0203) Planos, cuerdas y poleas

A) Poleas

Una polea es una máquina simple cuya finalidad es cambiar el sentido y dirección de una fuerza. Está compuesta por una rueda que puede girar alrededor de un eje fijo a una chapa que pasa por su centro, y que en su periferia tiene una garganta por la cual corre una cuerda o una cadena (ver figura 1)

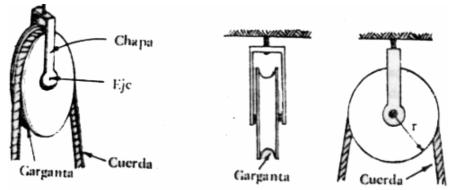


Figura 1) Partes de una polea

Una polea puede cambiar la orientación (dirección y/o sentido) de una fuerza (figura 2a), multiplicar su efecto (figura 2b) o ambas cosas a la vez, si se combinan inteligentemente dos o más de ellas (figura 2c).

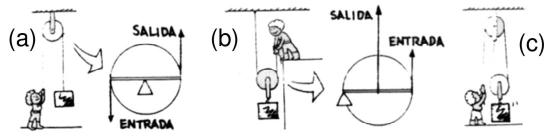


Figura 2) Efectos del uso de polea. (a) cambio de orientación de una fuerza; (b) multiplicación de su efecto; (c) ambas cosas a la vez

En una **polea ideal**, el roce entre la cuerda y la garganta es despreciable. Además, su peso es despreciable. En este caso, la magnitud de la fuerza se traspasa completamente de un extremo a otro de la cuerda, cambiando su dirección y sentido

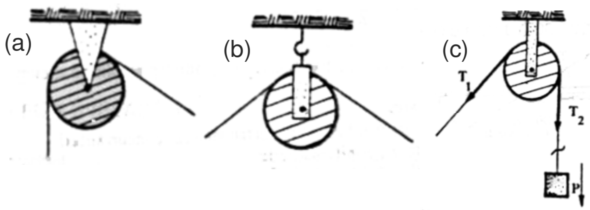


Figura 3) Poleas fijas

Podemos distinguir al menos dos tipos de poleas

Las **poleas fijas** (figuras 3a y 3b), o con eje fijo, las cuales solamente cambian la orientación de la fuerza aplicada por la cuerda que pasa por ella. En la figura 37c, si la polea es ideal, el sistema está en equilibrio y el cuerpo tiene un peso P, entonces $T_1 = T_2 = P$.

Las **poleas móviles** o con eje móvil (figura 4a), las cuales permiten amplificar por dos el efecto de una fuerza. En la figura 4b, para un sistema en equilibrio y polea de peso despreciable, se cumple que

$$T + T = P \Rightarrow T = P/2$$

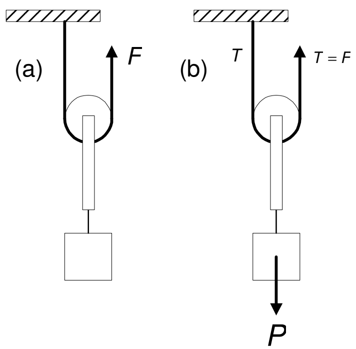


Figura 4) Poleas móviles

Si se considera el peso de la polea P_P y el sistema está en equilibrio

$$T + T = P + P_P \Rightarrow T = \frac{P + P_P}{2}$$

Considere la situación de la figura 5, en la cual dos cuerpos de masas M_1 y M_2 están unidos a una polea móvil a la cual se le aplica una fuerza F. En la figura, se tiene que:

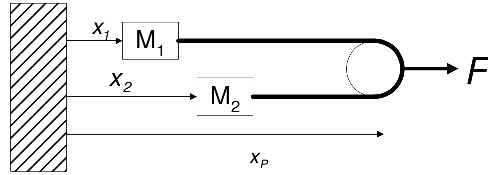


Figura 5) Posiciones de cuerpos conectados a través de una polea móvil

- x_1: posición del cuerpo M_1 en función del tiempo
- x_2: posición del cuerpo M_2 en función del tiempo
- x_P: posición de la polea móvil en función del tiempo

Si la cuerda la polea es ideal (inextensible y de masa despreciable) y de largo L constante, se puede establecer que:

$$L = x_p - x_1 + x_P - x_2 = 2 \cdot x_p - x_1 - x_2$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo, y sabiendo que v = dx/dt:

$$0 = 2 \cdot \frac{dx_p}{dt} - \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = 2 \cdot v_p - v_1 - v_2$$

Derivando nuevamente con respecto al tiempo, y sabiendo que a = dv/dt:

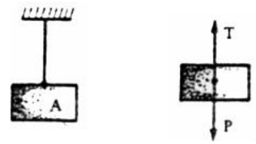
$$0 = 2 \cdot \frac{dv_p}{dt} - \frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt} = 2 \cdot a_p - a_1 - a_2$$

Donde a_P, a_1 y a_2 son las aceleraciones de la polea y de los cuerpos M1 y M2, respectivamente. Despejando:

$$2 \cdot a_p - a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_p = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

B) Cuerpo colgado en una cuerda

En la figura 6 se muestra un cuerpo en equilibrio colgado



T: Tensión de la cuerda
P: Peso del cuerpo

Figura 6) Cuerpo de masa M colgado en cuerda.

con una cuerda que proporciona una tensión T.

Del DCL se aprecia que

$$T - M \cdot g = 0 \Rightarrow T = M \cdot g$$

C) Cuerpo en un ascensor

Considere un cuerpo de masa M dentro de un ascensor. Dependiendo del movimiento del ascensor, la fuerza de contacto normal N del ascensor al cuerpo va a tomar diferentes valores.

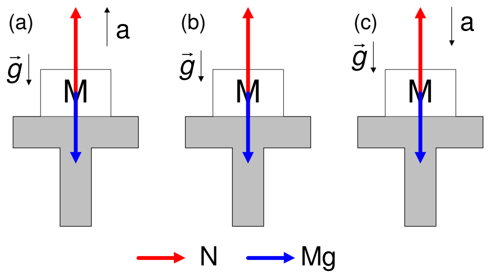


Figura 7) Cuerpo en un ascensor. (a) Ascensor acelera hacia arriba; (b) ascensor en equilibrio; (c) Ascensor acelera hacia abajo

En la Figura 7a), el ascensor tiene aceleración hacia arriba. Ello sucederá si:

- El ascensor va subiendo y aumenta la magnitud de su velocidad
- El ascensor va bajando y disminuye la magnitud de su velocidad

En este caso, $N - M \cdot g = M \cdot a \Rightarrow N = M \cdot (g + a)$, por lo que **la normal tiene mayor magnitud que el peso**.

En la Figura 7b), el ascensor tiene aceleración cero, por lo que está en equilibrio de fuerzas. Ello sucederá si:

- El ascensor está en reposo (equilibrio estático)
- El ascensor va subiendo o bajando con magnitud de velocidad constante (equilibrio dinámico).

En este caso, $N - M \cdot g = 0 \Rightarrow N = M \cdot g$, por lo que **la normal tiene igual magnitud que el peso**.

En la Figura 7c), el ascensor tiene aceleración hacia abajo. Ello sucederá si:

- El ascensor va subiendo y disminuye la magnitud de su velocidad
- El ascensor va bajando y aumenta la magnitud de su velocidad

En este caso, $M \cdot g - N = M \cdot a \Rightarrow N = M \cdot (g - a)$, por lo que **la normal tiene menor magnitud que el peso**.

D) Plano inclinado en equilibrio

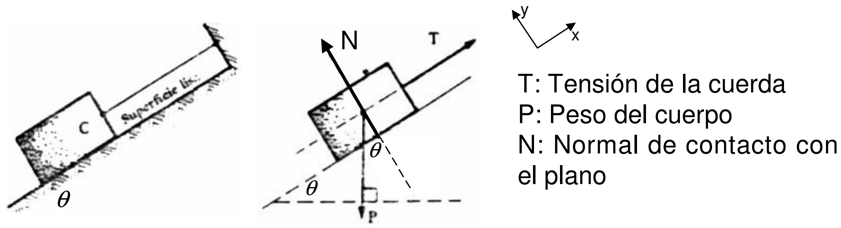


Figura 8) Cuerpo en plano inclinado en equilibrio

Considere el sistema de la figura 8. Para obtener las ecuaciones del DCL de un plano inclinado, conviene fijar los ejes de referencia x e y con respecto a éste (eje "x" paralelo al plano, y eje "y" perpendicular al plano).

En términos vectoriales, se puede establecer que:

- Tensión de la cuerda: $\vec{T} = T\hat{x}$
- Normal del plano: $\vec{N} = N\hat{y}$
- Peso: $\vec{P} = -M \cdot g \cdot [sen(\theta)\hat{x} + cos(\theta)\hat{y}]$

Haciendo el DCL en cada eje:

- Eje y: $N - M \cdot g \cdot cos(\theta) = 0 \Rightarrow N = M \cdot g \cdot cos(\theta)$
- Eje x: $T - M \cdot g \cdot sen(\theta) = 0 \Rightarrow T = M \cdot g \cdot sen(\theta)$

E) Fuerza de contacto entre dos cuerpos.

En la figura 9 se muestran dos cuerpos de masas M_1 y M_2, que están pegados uno al otro, y deslizando en una superficie lisa. Al cuerpo M_1 se le aplica una fuerza de magnitud constante F de magnitud constante, la cual provoca que el conjunto adquiera una aceleración neta a_s.

Para analizar el sistema, hay que hacer un DCL para cada cuerpo. En cada DCL hay que considerar la fuerza de contacto entre ambos cuerpos, F_{12}.

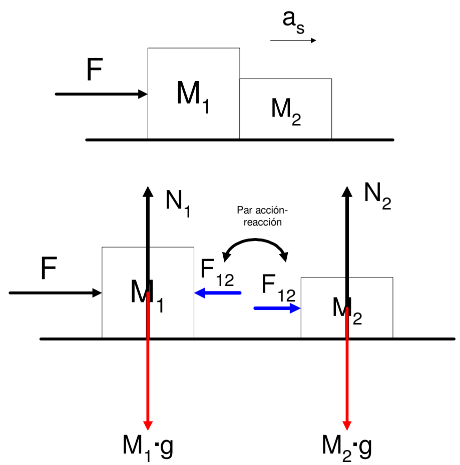


Figura 9) Fuerza sobre dos cuerpos en contacto

Con referencia a la figura, se pueden establecer ecuaciones para relacionar las distintas fuerzas.

Para el cuerpo de masa M_1:

- Eje y: $N_1 - M_1 \cdot g = 0 \Rightarrow N_1 = M_1 \cdot g$
- Eje x: $F - F_{12} = M_1 \cdot a_s$

Para el cuerpo de masa M_2:

- Eje y: $N_2 - M_2 \cdot g = 0 \Rightarrow N_2 = M_2 \cdot g$
- Eje x: $F_{12} = M_2 \cdot a_s$

Sumando las dos ecuaciones en el eje x:

$$F - F_{12} + F_{12} = M_1 \cdot a_s + M_2 \cdot a_s \Rightarrow F = (M_1 + M_2) \cdot a_s \Rightarrow a_s = \frac{F}{M_1 + M_2}$$

Reemplazando la aceleración del sistema en la ecuación del eje x para el cuerpo de masa M_2, se puede obtener la fuerza de contacto F_{12}:

$$F_{12} = M_2 \cdot a_s = M_2 \cdot \frac{F}{M_1 + M_2} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot F$$

F) Fuerza sobre tres cuerpos unidos con cuerdas

En la figura 10 se muestran tres cuerpos de masa M_1, M_2 y M_3, deslizando en una superficie lisa. Los cuerpos M_1 y M_2 están unidos por una cuerda de tensión T_{12}, y los cuerpos M_2 y M_3 están unidos por una cuerda de tensión T_{23}. Al cuerpo M_1 se le aplica una fuerza de magnitud constante F de magnitud constante, la cual provoca que el conjunto adquiera una aceleración neta a_s.

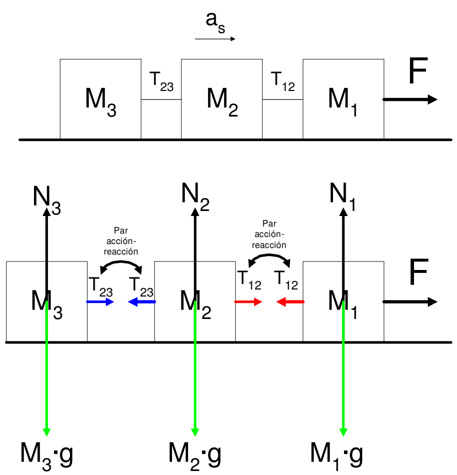


Figura 10) Fuerza tres cuerpos unidos por cuerdas

Para analizar el sistema, hay que hacer un DCL para cada cuerpo. Con referencia a la figura, se pueden establecer ecuaciones para relacionar las distintas fuerzas.

Para el cuerpo de masa M_1:

- Eje y: $N_1 - M_1 \cdot g = 0 \Rightarrow N_1 = M_1 \cdot g$
- Eje x: $F - T_{12} = M_1 \cdot a_s$

Para el cuerpo de masa M_2:

- Eje y: $N_2 - M_2 \cdot g = 0 \Rightarrow N_2 = M_2 \cdot g$
- Eje x: $T_{12} - T_{23} = M_2 \cdot a_s$

Para el cuerpo de masa M_3:

- Eje y: $N_3 - M_3 \cdot g = 0 \Rightarrow N_3 = M_3 \cdot g$
- Eje x: $T_{23} = M_3 \cdot a_s$

Sumando las tres ecuaciones en el eje x:

$$F - T_{12} + T_{12} - T_{23} + T_{23} = M_1 \cdot a_s + M_2 \cdot a_s + M_3 \cdot a_s$$
$$\Rightarrow F = (M_1 + M_2 + M_3) \cdot a_s \Rightarrow a_s = \frac{F}{M_1 + M_2 + M_3}$$

Reemplazando en la ecuación del eje x para la masa M_3, se obtiene la tensión T_{23}:

$$T_{23} = M_3 \cdot \frac{F}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{M_3}{M_1 + M_2 + M_3} \cdot F$$

Reemplazando los resultados de a_s y T_{23} en la ecuación del eje x para la masa M_2, se obtiene la tensión T_{12}:

$$T_{12} = M_2 \cdot a_s + T_{23} = M_2 \cdot \frac{F}{M_1 + M_2 + M_3} + \frac{M_3}{M_1 + M_2 + M_3} \cdot F = \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} \cdot F$$

Así, la cuerda T_{23} "tira" de la masa M_3, mientras que la cuerda T_{12} "tira" de las masas M_2 y M_3.