Cálculo práctico de límites

Academia Cartagena 99

26 de septiembre de 2007

1. Indeterminaciones

Las principales indeterminaciones son:

De tipo suma $\infty - \infty$

De tipo producto o cociente $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

De tipo potencial-exponencial 1^∞, 0^0, ∞^∞

2. Sucesión equivalente

a_n y b_n son equivalentes si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, y se denota por $a_n \sim b_n$.

3. Tabla de sucesiones equivalentes

Si $a_n \to 0$	
	$\sin a_n \sim a_n \sim \arcsin a_n$
	$\tan a_n \sim a_n \sim \arctan a_n$
	$1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2}$
	$(1 + a_n)^\lambda \sim 1 + \lambda a_n$
	$e^{a_n} \sim a_n + 1$
	$\log 1 + a_n \sim a_n$
Si $a_n \to 1$	
	$\log a_n \sim a_n - 1$
	$\sqrt[n]{a} - 1 \sim \frac{1}{n} \log a_n$
Fórmula de STIRLING	
	$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

4. Orden de magnitud

Dadas dos sucesiones divergentes (a_n) y (b_n), se dice que (b_n) es un infinito de orden superior al de (a_n) si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$. Se verifica la siguiente jerarquía de infinitos

$$\log n < n^p < a^n < n! < n^n \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

5. Criterio de Stolz

El criterio de Stolz dice que dadas dos sucesiones (a_n) y (b_n), si existe el límite $\lim \frac{(a_n)-(a_{n-1})}{(b_n)-(b_{n-1})}$, entonces

$$\lim \frac{(a_n)}{(b_n)} = \lim \frac{(a_n)-(a_{n-1})}{(b_n)-(b_{n-1})} \tag{3}$$

6. Otros trucos

Si $(a_n) \to l$, entonces

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \to l \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \to l \tag{5}$$

Para el último se debe verificar además que $a_n > 0$. Si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, entonces

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = l \tag{6}$$