctrico, de la forma siguiente:

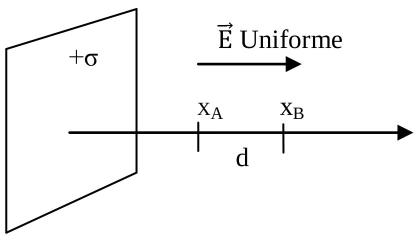
$$E_X = -\frac{\partial V_X}{\partial X}; \qquad Ey = -\frac{\partial V_y}{\partial Y}; \qquad E_Z = -\frac{\partial V_Z}{\partial Z}$$

Y en consecuencia la expresión de la componente del campo en una dirección cualquiera indicada por un vector $d\vec{l}$ será: $E_l = -\dfrac{\partial V_l}{\partial l}$ (1)

Otra unidad para expresar el campo eléctrico, sugerida por la expresión anterior es Vm^{-1}. Evidentemente $1\,Vm^{-1} = 1NC$. El lector haría bien en comprobarlo, como práctica.

Ejemplo

Resulta ilustrativo y práctico obtener la diferencia de potencial electrostático entre dos puntos de un campo eléctrico uniforme, por ejemplo el creado por una placa infinita (suficientemente grande), cargada eléctricamente con carga superficial repartida uniformemente.



Aplicando la expresión "llave" $\vec{E} = -\text{grad}V$, entre los puntos A y B del campo, identificados por las coordenadas x_A y x_B, tenemos $\int_{X_A}^{X_B} \vec{E}\cdot d\vec{x} = -\int_{V_A}^{V_B} dV$; donde para simplificar se ha considerado que el campo está dirigido únicamente según la dirección del eje X.

Integrando y considerando que la condición de campo uniforme, se traduce en que no depende de la posición x de los puntos considerados se obtiene

$E\int_{x_A}^{x_b} dx = -(V_B - V_A)$ e integrando: $\vec{E}(x_B - x_A) = V_A - V_B$ de donde: $\vec{E} = \dfrac{V_A - V_B}{x_B - x_A} = \dfrac{V_A - V_B}{d}$;

siendo d la distancia entre los puntos A y B.

Se observa que si V_A es mayor que V_B el campo es positivo en el sentido de A a B o lo que es igual está dirigido hacia potenciales decrecientes. Razonando de forma similar, si V_A es menor que V_B el campo resulta negativo en el sentido de estar dirigido de B a A y nuevamente verificamos que **el sentido del campo es hacia potenciales decrecientes**, como indica la teoría general de campos.

La última expresión, muestra como se ha dicho anteriormente que las unidades en el SI, en que también puede expresarse el campo eléctrico son Vm^{-1}.

1.6.- ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTROSTÁTICA DE UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES.

Se va a determinar, de manera práctica, la energía de un conjunto finito de n cargas puntuales , para ello ve calcula energía que emplearemos en formar tal conjunto de cargas, que evidentemente será la acumulada por dicho sistema o en otras palabras la que el sistema sería capaz de proporcionarnos si le dejáramos que evolucionara libremente.

Consideremos en consecuencia que tenemos n cargas del mismo signo y valores q_1, q_2, q_3.....q_n situadas en el infinito y pretendemos formar con ellas una distribución tal que cada una de ellas se encuentre a distancia finita de las demás.

Para traer la carga q_1, desde el infinito hasta un punto determinado no tendremos que realizar ningún trabajo, pues suponemos que en todo el “viaje”, no pasa por ninguna región donde exista campo eléctrico, luego W_1 = 0 J

Para llevar la carga q_2, hasta una distancia r_{12} de q_1, hay que realizar un trabajo ya que el “viaje” se realiza bajo la acción del campo eléctrico que en todo el espacio crea q_1; tal trabajo será $W_2 = V_{1,2}\, q_2$ siendo $V_{1,2}$ el potencial que crea la carga q_1 en el punto donde se coloca la carga q_2. De igual forma para colocar la carga q_3 en un determinado punto, situado a distancia $r_{1,3}$ de q_1 y $r_{2,3}$ de q_2 el trabajo total será la suma del necesario para transportar q_3, como si solo estuviera q_1 mas el de transportar de nuevo q_3 como si solo estuviera q_2. Aplicando el principio de Superposición, la expresión matemática sería: $W_3 = V_{1,3}\, q_3 + V_{2,3}\, q_2$, de la misma forma razonaríamos para las sucesivas cargas, por tanto el trabajo realizado para colocar la última carga q_n en un determinado punto del campo situado a distancia $r_{1,n}$ de q_1, $r_{2,n}$ de q_2........$r_{n-1,n}$ de la carga q_{n-1} será: $W_n = V_{1,n}\, q_n + V_{2,n}\, q_n + \ldots\ldots + V_{n-1,n}\, q_n$.

La energía potencial eléctrica para formar el sistema, que coincidirá con el trabajo necesario para formarlo y se obtendrá como suma de todos los trabajos que acabamos de calcular:

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{W_i = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots\ldots + W_n = 0 + V_{1,2}\, q_2 + V_{1,3}\, q_3 + V_{2,3}\, q_3 + \ldots\ldots + V_{1,n}\, q_n + V_{2,n}\, q_n + \ldots\ldots + V_{n-1,n}\, q_n} =$$

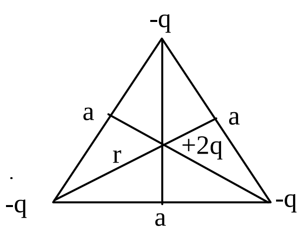
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1,2}}q_2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1,3}}q_3 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2,3}}q_3 + \cdots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1,n}}q_n + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2,n}}q_n + \cdots\cdots \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{n-1,n}}{r_{n-1,n}}q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}(i \neq j)$$

Se obtiene, por tanto, para la energía Potencial Electrostática de un sistema de cargas puntuales la siguiente expresión:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}(i \neq j)$$

Normalmente para el cálculo de la energía potencial electrostática de un sistema determinado de cargas puntuales, suele ser más práctico aplicar el razonamiento a que puede llevar la expresión anterior, ya que finalmente se trata de sumar todas las contribuciones energéticas debido a cada carga en presencia de cada una de las demás sin duplicar ninguna.

Ejemplo
Calcular la energía electrostática necesaria para formar un sistema de cuatro cargas de tal forma que tres de ellas de valor -q se sitúen en los vértices de un triángulo equilátero, virtual de lado a y la cuarta de valor +2q en el centro del mismo.



$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{-q(-q)}{a}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{-q(+2q)}{a\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q^2}{a}\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\ \text{(J)}$$

Habiendo tenido presente que hay tres cargas de valor q situadas a distancia a , una de otra y otras tres parejas distintas formadas cada una por una carga de valor -q situada a una distancia r = $a\sqrt{3}$ de la carga +2q que hay en el centro del triángulo.

1.7.- RELACIONES ENERGÉTICAS EN UN CAMPO ELÉCTRICO (ELECTROSTÁTICO)

Estudiemos la energía considerando también el movimiento de cargas en una región del espacio donde existe un campo eléctrico y para simplificar supongamos que el movimiento tiene lugar en un plano horizontal, al que asignamos una energía potencial gravitatoria nula, en estas condiciones la energía ligada a una partícula cargada de masa m y carga q , que se mueve en el mencionado plano, en cada punto del plano será suma de la energía cinética y la Energía Potencial Electrostática. $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV$; siendo V el potencial electrostático correspondiente al punto en que se calcula la energía de la partícula.

Con el fin de ver como tiene lugar la transformación de energía entre un punto A de potencial electrostático V_A por donde pasa la partícula con velocidad V_A y otro B de potencial $V_{B,}$ en el que la velocidad es v_B, expresemos el principio de conservación de la energía para campos conservativos, ya que haremos la hipótesis de que no existe ningún campo disipativo, como podría ser el campo de fuerzas de rozamiento entre partícula y plano.

La formulación por tanto del principio de conservación de la energía sería:

$$E = (E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B$$

El trabajo realizado por la partícula para desplazarse desde el punto A al punto B, tendiendo en cuenta que todos los campos presentes son conservativos, será:

$$W_{AB} = (E_p)_A - (E_p)_B = (E_c)_B - (E_c)_A = qV_A - qV_B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = q\,(V_A - V_B)$$

La expresión $W_{AB} = q(V_A - V_B)$ resulta muy gráfica pues su lectura indica el trabajo realizado para mover una carga q en un campo electrostático entre dos puntos cuya diferencia de potencial es $V_A - V_B = V$

La indicada expresión nos permite también introducir el electrón-voltio (eV), como una unidad de energía, que será precisamente la que habrá que suministrar a una carga de 1e o lo que es lo mismo de $1{,}602\text{x}10^{-19}$ C (o el trabajo realizado) para moverla en el seno de un campo eléctrico entre una diferencia de potencial de 1 V.

La expresión anterior, habiendo introducido previamente el julio como unidad de energía y el culombio como unidad de carga, constituye una definición operacional del voltio como unidad en que medir la diferencia de potencial o el potencial eléctrico, así:

Un Voltio, es la diferencia de potencial existente entre dos puntos de un campo eléctrico, cuando el trabajo que hay que realizar para desplazar entre ambos una carga de un culombio, es de 1 julio.

En la expresión $\mathrm{W_{AB}} = \mathrm{q}(\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B})$, podemos observar que si la carga es positiva y $\mathrm{V_A}$ es mayor que V_B; la carga gana energía al moverla entre ambos puntos, al ser $\mathrm{W_{AB}}$ positiva. La argumentación en la misma línea, nos lleva a que: Al mover una carga positiva de mayor potencial a menor potencial, esta gana energía. Por el contrario si la carga fuera negativa la perdería. Igualmente, para conseguir que una carga negativa gane energía, hemos de moverla desde un punto u otro de mayor potencial. Esta última conclusión, es la base de los aceleradores lineales de partículas, donde los electrones, van recorriendo tramos en los que el potencial electrostático aumenta y en consecuencia su energía, o lo que es igual su velocidad ya que la energía debida al campo electroestático $\mathrm{W} = \mathrm{qV}$ se transforma en energía cinética $\mathrm{qV} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2$, expresión que puede obtenerse fácilmente de la general del trabajo suponiendo que la partícula está en un punto A , $v_A = 0ms^{-1}$ cuyo potencial eléctrico es $\mathrm{V_A} = 0\mathrm{v}$ y es acelerada por la fuerza del campo electrostático hasta un punto B de Potencial $\mathrm{V_B} = \mathrm{V}$, llegando con una velocidad $\mathrm{v_B} = \mathrm{v}$ tal que $\mathrm{q}(0 - \mathrm{V_B}) = \frac{1}{2}\mathrm{mv_B^2}$ o bien $-\mathrm{qV} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2$ siendo q una carga de valor negativo.

1.8.- FLUJO ELÉCTRICO. LEY DE GAUSS

Conocida la expresión que nos permite definir el flujo de un campo vectorial a través de una superficie s cualquiera, que será:

$\phi = \iint_s \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{s}}$. Si la superficie fuera cerrada, escribiríamos la integral como $\oint\!\!\oint_S \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{s}}$.

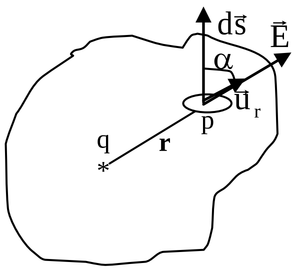
De igual manera se define el Flujo Eléctrico si más que considerar el campo electrostático.

$$\phi_E = \iint_S \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{s}} \qquad \text{Flujo del campo electrostático.}$$

Las unidades S.I. Para el flujo eléctrico, será: $\mathrm{NC^{-1}m^2}$ y no tiene un nombre especial.

Ley de Gauss para el Campo Electrostático

Tratemos de determinar el flujo del campo, debido a una carga puntual Q, a través de una superficie cerrada s que encierre dentro dicha carga. Para ello aplicaremos la expresión indicada anteriormente.



El campo eléctrico, a distancia r de la carga Q, esto es en el punto p de la superficie cerrada s que envuelve a la carga, será $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$ esto es el que conocemos crea una carga puntual de valor Q, a distancia r de ella.

El Flujo de este campo será $\phi_E = \oint\!\!\oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{s} =$

$$= \oint\!\!\oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\alpha\, ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S \frac{\cos\alpha\, ds}{r^2}$$

donde α es el ángulo que forma el campo eléctrico con el vector $d\vec{s}$ en cada punto de la superficie, y que será variable según nos movemos por la misma, al ser una superficie cerrada e irregular.

Recordando el concepto de ángulo sólido resulta que $\oint\!\!\oint_S \frac{\cos\alpha\, ds}{r^2} = \oint\!\!\oint_S d\Omega = 4\pi$ ya que el ángulo sólido subtendido desde el punto desde está la carga q, a toda la superficie cerrada que la rodea es el máximo posible de valor 4π (sr) (estereorradianes).

Por tanto utilizando el resultado obtenido para la integral, quedara como expresión para el flujo del campo electrostático $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ esta expresión es generalizable para n cargas $Q = \sum_1^n q_i$

El flujo se expresara más genéricamente como: $\phi = \frac{n\sum_1 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

Si existieran cargas eléctricas en el interior de la superficie, estas no contribuirían al flujo neto, ya que el flujo del campo electrostático que ellas producen, es nulo a través de la superficie, al ser el flujo entrante en la misma igual al flujo saliente, no almacenándose ni produciéndose flujo en el interior de la misma.

Matemáticamente lo podemos expresar como:

$\phi = \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iint_{s_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \iint_{s_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$, siendo s_1 la parte de la superficie cerrada por la que entra el flujo y s_2 la parte de la superficie por la que sale.

Ley de Gauss de Gauss para el campo electrostático

El flujo del campo electrostático a través de cualquier superficie cerrada, es igual a la carga neta contenida dentro de la superficie dividida por la permitividad eléctrica del medio, que en general se considera vació ε_0.

$\phi = \oiint_s \mathrm{E} \cdot \mathrm{ds} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0}$ Forma integral de la Ley de Gauss para el campo electrostático.

Forma diferencial de la Ley de Gauss

En el caso más general la carga dentro de la superficie gaussiana, se puede considerar que está distribuida con de forma volumétrica y la identificamos por una densidad cúbica de carga $\rho = \iiint_v \rho \mathrm{dv}$.

Por tanto la ley de Gauss podemos escribirla como $\phi = \oiint_s \mathrm{E} \cdot \mathrm{ds} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0} = \iiint_v \rho \mathrm{dv}$. Donde v es el volumen delimitado por la superficie cerrada s.

Utilizando el teorema de Gauss también llamado de la divergencia que se expresa como: $\oiint_s \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{s}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_v \mathrm{div}\, \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{dv}$; siendo F un campo vectorial cualquiera, por ejemplo el campo eléctrico.

La Ley de Gauss, se puede entonces poner como $\phi = \oiint_s \mathrm{E} \cdot \mathrm{ds} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_v \rho dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_v \mathrm{div}\, \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{dv}$; en consecuencia $\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho = div\vec{\mathrm{E}}$, que constituye la Ley de Gauss en forma diferencial.

Ecuaciones de Poisson y Laplace

Sus expresiones corresponden a la de la ley de Gauss expresada en términos del potencial electrostático, para el caso en que $\rho \neq 0$ (Poissón) y en el que $\rho = 0$ (Laplace).

Teniendo presente la relación que existe entre el campo y el potencial a través del operador gradiente, que es: $\vec{E} = -grad\vec{V}$, y utilizándola en la ley de Gauss en forma diferencial, quedará: $div\vec{E} = div(-grad\vec{V}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ si bien como $div(-grad\vec{V}) = \Delta V$; donde el segundo termino se identifica como Laplaciana aplicada al potencial electrostático V, quedará: $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ que identificamos como ecuación de Poisson, y será aplicable a puntos donde exista carga eléctrica, como por ejemplo puntos del espacio entre dos planos paralelos donde existe carga distribuida con densidad cúbica de carga ρ.

La llamada Ecuación de Poisson $\Delta V = 0$, corresponde a la expresión anterior cuando $\rho = 0$; se aplica por tanto en puntos donde no hay carga eléctrica, por ejemplo puntos de la región entre dos planos paralelos cargados con solo con carga superficial.

1.9.- CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

En los materiales que conocemos como conductores hay una gran cantidad de cargas libres, que se pueden mover por el mismo, si hay un campo eléctrico que proporcione la energía necesaria. Cuando esta energía se consuma o se anulen las fuerzas sobre las carga libres, estas dejaran de moverse y el material se podrá considerar en equilibrio. En el caso de un conductor metálico, las cargas libres son los electrones y estos se van a mover hasta que se alcance el equilibrio dinámico, y las fuerzas sobre cada carga sean nulas.

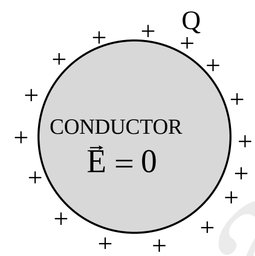
Si suponemos un cuerpo conductor, lo más normal es que su carga neta o total sea nula, como ocurre en general en la materia debido al equilibrio existente entre la carga positiva y la carga negativa.

El proceso para cargar cualquier cuerpo, supone aportar o sustraer carga positiva o carga negativa del mismo, de manera que se produzca un desequilibrio de la misma y se obtenga una carga neta para el cuerpo distinta de cero, en cuyo caso diremos que se trata de un cuerpo cargado con cierta carga q, entendiendo que la referencia a cuerpo cargado implica que la carga neta es distinta de cero, pues si bien el cuerpo estará siempre cargado, en general su carga neta será nula.

Supongamos por tanto un conductor que inicialmente está descargado, carga neta nula y al cual se le proporciona una carga neta q. Las cargas aportadas sobre el conductor, se mueven hasta que se alcanza el llamado equilibrio electrostático, esto ocurre en un tiempo tan breve, del orden de un microsegundo, que en nuestra escala de tiempo, se puede considerar como un proceso instantáneo.

Una respuesta importante es la de la pregunta ¿Donde se sitúa la carga neta?. La condición de equilibrio dinámico bajo las fuerzas electrostáticas, supone el que la carga se mueva inicialmente hasta situarse, únicamente en la superficie del conductor donde, a no ser que se desprenda del mismo(efluvio de cargas), permanecerá por efecto de la presión electrostática que ejercen el resto de las cargas.

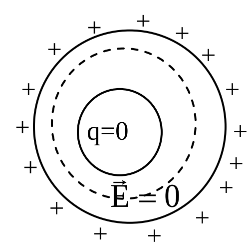
Por tanto la carga en un conductor en equilibrio electrostático, se localizan en la superficie del conductor pues es la única zona donde la fuerza transversal, de origen electrostático debida a las cargas próximas y que da lugar al movimiento de las cargas, se anula.



El hecho de que en un conductor eléctrico la carga se distribuya en su superficie, da lugar a que el campo eléctrico en el interior del mismo sea nulo. La ley de Gauss aplicada a una superficie gaussiana situada en el interior del conductor, nos indica que al no existir carga eléctrica dentro de la misma el campo eléctrico es nulo en todos los puntos de dicha superficie, y por extensión en todos los puntos interiores del conductor. Incluso si el conductor está en presencia de un campo eléctrico externo al mismo, el campo eléctrico en el interior es nulo ya que la carga en la superficie bajo la acción del campo exterior se distribuye de manera que aparece una carga de un signo en la superficie interior del conductor y otra igual de signo contrario en la exterior de manera que crea un campo que se opone al exterior y lo anula.

Si el conductor con carga Q, tuviera una cavidad, el campo también será nulo en dicha cavidad, ya que no podría haber carga en la misma, a no ser que la pongamos sujetándola en su interior de forma artificial, en cuyo caso si habría campo eléctrico en la cavidad.

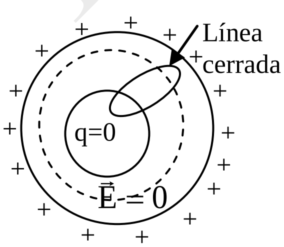
Demostremos primero que la carga Q del conductor no puede estar en la cavidad.



Si aplicamos la Ley de Gauss, tomando una superficie que rodee la cavidad, pero que esté contenida toda ella en el interior del conductor, según se ve en la figura, al ser el campo nulo en todos los puntos de dicha superficie por estar estos en el interior de un conductor; $\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{q}{\varepsilon_0}$;

luego la carga total encerrada por la superficie será nula $q = 0$, y por tanto en la cavidad no puede haber carga.

Demostremos que el campo en la cavidad, es nulo.



Si bien en la cavidad no hay carga, puede ocurrir que en parte de ella hubiera carga negativa y en el resto la misma cantidad pero positiva, con lo cual se cumpliría que no hay carga neta, pero sin embargo si habría campo eléctrico en la cavidad.

Evidentemente la situación indicada no se puede producir, pues la carga positiva se desplazaría anulando a la carga negativa, y el campo eléctrico sería cero.

No obstante podemos demostrarlo, aplicando la propiedad de que el campo electrostático es conservativo, por lo cual si tomamos una línea cerrada parte de ella dentro de la cavidad y otra parte en el interior del conductor, de forma que en la cavidad pudiera ir de una carga positiva a una negativa, se cumpliría que la circulación del campo eléctrico a lo largo de dicha línea cerrada es cero $\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$.

Como el campo dentro del conductor es nulo, si la circulación la realizamos como suma de la circulación a lo largo del camino que esté en el interior del conductor mas el camino que esta en la cavidad, al ser el campo en el conductor nulo quedará $\int_{cav} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$, de donde $\vec{E}_c = 0$, es decir el campo en la cavidad es nulo y tampoco puede haber carga en el interior de la misma.

La única forma de que exista campo en la cavidad, es sujetar una carga en el interior de la misma por medios artificiales.

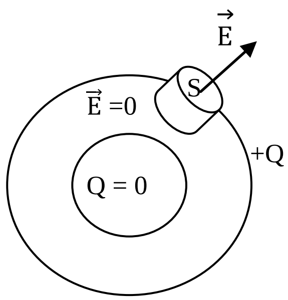
Apantallamiento eléctrico

Por tanto una cavidad de un conductor es una zona donde no existen campos eléctricos y constituye una zona blindada eléctricamente del exterior. Es decir ningún campo exterior puede afectara a la zona de la cavidad, también ocurre al contrario, si producimos un campo en el interior de la cavidad, este no afecta a la zona exterior del conductor.

Campo electrostático en puntos próximos y exteriores a la superficie de un conductor

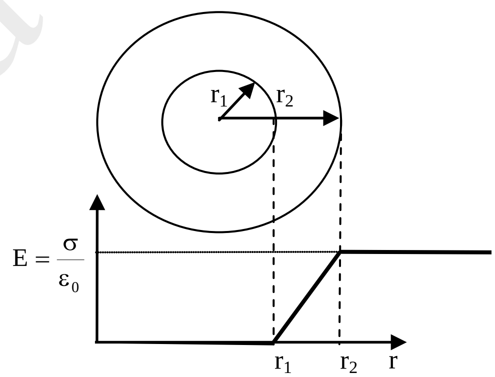
En puntos próximos al conductor el campo electrostático es perpendicular a la superficie del conductor ya que si estuviera dirigido en otra dirección ejercerían una fuerza sobre las cargas de la superficie tal que las desplazaría sobre la misma, lo cual no es posible ya que el conductor está en equilibrio electrostático. La superficie del conductor se convierte así en una superficie de potencial constante o superficie equipotencial, o de nivel del potencial.

El campo en puntos exteriores próximos al conductor, se puede calcular por Gauss, tomando una superficie gausiana cilíndrica con las bases paralelas a la superficie del conductor de forma que una de ellas este en el interior del conductor y la otra en el exterior pasando por el punto donde se calcula el campo.



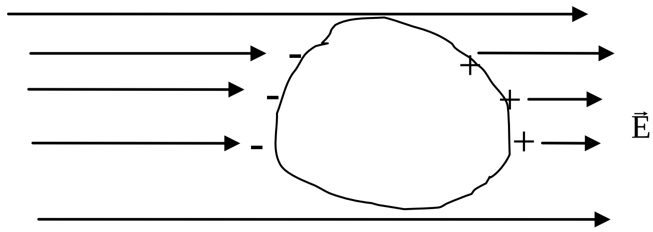
Si suponemos el área de las bases **s** y que el campo es perpendicular a la superficie del conductor para punto s exteriores, como el capo en el interior es cero quedará que la carga encerrada por la superficie gausiana vale $q = \sigma s$ y la integral extendida a toda la superficie ES, ya que solo hay campo en la base exterior y es perpendicular al vector superficie. Por tanto la Ley de Gauss, nos lleva a que ES = $\frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$, de donde $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ y dirigido perpendicularmente a la superficie, hacia fuera si la carga del conductor es positiva.

Una modelo simple para estudiar la variación del campo electrostático en puntos de la capa superficial del conductor, consistiría en postular que este crece desde cero en puntos del interior de la capa, hasta $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, en puntos de la capa exterior, de forma lineal, según se ve en la figura. El campo medio se podría tomar con un valor de $E_{medio} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

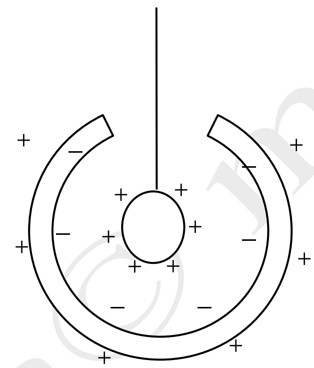


Carga por inducción

Si suponemos un conductor con carga neta nula y lo colocamos en una región donde exista un campo eléctrico, la fuerza que ejerce este sobre la carga situadas en la superficie, hace que aparezca una carga eléctrica negativa inducida en la zona de la superficie por donde se acercan las líneas de campo y una carga positiva en la zona opuesta por donde se alejan las líneas de campo de la superficie del conductor. El campo eléctrico es así el elemento inductor que actúa sobre la carga neutra que hay en la superficie del conductor, desplazando la negativas en el sentido contrario a aquel en que discurren las líneas del campo y la positiva en el mismo sentido.

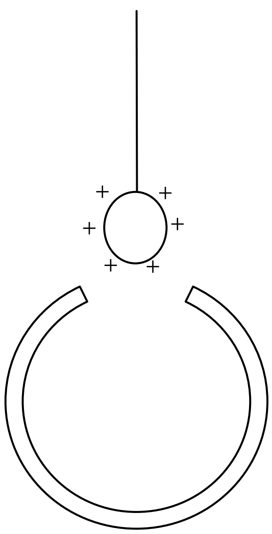


La carga por inducción desaparece cuando lo hace el campo inductor ya que el fenómeno que ocurre es un desplazamiento de carga, polarización, pero la carga total sigue siendo nula.

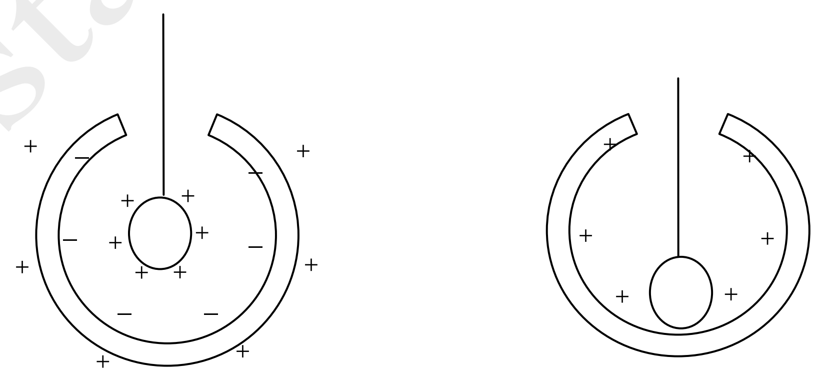


Carga por Inducción.

La carga neta del conductor sigue siendo nula. La positiva se distribuye en la capa interior del conductor y la negativa en la exterior, siempre que el inductor, esfera con carga positiva, se mantenga dentro del conductor. Al sacar el inductor la carga se vuelve a reagrupar y la situación es la de partida.



Situación de partida



Carga por Contacto

El conductor adquiere la carga de la esfera, y una vez que esta se retira, queda cargado con dicha carga neta.

1.9.1.- **Presión electrostática**

Sobre capa porción de la superficie de un conductor cargado, el resto de la superficie ejerce una fuerza de tipo electrostático, perpendicular a la superficie, ya que sigue la dirección del campo en ese punto, que se manifiesta bajo el punto de vista físico como un presión sobre la porción de superficie considerada, y que tiende a provocar un efluvio (emisión) de cargas.

El campo que crea la fuerza electrostática, es el campo medio obtenido anteriormente $E_{medio} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, pues el propio campo que crea la porción superficial de carga que llamamos autocampo, no interviene.

Por tanto la **Presión Electrostática** será $P = \frac{F}{S} = \frac{qE}{S} = \frac{q(\sigma/2\varepsilon_0)}{S} = \frac{\sigma S(\sigma/2\varepsilon_0)}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

1.10.- CAPACIDAD ELÉCTRICA DE UN CONDUCTOR

Identificaremos la capacidad eléctrica de un conductor como una característica ligada a la cantidad de carga que puede almacenar. Se define como $C = \frac{Q}{V}$, siendo Q la carga neta almacenada en el conductor y V su potencial electrostático.

La unidad de medida en el SI, será C / V = 1F (faradio). Unidades usuales son mF=10^{-3} F; μF= 10^{-6} F n F = 10^{-9} F y el p F =10^{-12} F, que denominamos mili, micro, nano y pico faradio respectivamente.

De acuerdo con lo indicado, la capacidad de un conductor esférico de radio r, cargado con una carga Q, teniendo presente que el potencial electrostático de dicho conductores es $V = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ será:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}} = 4\Pi\varepsilon_0 r \,;$$

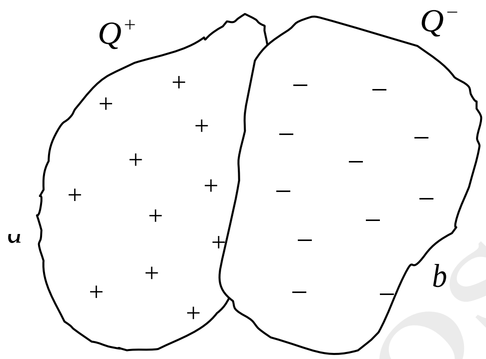
En la expresión obtenida, se observa que la capacidad depende de r esto es de la geometría del conductor, y del medio en que el conductor está inmerso ε_0, que en este caso es el vació. Si se considera que el conductor esférico, está inmerso en un medio dieléctrico de permitividad ε, su capacidad es: C= 4π ε mayor que la del condensador en el vació ya que ε

Si bien en este caso se trata de un conductor esférico, se puede generalizar lo indicado, aunque la expresión matemática será distinta según la forma del conductor.

1.11.- CONDENSADORES, CAPACIDAD.

Si tenemos dos o varios conductores próximos la capacidad de cada uno de ellos se ve afectada por el resto de conductores ya que su potencial es modificado por los mismos. Cuando tenemos un sistema eléctrico formado por solo dos conductores próximos y cargados con igual carga pero de distinto signo, este sistema lo identificamos como Condensador. A cada uno de los conductores le llamaremos placas o armaduras del condensador así formado.

Capacidad.- Para un condensador la capacidad se defina como la relación entre la carga Q de uno de los dos conductores que lo forman, y la diferencia de potencial entre ambos $C = \dfrac{Q}{Va - Vb}$



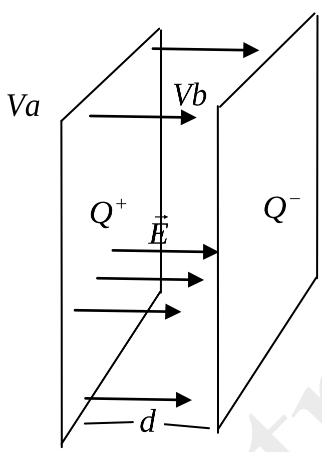
Los condensadores tienen múltiples aplicaciones, entre las que están, los circuitos filtro, los sistemas de sintonización en audio, sistemas de arranque eléctrico en los que se requiere un pico elevado de corriente, en sistemas de almacenamiento de energía eléctrica, como memorias, etc.

1.12.- CONDENSADOR PLANO, ESFÉRICO Y CILÍNDRICO.

Condensador Plano

Los conductores que lo forman son dos placas planas, cargadas con densidad de carga superficial σ repartida uniformemente y, situadas paralelamente y a pequeña distancia una de otra.

EL campo eléctrico entre las placas es uniforme, excepto en la proximidad de los bordes, debido a la distribución diferente de la carga en ellos que es algo mayor que en el resto de la placa y por tanto la capacidad del condensador algo mayor que la que se obtiene considerando el campo uniforme, para obviar este inconveniente, en el plano práctico se utilizaban los llamados *anillos de guarda* que confinaban el campo en dicha zonas.



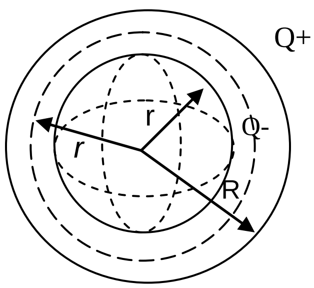
Postulando que el valor de la distancia entre las placas sea muy pequeño comparado con las dimensiones de estas, vamos a determinar la capacidad

Para un condensador $C = \frac{Q}{Va - Vb}$. La diferencia de potencial entre las placas la determinaremos conociendo el campo en el interior del condensador, que consideramos es uniforme y de valor $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$,

por tanto $Va - Vb = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$ siendo d la distancia entre las placas.

Suponiendo que sea S la superficie de cada una de las placas al estar la la carga repartida uniformemente con densidad σ, la carga de cada placa será $Q = \sigma \cdot S$, sustituyendo todos los valores en la expresión de la capacidad, obtendremos: $C = \frac{\sigma \cdot S}{\sigma d / \varepsilon_0} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ (Faradios).

Condensador esférico



Está formado por dos armaduras que son conductores esféricos concéntricos, de radios respectivos r y R, cargados con cargas respectivas Q^+ y Q^-.

Cálculo de la Capacidad

Aplicando Gauss a una esfera de radio *r* tal que r ≤ *r* ≤ R, tendremos $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E4\pi r^2$

Habiendo considerado que el campo en el espacio entre las armaduras del condensador es uniforme y radial, es decir lleva la dirección del elemento de superficie $d\vec{s}$, por tanto $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$; la diferencia de potencial entre las armaduras, se puede obtener partiendo de $\vec{E} = -\mathrm{grad}V$; $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$;

$$\int_{V_r}^{V_R} dV = -\int_r^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$

Integrando quedará $V_r - V_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(-(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}))$; $V_r - V_R = \frac{Q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0 R\cdot r}$

La capacidad será sustituyendo en la expresión general: $C = \frac{Q}{V_r - V_R} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r\cdot R}{R\cdot r}$

Haciendo algunas aproximaciones se puede llegar a una expresión similar a la de la capacidad de un condensador plano. Supongamos $R - r = d$; d mucho menor que r entonces se puede poner $R \approx r$ y queda $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

Condensador Cilíndrico

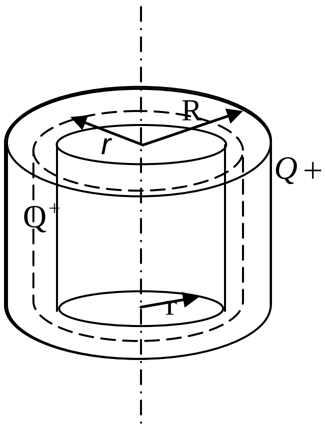
Está formado por dos conductores cilíndricos coaxiales de longitud l y de radios r y R, cargados con igual carga y de distinto signo Q, separados una pequeña distancia.

Vamos a calcular la expresión matemática de su capacidad, suponiendo que está situado en el vacio.

Aplicando La Ley de Gauss a un cilindro Gausiano coaxial con los que forman las armaduras del condensador y de radio r mayor que r *y menor que* R.

$\oiint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$; $\vec{E}\cdot 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_o}$; *Calculemos ahora la diferencia de potencial entre las armaduras.*

$$\int_{V_R}^{V_r} dV = -\int_R^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^R \frac{Q}{2\pi r\varepsilon_0 l}\cdot d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln(\frac{R}{r});\ \mathbf{V_r} - V_R = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln(\frac{R}{r})$$



Por tanto $C = \dfrac{Q}{V_r - V_R} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{R}{r}}$ La capacidad por unidad de longitud será $c = \dfrac{C}{l} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \dfrac{R}{r}}$

De igual manera que en el caso del condensador esférico, podemos obtener una expresión de la capacidad similar a la del condensador de placas planas paralelas. Consideremos que la distancia d, entre las armaduras cilíndricas es muy pequeña frente a r, radio de la armadura de menor tamaño, con esta condición se puede plantear que:

$\ln(\frac{R}{r}) = \ln(\frac{r+d}{r}) = \ln(1+\frac{d}{r}) \approx \frac{d}{r}$ y en consecuencia la capacidad por unidad de volumen del condensador cilíndrico quedará $c = \varepsilon_0 \dfrac{2\pi l R}{d} = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$

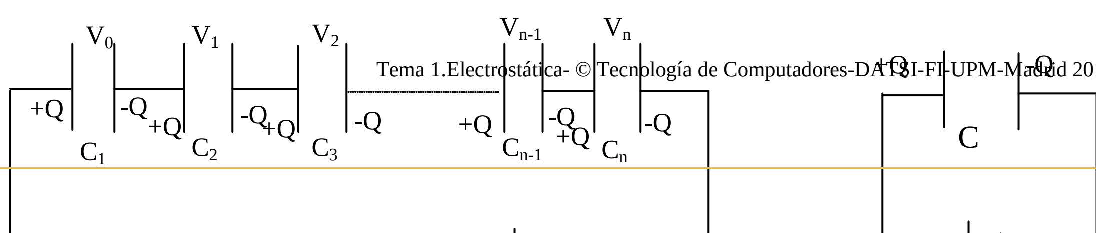
1.13.- ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

Un conjunto de condensadores se pueden conectar dando lugar a dos tipos de asociaciones llamadas Serie y Paralelo o Derivación. En el primer caso se consiguen grandes capacidades y en el segundo pequeñas capacidades.

Asociación de condensadores en serie

Físicamente, se conectan uno a continuación de otro, uniendo una armadura a otra del siguiente y así sucesivamente, como se ve en la figura.

Debido al tipo de conexión cuando se establece una diferencia de potencial V entre el conjunto de condensadores, estos se van cargando por inducción de manera que **al estar en serie que todos ellos adquieren la misma carga**



Para el condensador equivalente, se cumple que: $C = \dfrac{Q}{V}$ y

$$V_0 - V_v = \sum_{j=0}^{j=n-1} V_i - V_{j+1}$$

para cada uno de los condensadores en serie: $C_i = \dfrac{Q}{V_i}$,

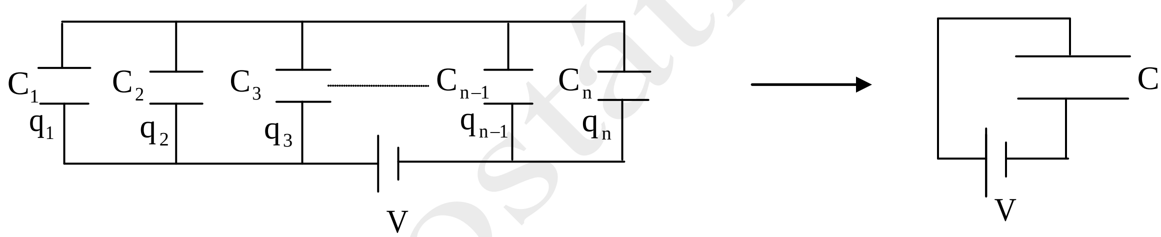
$$V = \sum_{j=1}^{J=n} V_j ; \quad \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots \frac{Q}{Cn} \quad \text{y dividiendo entre Q, tendremos} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \frac{1}{C_n} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{C_j}$$

$$\boxed{\text{Por tanto} \quad C = \frac{1}{\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{C_j}}}$$

Capacidad equivalente de n condensadores

Condensadores asociados en Paralelo o Derivación

Físicamente n condensadores, se conectan en paralelo o derivación, uniendo todas las primeras placas entre sí, por una parte y todas las segundas placas por otra, de manera que al someter el conjunto a una diferencia de potencial, esta sea la misma para cada condensador
.



Como la carga Q del condensador equivalente $Q = \sum_{J=1}^{j=n} q_i$; sustituyendo los valores de Q y de q_i

$$Q = CV = C_1V + C_2V + C_3V + \cdots + C_{n-1} + C_n \qquad C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots C_{n-1} + C_n = \sum_{j=1}^{j=n-1} C_j$$

Por tanto la Capacidad equivalente de un conjunto de n condensadores en paralelo o derivación es igual a la suma de las capacidades de cada uno de los n condensadores.

$$C = \sum_{i=1}^{j=n} C_j$$

1.14.- ENERGÍA DE UN CONDENSADOR CARGADO

Se puede establecer como modelo para cargar un condensador de capacidad C, que al conectar sus armaduras a una fuente de energía que proporcione una diferencia de potencial constante V, la carga que suministra la fuente, va a pasar de una a otra armadura, hasta que se complete el proceso de carga, momento en el cual se interrumpe el flujo de carga de la fuente al condensador. Supongamos según este modelo, que en un cierto instante genérico del proceso de carga, cuando la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador es una cierta v, y la carga que hay ya almacenada en el mismo es q, se proporciona al condensador una carga dq, la energía necesaria para transportar esta carga desde la armadura de menor potencial a la de mayor potencial será **dW = vdq = 1/C q dq** , el trabajo total para cargar el condensador con una carga Q será

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}; \quad \text{o bien las expresiones} \quad W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

En el caso de que se considere la distancia d entre las armaduras muy pequeña, se puede sustituir la Capacidad por la expresión era $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ y en consecuencia la energía almacenada en el condensador también se podrá obtener como: $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}d$

1.15.- ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO

Entre las armaduras de un condensador plano, de capacidad C, cargadas con carga Q, sabemos que existe un campo eléctrico, $\vec{E}$, uniforme. La energía del condensador es por tanto la del campo eléctrico asociado al mismo; vamos a obtener una expresión de la misma, que es la que normalmente se determina como energía del campo eléctrico, la cual tiene una aplicación general, a pesar de que la obtengamos para el caso particular de un condensador plano.

La diferencia de potencial V entre las armaduras del condensador, se expresa en función del campo eléctrico $\vec{E}$, como V = E d, siendo d la distancia entre las placas. Por tanto $W = \frac{1}{2}CE^2 \cdot d^2$, como $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$, quedará: $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d}E^2 d^2$, pero el volumen del condensador es v = Sd, y por tanto $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S E^2 d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 v$.

La expresión más práctica es la de Energía por unidad de volumen v $\quad w = \frac{W}{v} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$