Unidad Didáctica III.

Podemos distinguir dos partes, una donde se estudia el espacio Afín y el espacio Euclídeo, y una segunda parte entorno a la programación Lineal.

En la primera parte, además de los vectores del espacio vectorial se estudian otras nociones como distancias, puntos, ángulos..., y esto nos permite llegar al espacio Afín y el espacio Euclídeo.

La programación Lineal y el Método Simplex son un buen método para aplicar los conocimientos adquiridos.

Capítulo 7. El Espacio Afín

Conocimientos previos:

- **Espacio vectorial:** Ver tema 1.
- **Base de un espacio vectorial. Base ortonormada.**
- **Función inyectiva y biyectiva:**
- **Isomorfismo**
- **Producto cartesiano**
- **Relación de Equivalencia, Clase de Equivalencia**
- **Propiedad transitiva, reflexiva y simétrica.**

Espacio afín

Sea E un conjunto $E = \{P, Q, R, ...\}$ cuyos elementos se llamarán puntos y sea V un K-espacio vectorial. Se dice que E es un espacio afín asociado a V, si se define una aplicación:

$$f : E \times E \rightarrow V$$

tal que a cada par de puntos (P, Q) le haga corresponder un vector $\bar{v} \in V$ que se le denominará $\bar{v} = \overline{PQ}$ (es decir: $f(P,Q) = \bar{v} = \overline{PQ}$) y que verifique:

1º $\forall\, P \in E,\ \forall \bar{v} \in V$; $\exists\, Q \in E$ tal que $f(P,Q) = \bar{v} = \overline{PQ}$)

2º $f(P,Q) = 0 \Rightarrow P = Q$

3º $\forall\, P, Q, R \in E$, tales que $\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR} \Rightarrow f(P, R) = f(P, Q) + f(Q, R)$

La dimensión del espacio afín es la dimensión del espacio vectorial asociado.

Se denota E_2 el espacio de puntos en el plano asociado al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

De igual forma, E_3 es el espacio de puntos asociado al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Referencia afín

Sea E un espacio afín asociado al espacio vectorial V, de dimensión n. El conjunto $R = \{O, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$, donde $O \in E$ y $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$ es una base de V, se llama referencia afín de E.

Un punto $P \in E$ tiene de coordenadas en R las que el vector $\overline{OP}$ tiene en la base vectorial B. Es decir:

$$P(p_1, p_2, ..., p_3) \text{ en } R \Leftrightarrow \overline{OP} = (p_1, p_2, ..., p_3) \text{ en } B$$

En E_2 la referencia usual es:

$$R = \{O, \overline{u}_1, \overline{u}_2\}; \text{ donde } O = (0,0);\ \overline{u}_1 = (1,0); \text{€}\overline{u}_2 = (0,1)$$

En E_3 será:

$$R = \{O, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}; \text{ donde } O = (0,0,0);\ \overline{u}_1 = (1,0,0); \text{€}\overline{u}_2 = (0,1,0);\ \overline{u}_3 = (0,0,1); \text{€}$$

Ecuaciones de una recta

Una **recta** es un subespacio de dimensión 1 en un espacio afín. Se determina por:

a) Un punto y una dirección (vector de dirección de la recta).

b) Dos puntos no coincidentes.

Cada caso se hallaría de la siguiente manera. Supongamos E_2.

a) Si el punto es $P = (a, b)$ y la dirección $\overline{d} = (d_1, d_2)$, la recta r puede expresarse de las siguientes formas:

Ecuación vectorial: $\overline{OX} = \overline{OP} + \lambda \overline{d}$; donde $x = (x, y) \in r$.

Ecuaciones paramétricas:

$$x = a + \lambda d_1$$
$$y = b + \lambda d_2$$

Ecuación continua:

$$\frac{x - a}{d_1} = \frac{y - b}{d_2}$$

Ecuación cartesiana:

$$Ax + By + C = 0; \text{ donde } A = d_2;\ B = -d_1;\ C = d_2 a - d_1 b$$

b) La recta que contiene los puntos $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$ es la recta que tiene como dirección $\overline{d} = \overline{PQ} = (c - a, d - b)$. Se reduce al caso anterior.

Si el espacio afín es E_3 las ecuaciones serán similares con tres coordenadas. No tendría una expresión la ecuación cartesiana, su correspondiente es la expresión de una recta como intersección de dos planos.

Posiciones relativas de dos rectas en E_2

Sean las rectas r y s de direcciones respectivas $\overline{d}_r = (u_1, u_2)$ y $\overline{d}_s = (v_1, v_2)$:

1. Si $\overline{d}_r = k\overline{d}_s \Leftrightarrow \dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{v_1}{v_2} \Rightarrow r$ y s paralelas.

2. Si $\overline{d}_r = k\overline{d}_s$ y además $P \in r$ es $P \in s \Rightarrow r$ y s coincidentes.

3. Si $\bar{d}_r \neq k\bar{d}_s \Rightarrow$ r y s se cortan en un punto solución del sistema de ecuaciones cartesianas de ambas.

Si las rectas vienen expresadas por su ecuación cartesiana, se verifica:

Intersección de dos rectas: Dadas dos rectas r y s cuyas ecuaciones generales son r : $a_1x + a_2y + a_0 = 0$ y s : $b_1x + b_2y + b_0 = 0$, y llamando M y M' a las matrices:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \text{ y } M' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_0 \end{bmatrix}$$

- $rg[M] = 2 \Rightarrow r \cap s$ consta de un solo punto (r y s son secantes).
- $rg[M] = 1$ y $rg[M'] = 2 \Rightarrow r \cap s = \varnothing$ y las rectas son paralelas.
- $rg[M] = rg[M'] = 1 \Rightarrow$ las rectas coinciden (son la misma).

Intersección de tres rectas: Dadas las siguientes rectas r, s y t, y llamando M y M' a las matrices que abajo se señalan

$$r : a_1x + a_2y + a_0 = 0$$
$$s : b_1x + b_2y + b_0 = 0$$
$$t : c_1x + c_2y + c_0 = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \text{ y } M' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{bmatrix}$$

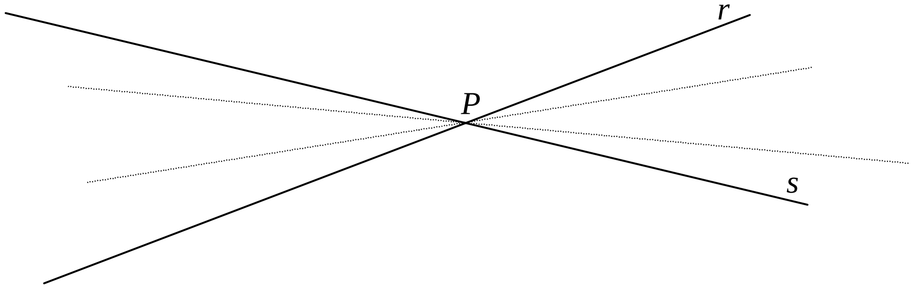
- $rg[M'] = 3 \Rightarrow r \cap s \cap t = \varnothing$ y forman triángulo o dos son paralelas.
- $rg[M] = rg[M'] = 2 \Rightarrow r \cap s \cap t$ consta de un solo punto.
- $rg[M] = 1$ y $rg[M'] = 2 \Rightarrow r \cap s \cap t = \varnothing$ (son paralelas y no coinciden las tres)
- $rg[M] = rg[M'] = 1 \Rightarrow$ las tres rectas coinciden (son la misma).

Haz de rectas de vértice P

Si las rectas r y s se cortan en un punto $P = (a, b)$, la ecuación

$$\alpha r + \beta s = 0 \;; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

donde r y s representan las ecuaciones cartesianas respectivas, es la del conjunto de rectas de E_2 que pasan por P (**haz de rectas de vértice *P***). Para cada valor de α y β real se obtiene una recta del haz.



Ejercicio:

Hallar la recta t que es paralela a r y pasa por la intersección de s_1 y s_2, siendo r, s_1 y s_2 las rectas de ecuaciones generales

$$r : 3x + 2y + 5 = 0; \quad s_1 : x + 2y +1 = 0; \quad s_2 : 2x + y = 7$$

Solución:

La recta t, como pasa por la intersección de s_1 y s_2, pertenece al haz que estas definen, luego:

$$t : (x + 2y +1) + \lambda(2x + y - 7) = 0 \text{ para un cierto } \lambda \in \mathbb{R}$$

Dado que t y r son paralelas, tendrán proporcionales los coeficientes de x e y:

$$\frac{1+2\lambda}{3} = \frac{2+\lambda}{2}, \text{ luego } \lambda = 4 \text{ y } t : 3x + 2y = 9.$$

<u>Ecuaciones de un plano</u>

Un plano es un subespacio de dimensión 2 en un espacio afín. Puede determinarse por:

a) Un punto y dos vectores contenidos.
b) Tres puntos no alineados.
c) Un punto y un vector perpendicular (vector director o dirección del plano).

Se hallaría de la siguiente manera:

a) Si el punto es $P = (a, b, c)$, y los vectores contenidos: $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$; el plano π puede expresarse por las siguientes ecuaciones:

Ecuación vectorial: $\overline{OX} = \overline{OP} + \lambda\bar{u} + \mu\bar{v}$; donde $X \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones paramétricas: Si $X = (x, y, z)$

$$x = a + \lambda u_1 + \mu v_1$$

$$y = b + \lambda u_2 + \mu v_2$$

$$z = c + \lambda u_3 + \mu v_3$$

Ecuación cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x-a & u_1 & v_1 \\ y-b & u_2 & v_2 \\ z-c & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0; \quad A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

donde A, B, C serán los menores:

$$A = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}; \; B = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}; C = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

b) El plano que contiene los tres puntos: $P_1 = (a_1, b_1, c_1)$; $P_2 = (a_2, b_2, c_2)$; y $P_3 = (a_3, b_3, c_3)$ será el plano que contiene como vectores, por ejemplo, $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_1P_3}$, y contiene a un punto cualquiera de los tres dados.

c) El plano que contiene al punto $P = (a, b, c)$ y tiene como vector de dirección $\overline{d} = (A, B, C)$ tiene la ecuación cartesiana

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

Las restantes ecuaciones pueden hallarse eligiendo tres puntos cualesquiera y procediendo como en el caso b) anterior.

Posiciones relativas de dos planos en E_3

Sean los planos π_1 y π_2 de ecuaciones:

$$\pi_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad \pi_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Analizando las soluciones del sistema formado por ambas, utilizando el teorema de Rouché se obtiene:

$$[M \mid N] = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \mid & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \mid & D_2 \end{bmatrix}$$

1. Si $r[M] = r\,[M \mid N] = 1 \Rightarrow$ **Planos coincidentes**

Esto sucede cuando:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

2. Si $r[M] = 1$; $r[M \mid N] = 2 \Rightarrow$ **Planos paralelos**

Esto sucede cuando:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Es decir, cuando el vector de dirección coincide en ambos planos.

3. Si $r[M] = r[M \mid N] = 2 \Rightarrow$ **Los planos se cortan según una recta**.

Ecuación de una recta como intersección de planos

Toda recta en E_3 puede expresarse como intersección de dos planos. La recta:

$$r \equiv \frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}$$

resolviendo dos de las tres igualdades, resulta:

$$r \equiv \begin{cases} d_2(x-a) - d_1(y-b) = 0 \\ d_3(x-a) - d_1(z-c) = 0 \end{cases}$$

que es la ecuación de dos planos cuya intersección es la recta r.

Haz propio de planos de eje la recta *r*

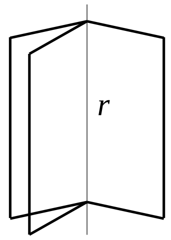
Dados los planos:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

que se cortan según la recta r, la ecuación:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0;\ \alpha, \beta \in \mathrm{R}$$

representa el conjunto de planos que contienen a r. Para cada par de valores α, β se obtiene uno de ellos. Ese conjunto se llama **haz propio de planos de eje *r***.

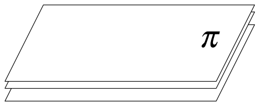


Haz de planos paralelos a uno dado

Dado un plano π de ecuación:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

La ecuación $Ax + By + Cz + \lambda = 0$, representa para cada $\lambda \in R$, un plano paralelo a π. El conjunto de todos ellos se llama **haz impropio de planos paralelo a π**.



Posición relativa de tres planos en E_3

Dados tres planos π_1, π_2, π_3 de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\pi_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Sus posiciones relativas se obtendrán del análisis del sistema de matrices:

$$[M \mid N] = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \mid & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \mid & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \mid & D_3 \end{bmatrix}$$

a) Si $r[M] = r[M \mid N] = 1 \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

b) Si $r[M] = 1$; $r[M \mid N] = 2 \Rightarrow$ Tres planos paralelos o dos planos coincidentes y el otro, paralelo.

c) Si $r[M] = r[M \mid N] = 2 \Rightarrow$ Se cortan según una recta r (forman haz propio).

d) Si $r[M] = 2$; $r[M \mid N] = 3 \quad \Rightarrow$ Se cortan dos a dos (forman prisma) o dos paralelos cortados por el otro.

e) Si $r[M] = r[M \mid N] = 3 \quad \Rightarrow$ Se cortan en un solo punto (forman triedro).

Capítulo 8. El problema de la Programación Lineal

Conocimientos previos:

- **Ecuación de una recta**
- **Representación en sistemas de coordenadas cartesianas**
- **Resolución de sistemas de ecuaciones lineales**

Conjuntos convexos: Definiciones

Sea E un espacio afín real de n-dimensiones, asociado a un espacio vectorial V.

a) Combinación convexa

Se dice que un punto P de E es **combinación convexa** de los puntos $A_1, A_2, ..., A_m$ de E si existen números reales positivos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ tales que para un punto O de E:

$$\overline{OP} = \alpha_1 \overline{OA_1} + \alpha_2 \overline{OA_2} + ... + \alpha_m \overline{OA_m}\ ; \quad \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m = 1$$

Esta definición es independiente del punto O elegido. Puede abreviarse

$$P = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_m A_m; \quad \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m = 1$$

b) Conjunto convexo

Un conjunto F de E se dice convexo si para todo par de puntos A, B, de F, toda combinación convexa de A y B pertenece a F.

$$F \text{ convexo} \iff A, B \in F\ ;\ P = \alpha_1 A + \alpha_2 B \in F \quad \text{con } \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

De una manera sencilla:

> *Un conjunto es convexo cuando para todo par de puntos, el segmento que los une está incluido en dicho conjunto.*

c) Segmento de extremos *A* y *B*

Dados dos puntos A y B de E, se llama **segmento** de extremos A, B al conjunto:

$$[A, B] = \{P \in E \quad \text{tales que} \quad P = \alpha A + (1-\alpha)B, \quad \alpha \in R, \quad 0 \le \alpha \le 1\}$$

De esta definición se deduce que:

Proposición 1: Un punto $P \subset E$ es combinación convexa de A y B si P pertenece al segmento de extremos A y B.

Proposición 2: Un subconjunto $F \subset E$ es convexo si para todo par A, B de puntos de F, el segmento $[A, B]$ también pertenece a F.

d) Extremo

Un punto P de un conjunto convexo F de E recibe el nombre de **extremo**, si P no puede ser expresado como combinación convexa de otros dos puntos de F distintos de P. Es decir, si P no pertenece a ningún segmento que tenga por extremos dos puntos distintos de P.

e) Variedad convexa

Dado un conjunto S de puntos de E, el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de S se llama **variedad convexa** de S. Es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S. Se representa por $V(S)$.

f) Convexo de soluciones

Es el recinto del plano que satisface simultáneamente cada una de las desigualdades lineales del sistema.. Un convexo de soluciones es de **área finita** cuando la poligonal que lo delimita es cerrada y es de **área infinita** cuando dicha poligonal es abierta.

<u>Desigualdades lineales</u>

En general, los puntos que satisfacen una desigualdad lineal

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

definen un semiespacio en el espacio n-dimensional. Así, la desigualdad

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b$$

define un semiplano en el espacio afín E_2.

El conjunto de puntos solución del sistema de desigualdades:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

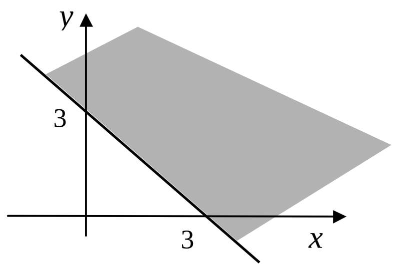
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

es un conjunto convexo.

Ejemplo:

Graficar el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $x + y \geq 3$.

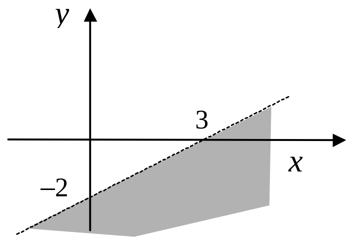
Comenzamos por graficar $x + y = 3$. Los puntos del plano que la satisfacen son los que se hallan sobre la recta correspondiente, pero también estamos buscando los puntos que cumplen la desigualdad $x + y > 3$, o lo que es lo mismo, $y > -x + 3$, por lo que el conjunto solución de la desigualdad dada es el semiplano que está por encima de la recta incluyéndola.



Ejemplo:

Graficar el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $2x - 3y > 6$.

La desigualdad dada es equivalente a $y < \frac{2}{3}x - 2$. Luego el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad debe estar por debajo de la recta.



Para trazar una desigualdad de las mencionadas, es conveniente tener en cuenta las siguientes reglas:

1. Dibujar la recta $ax + by = c$, empleando línea continua si se incluye la igualdad y discontinua si no se la incluye.
2. Elegir un punto del plano, que no pertenezca a la recta. Si dicho punto satisface la desigualdad, entonces el conjunto buscado es el semiplano que lo contiene. Si no la satisface, la solución corresponde al otro semiplano.

<u>Sistemas de desigualdades lineales</u>

Mediante un ejemplo analizaremos el procedimiento a seguir para hallar el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales.

Ejemplo:

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x \geq y \\ 3x + y \geq 6 \\ y \leq 5 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

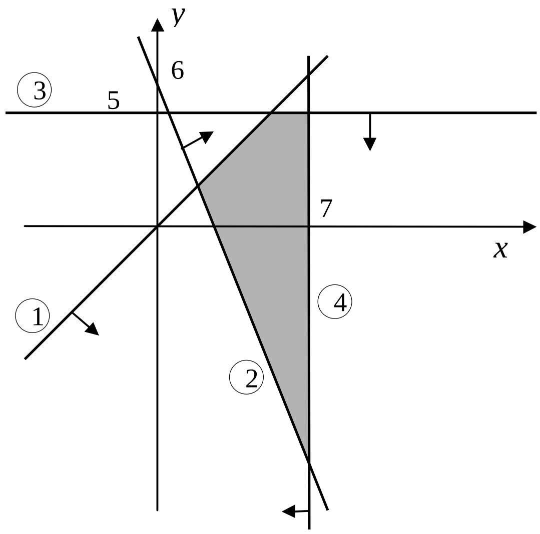
Para mostrar su conjunto solución, graficaremos en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales el semiplano solución de cada desigualdad.

La intersección de estos semiplanos nos dará una región del plano que será el conjunto del sistema de desigualdades lineales.

Puntualicemos los pasos a seguir para llegar al conjunto de desigualdades dado.

1. Numeraremos cada una de las desigualdades del sistema dado.
2. Transformaremos cada desigualdad del sistema en ecuación, a efectos de poder graficar la frontera del semiplano solución de cada desigualdad.
3. Para cada inecuación buscaremos un semiplano solución, señalándolo mediante una flecha apoyada en la frontera con sentido orientado hacia el conjunto solución, para simplificar el gráfico.
4. Señalaremos mediante un sombreado, el subconjunto del plano que es solución del sistema.

$$\begin{cases} 1) & x \geq y \\ 2) & 3x + y \geq 6 \\ 3) & y \leq 5 \\ 4) & x \leq 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1) & x = y \\ 2) & 3x + y = 6 \\ 3) & y = 5 \\ 4) & x = 7 \end{cases}$$



El problema de la programación lineal

El problema de la **programación lineal** consiste en encontrar los valores de ciertas variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que optimicen una función lineal de ellas dada: $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, de forma que todas ellas sean positivas y que verifiquen a su vez un sistema de desigualdades lineales.

La función lineal a optimizar se llama **función objetivo** (o **económica**) y las ecuaciones se llaman **restricciones** o **ligaduras** del problema.

Se puede escribir:

Optimizar: $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ (función objetivo)

sujeta a
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(restricciones o ligaduras)}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Se supone que las ecuaciones ligaduras son independientes, ya que en caso contrario se sustituirán por otro sistema equivalente que lo fuese.

Si las restricciones se dan en forma de desigualdades

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

puede ser transformado en igualdades sumando a cada desigualdad un número positivo desconocido. Estos números se llaman variables de holgura. El sistema anterior quedaría:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

Como problema matemático, el problema de programación lineal puede ser descrito así: Sea un conjunto convexo definido por un sistema lineal de desigualdades (ligaduras). De todos los puntos del convexo, determinar aquel o aquellos para los cuales se optimice una cierta función lineal (función objetivo).

Soluciones del problema

Sea el problema de programación lineal con n variables y m restricciones independientes. Se llama:

Solución posible: Todo punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cuyas coordenadas son todas positivas y verifica las restricciones. Se llama también **solución factible**.

Solución posible básica: Es la solución posible que no posee más de m coordenadas positivas.

Solución posible óptima: Es la solución posible que optimiza la función económica.

Proposición 3: El conjunto de todas las soluciones posibles al problema de programación lineal es un conjunto convexo.

Proposición 4: Toda solución posible óptima se alcanza en un punto extremo del conjunto convexo de las soluciones posibles.

Proposición 5: Cuando existan dos o más soluciones optimas, cualquier combinación convexa de ellas es también solución óptima.

Método de resolución

a) Método gráfico

El problema de programación lineal consiste en encontrar el punto del conjunto convexo determinado por las ecuaciones restricción que optimice la función objetivo. Para ilustrar este método, consideraremos el espacio bidimensional.

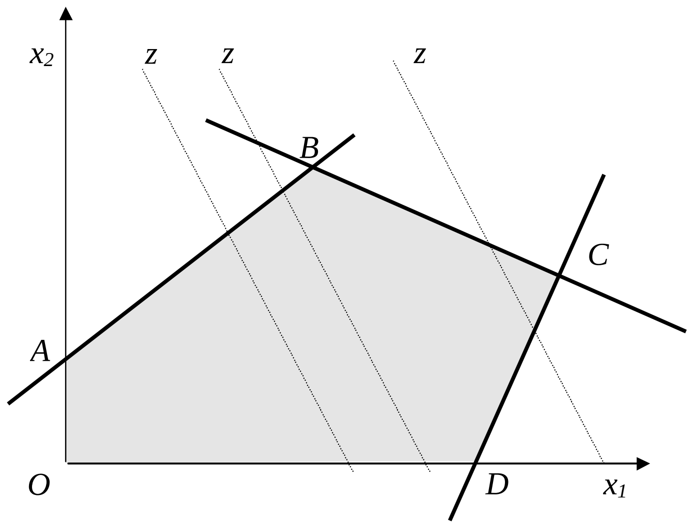
La función objetivo

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

representa un conjunto de rectas al variar z, todas ellas paralelas y cuya intersección con el conjunto convexo de soluciones representan puntos que corresponden cada uno de ellos a un determinado valor de z.

En la figura, la zona sombreada representa el convexo de soluciones y las rectas z las correspondientes a la función objetivo.

Al encontrarse el óptimo en uno de los extremos O, A, B, C, D del poliedro convexo de las restricciones basta con hallar los valores de z en cada punto y el óptimo (máximo o mínimo) será el buscado.

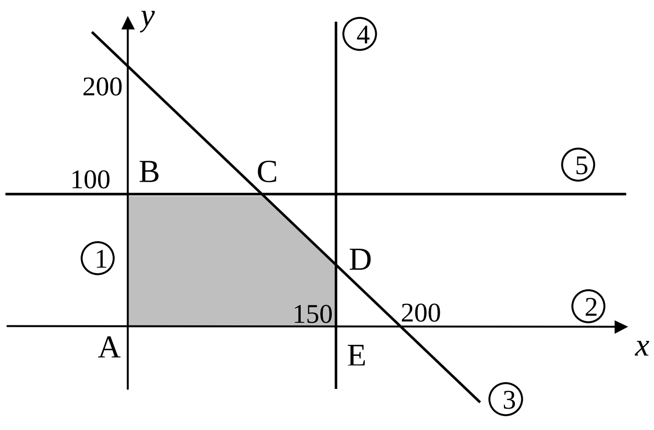


Ejemplo:

Maximizar la función $z = 2x + y$ sujeta a las condiciones:

$$\begin{cases} 1) & x \geq 0 \\ 2) & y \geq 0 \\ 3) & x + y \leq 200 \\ 4) & x \leq 150 \\ 5) & y \leq 100 \end{cases}$$

1. Buscamos el convexo de soluciones del sistema de desigualdades dado:



2. A continuación buscaremos los cinco vértices de la poligonal que delimita nuestro recinto; cada uno de ellos resulta de las intersecciones de un par de lados de la poligonal; así A se obtiene de la intersección de ① y ②; B se obtiene de ① y ⑤; C resulta de ③ y ⑤; D resulta de intersecar ③ y ④ y finalmente E se obtiene de intersecar ② y ④, con lo que se obtiene:

A(0, 0); B(0, 100); C(100, 100); D(150, 50); E(150, 0)

Nuestro problema concreto ahora es determinar para que punto del interior, o de la frontera, del convexo de soluciones se alcanza el óptimo y cuánto vale éste. Para resolver esta situación:

3. Construimos una tabla de valores en la que calculamos para las coordenadas de los vértices pertenecientes al convexo de soluciones, los valores de la función objetivo; procuraremos con esto desarrollar un criterio de cálculo que nos permita elegir el punto para el cual la función objetivo alcanza su valor máximo.

Vértice	$z = 2x + y$
A(0, 0)	0
B(0, 100)	100
C(100, 100)	300
D(150, 150)	350
E(150, 0)	300

4º Observamos que el máximo valor alcanzado para z es $z = 350$ y las coordenadas para las cuales se alcanza dicho valor máximo corresponden al vértice D(150, 50).

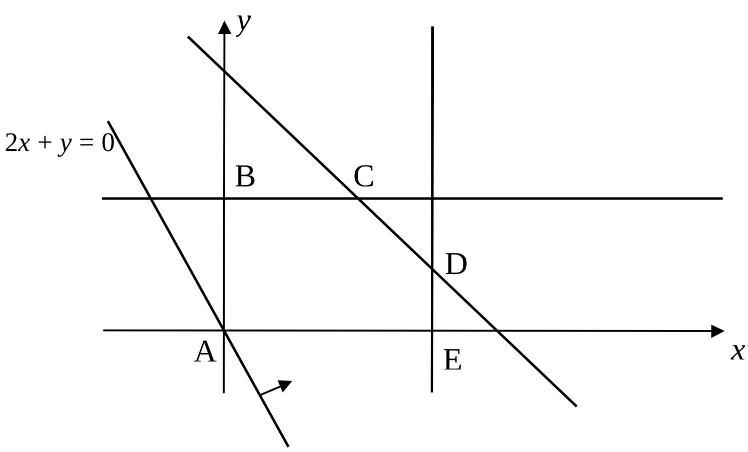
Si una función objetivo alcanza un máximo (o un mínimo), lo hace en alguno de los vértices del convexo solución.

Esto nos indica que no hace falta que especifiquemos en la función objetivo las coordenadas de puntos que no son vértices del convexo, pues tales puntos nunca podrán optimizar dicha función.

Buscamos ahora un método para determinar el vértice en el que se alcanza el máximo, sin recurrir al reconocimiento analítico precedente. La teoría de la convexidad nos proporciona el criterio gráfico para lograr tal reconocimiento.

Debemos graficar la recta que resulta de hacer, en la función objetivo, la sustitución de z por un valor numérico arbitrario.

Así pues si hacemos $z = 0$, obtendremos la recta $2x + y = 0$ cuya representación gráfica agregamos a la de la solución del sistema de inecuaciones.



La recta $2x + y = 0$, que contiene el vértice A del convexo de soluciones, deja a éste en un mismo semiplano respecto a dicha recta tomada como frontera. Desde su posición inicial desplazaremos la recta paralelamente a si misma en el sentido indicado por la flecha que es el de barrido del convexo de soluciones; en su traslación, la recta alcanza los distintos vértices B, C, E y finalmente D. Pero B, C y E no pueden corresponder a la posición en que la función alcanza el máximo, pues el convexo no queda incluido en su totalidad en un mismo semiplano respecto de la recta $2x + y = 0$ tomada como frontera. D es el vértice para el que se cumple la inclusión del convexo en el semiplano inferior respecto a dicha recta. Por tanto, en D se alcanza el máximo de la función objetivo.

> La condición necesaria para que una función objetivo pueda optimizarse en un cierto vértice V, es que todo el convexo de soluciones quede incluido en el mismo semiplano respecto de la recta representativa de dicha función que pasa por dicho vértice.

Si gráficamente vemos que existen dos vértices, A y D que cumplen que la recta $2x + y = c$ que pasa por ellos, deja al convexo en el mismo semiplano, sin embargo, de los dos, solo uno cumple con la condición de maximizar la función, ocurriendo pues que hay vértices para los que se cumple la condición de inclusión, pero que no optimizan la función.

> El sentido correcto de desplazamiento de la recta representativa de la función objetivo es el que corresponde al aumento de su valor, cuando dicha función debe ser maximizada, o aquel en que disminuye, cuando debe ser minimizada.

> Si una función objetivo alcanza su óptimo valor en dos vértices del convexo, también los alcanzará en los infinitos puntos que son combinación convexa de los anteriores.

b) Método del Símplex

El método del Símplex es un procedimiento que selecciona de manera ordenada, de entre las soluciones posibles un conjunto que converge en la solución óptima. Mediante este procedimiento, partiendo de una solución posible básica y en un número finito de iteraciones, se alcanza la solución óptima. (*ver ejemplo*)

Capítulo 9. El Espacio Euclídeo

Conocimientos previos:

- **Concepto de espacio vectorial**
- **Coordenadas de un vector respecto a una base**
- **Concepto de Espacio Afín**
- **Rectas y planos**
- **Intersección de planos**
- **Cálculo de determinantes**

Producto escalar

Sea *V* un espacio vectorial sobre R. Una aplicación $f : V \times V \to \mathrm{R}$ definida $f(u,v) = u \cdot v$, se llama **producto escalar** si verifica:

1. $\overline{u} \cdot \overline{u} \geq 0\,,\ \ \forall \overline{u} \in V$ y $\overline{u} \cdot \overline{u} = \overline{0} \iff \overline{u} = 0$
2. $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}\,,\ \ \forall \overline{u}, \overline{v} \in V$
3. $(\lambda \overline{u}) \cdot \overline{v} = \lambda(\overline{u} \cdot \overline{v}),\ \ \forall \lambda \in R,\ \ \forall \overline{u}, \overline{v} \in V$
4. $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$

Sea $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\overline{v} = (v_1, \overline{v}_2, \ldots, v_n)$ dos vectores que necesariamente deben tener el mismo número de componentes, el producto escalar de $\overline{u}$ y $\overline{v}$ es un escalar y su valor viene dado por:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Nótese que no existe una ley asociativa del producto escalar. La expresión $(\overline{u} \cdot \overline{v}) \cdot \overline{w} = \overline{u} \cdot (\overline{v} \cdot \overline{w})$ no tiene sentido porque ninguno de los dos lados de la ecuación están definidos, ya que $(\overline{u} \cdot \overline{v})$ y $(\overline{v} \cdot \overline{w})$ son escalares.

Espacio euclídeo

Un **espacio euclídeo** es un espacio vectorial provisto de un producto escalar (se llama también “**Espacio vectorial euclídeo**”).

Un espacio afín provisto de un producto escalar se llama “**Espacio afín euclídeo**”. Generalizando le llamaremos espacio euclídeo a este último.

En un espacio euclídeo *E* se define:

Norma de un vector como la raíz cuadrada del producto escalar del vector por si mismo

$$\overline{u} \in E\ ;\ \|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}$$

Se denota E_2 el espacio euclídeo de los vectores libres del plano con producto escalar definido de la siguiente forma:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}|\,|\overline{v}| \cos(\overline{u}, \overline{v})$$

Análogamente, E_3 es el espacio euclídeo de los vectores libres del espacio de tres dimensiones con el mismo producto escalar.

En E_2 y E_3, la norma de un vector coincide con su módulo

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}} = \sqrt{|\overline{u}| \cdot |\overline{u}| \cos 0^{\circ}} = |\overline{u}|$$

Se verifica:

$$|\overline{u} + \overline{v}| \leq |\overline{u}| + |\overline{v}| \quad \text{(desigualdad triangular)}$$

$$|\overline{u} \cdot \overline{v}| \leq |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \quad \text{(desigualdad de Schwartz)}$$

Ortogonalidad

En un espacio euclídeo, dos vectores $\overline{u}, \overline{v}$ se dicen **ortogonales** $(\overline{u} \perp \overline{v})$ cuando su producto escalar es cero.

$$\overline{u} \perp \overline{v} \Leftrightarrow \overline{u} \cdot \overline{v} = 0$$

En E_2 y E_3, dos vectores no nulos son ortogonales si son perpendiculares

$$\overline{u} \perp \overline{v} \Leftrightarrow \overline{u} \cdot \overline{v} = 0 \Rightarrow |\overline{u}|\,|\overline{v}| \cos(\overline{u}, \overline{v}) = 0 \Rightarrow \cos(\overline{u}, \overline{v}) = 0 \;\Rightarrow\; \overline{u} \text{ perpendicular a } \overline{v}$$

Una base vectorial $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ se dice:

Ortogonal $\Leftrightarrow$ $u_i \perp u_j$, $i \neq j$

Ortonormal $\Leftrightarrow$ Ortogonal y $|\overline{u}_i| = 1, \quad \forall i$

Una referencia afín $R = \{0, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ en E_3 en que la base vectorial $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ es ortogonal, se dice referencia ortonormal.

En E_3 la base ortonormal se denota $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. En ella, el producto escalar de dos vectores que tienen de coordenadas $\overline{u} = (x_1, x_2, x_3)$; $\overline{v} = (y_1, y_2, y_3)$ es

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

y el módulo de un vector $\overline{u} = (x_1, x_2, x_3)$

$$|\overline{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

El vector unitario (de módulo unidad), de la misma dirección que el $\overline{u}$, se obtiene dividiendo cada coordenada por el módulo de $\overline{u}$.

Así, si $\overline{u} = (x_1, x_2, x_3)$; el unitario de la misma dirección es:

$$\left[\frac{x_1}{|\overline{u}|}, \frac{x_2}{|\overline{u}|}, \frac{x_3}{|\overline{u}|}\right]$$

Análogamente sería en E_2.

Orientación de una referencia en E_3

En E_3 una referencia $R = \{0, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ ortonormal es de dirección positiva si

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} > 0$$

donde (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}) son las coordenadas del vector u_i en la base ortonormal usual $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

De otra forma $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ es de orientación positiva si la dirección de $\overline{u}_3$ es la de avance de un sacacorchos que se mueve de $\overline{u}_1$ a $\overline{u}_2$.

Producto vectorial

En el espacio euclídeo E_3 se llama producto vectorial de dos vectores $\overline{u}$, $\overline{v}$ la aplicación:

$$f : \mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$$

definida $f(\overline{u}, \overline{v}) = \overline{u} \times \overline{v}$ tal que:

1º $\overline{u} \times \overline{v} = |\overline{u}|\,|\overline{v}|\operatorname{sen}(\overline{u}, \overline{v})$.

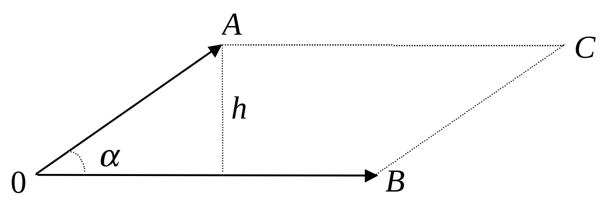
2º $\overline{u} \times \overline{v}$ perpendicular a ambos. Y por tanto, perpendicular al plano determinado por ambos vectores.

3º Si $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v}\}$ es libre, es de orientación positiva.

Además verifica:

1. $\overline{u} \times \overline{u} = \overline{0}(\alpha\overline{u}) \times \overline{v}$
2. $(\alpha\overline{u}) \times \overline{v} = \alpha(\overline{u} \times \overline{v}) = \overline{u} \times (\alpha\overline{v})$
3. Si $\overline{v} = \alpha\overline{u} \Rightarrow \overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$
4. $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} \times \overline{v}) + (\overline{u} \times \overline{v})$

Geométricamente, el módulo del producto vectorial de dos vectores, es el área del paralelogramo construido sobre ellos



ya que:

$$\overline{u} \times \overline{v} = |\overline{u}|\,|\overline{v}|\operatorname{sen}\alpha = |\overline{u}| \cdot h \text{ = área del paralelogramo } 0ACB$$

Si $\overline{u} = (x_1, x_2, x_3)$; $\overline{v} = (y_1, y_2, y_3)$ en la base $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ es:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Vector dirección de una recta expresada como intersección de planos

Si la recta r viene expresada como intersección de los planos π_1 y π_2; la dirección de r es el producto vectorial de la dirección de ambos planos.

$$\overline{d}_r = \overline{d}_{\pi_1} \times \overline{d}_{\pi_2}$$

Producto mixto de tres vectores

En E_3, se define producto mixto de tres vectores $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ como el producto escalar de $\overline{u}$ por el vectorial de $\overline{v}$ y $\overline{w}$. Se denota $[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}]$.

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = \overline{u} \cdot (\overline{v} \times \overline{w})$$

Si en $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ son $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

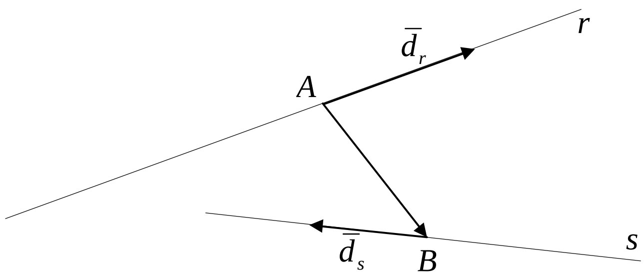
Sus propiedades fundamentales:

1. $[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = -[\overline{u}, \overline{w}, \overline{v}] = [\overline{v}, \overline{w}, \overline{u}] = \ldots$
2. $[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = 0$ si $\overline{u} = \overline{0}$, $\overline{v} = \overline{0}$, ó $\overline{w} = \overline{0}$
3. $[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}_1 + \overline{w}_2] = [\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}_1] + [\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}_2]$
4. $[\overline{u}, \overline{v}, \alpha\overline{w}] = \alpha[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}]$
5. Tres vectores son coplanarios si, y solo si, su producto mixto es cero.

Condición para que dos rectas se corten en E_3

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas en E_3 se corten es que el producto mixto de los vectores de dirección de ambas y un vector que una dos puntos cualesquiera de ellas, sea cero

r corta a s $\Leftrightarrow$ $[\bar{d}_r, \bar{d}_s, \overline{AB}]$, donde $A \in r$, $B \in s$



Aplicaciones geométricas

1. **Distancias**

a) Entre dos puntos: $P = (x_1, x_2, x_3)$; $Q = (y_1, y_2, y_3)$, la distancia es el módulo del vector que determinan; por lo tanto, resulta

$$d(P,Q) = |\overline{PQ}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

b) Entre un punto y una recta: $P = (x_1, x_2, x_3)$; y recta de dirección $\bar{d}_r$

$$d(P, r) = \frac{|\overline{AP} \times \bar{d}_r|}{|\bar{d}_r|} \quad \text{donde } A \in r$$

c) Entre un punto y un plano: $P = (x_1, x_2, x_3)$; $\pi \equiv Ax + By + Cz + D$

$$d(P,\,\pi) = \frac{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D}{|\overline{d}_n|}$$

d) <u>Entre dos rectas que se cruzan</u>:

$$d(r,\,s) = \frac{[\overline{d}_r,\,\overline{d}_s,\,\overline{AB}]}{|\overline{d}_r \times \overline{d}_s|};\quad \text{donde } A \in r,\ B \in s$$

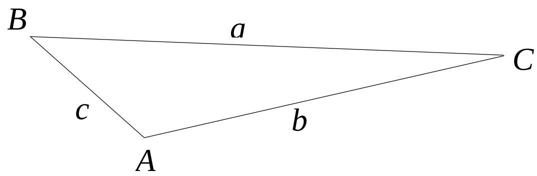
2. Ángulo de dos vectores

Sean $\overline{u}$ y $\overline{v}$ dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces

$$cos\varphi = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{u}|\,|\overline{v}|}$$

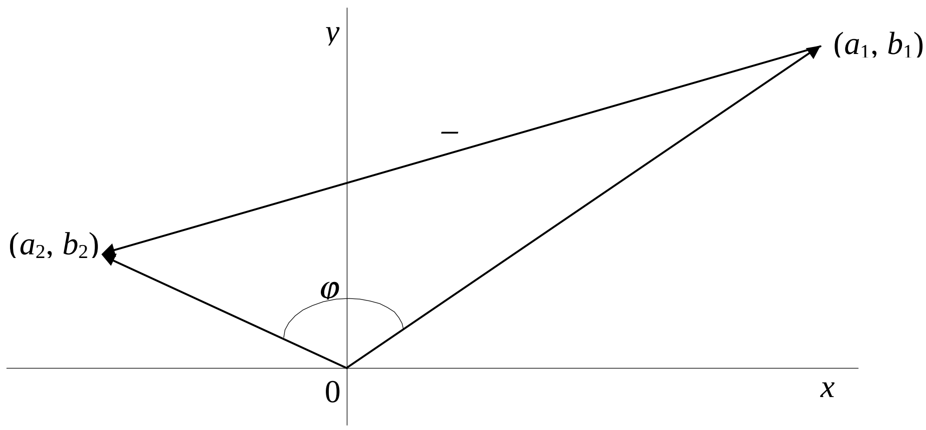
Demostración:

Según la ley de los cosenos, en el triángulo de la figura



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$$

Ahora se colocan las representaciones de y con sus puntos iniciales en el origen de modo que $\overline{u} = (a_1,\,b_1)$ y $\overline{v} = (a_2,\,b_2)$.



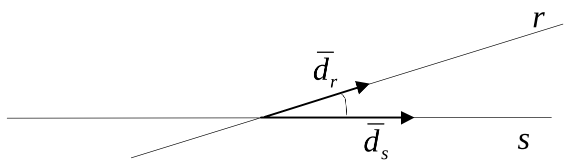
Entonces, por la ley de los cosenos, $|\overline{v}-\overline{u}|^2 = |\overline{v}|^2 + |\overline{u}|^2 - 2|\overline{v}|\,|\overline{u}|\cos\varphi$. Pero, por otra parte

$$|\overline{v}-\overline{u}|^2 = (\overline{v}-\overline{u})\cdot(\overline{v}-\overline{u}) = \overline{v}\cdot\overline{v} - 2\overline{v}\cdot\overline{u} + \overline{u}\cdot\overline{u} = |\overline{v}|^2 - 2\overline{v}\cdot\overline{u} + |\overline{u}|^2$$

Así, después de simplificar, se obtiene $-2\overline{v}\cdot\overline{u} = -2|\overline{v}|\,|\overline{u}|\cos\varphi$, de donde sigue la obtención de la formula del ángulo formado por los dos vectores.

a) <u>Ángulo de dos rectas *r* y *s*</u>, con vectores directores (u_1, v_1, w_1) y (u_2, v_2, w_2) respectivamente, es el mismo que determinan sus vectores directores, luego resulta:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{d}_r \cdot \overline{d}_s}{|\overline{d}_r|\cdot|\overline{d}_s|} = \frac{u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}}$$



b) <u>Ángulo de recta *r* y plano *π*</u>.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\overline{d}_r \cdot \overline{d}_\pi}{|\overline{d}_r|\cdot|\overline{d}_\pi|}$$

c) <u>Ángulo de dos planos</u>: El de sus vectores de dirección.

d) Vectores paralelos en $\mathbb{R}^2$: Dos vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ diferentes de cero, son paralelos si el ángulo entre ellos es cero ó *π*. Adviértase que los vectores paralelos pueden tener direcciones iguales u opuestas.

e) Vectores ortogonales en $\mathbb{R}^2$: A los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ diferentes de cero, se les llama ortogonales (o perpendiculares) si el ángulo entre ellos es *π*/2.

Los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ diferentes de cero, son ortogonales si y solo si $\overline{u}\cdot\overline{v} = 0$.

Sea $\overline{v}$ un vector diferente de cero. Entonces, si $\overline{u}$ es un vector cualquiera, el vector

$$\overline{w} = \overline{u} - \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\overline{v}$$

es ortogonal a $\overline{v}$, como se demuestra en el siguiente desarrollo:

$$\cdot \quad = \overline{w}\cdot\overline{v} = \left[\overline{u} - \frac{(\overline{u}\cdot\overline{v})\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\right]\cdot\overline{v} =$$

$$\overline{u}\cdot\overline{v} - \frac{(\overline{u}\cdot\overline{v})(\overline{v}\cdot\overline{v})}{|\overline{v}|^2} = \overline{u}\cdot\overline{v} - \frac{(\overline{u}\cdot\overline{v})|\overline{v}|^2}{|\overline{v}|^2} = \overline{u}\cdot\overline{v} - \overline{u}\cdot\overline{v} = 0$$

f) Proyección en $\mathbb{R}^2$: Sea $\overline{u}$ y $\overline{v}$ vectores diferentes de cero. Entonces la proyección de $\overline{u}$ sobre $\overline{v}$ es un vector, denotado por $proy_v\,\overline{u}$, que se define por

$$proy_v\,\overline{u} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\overline{v}$$

La componente de $\overline{u}$ en la dirección de $\overline{v}$ es $\dfrac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|}$

g) Dirección de un vector $\overline{v}$ = (x, y, z) diferente de cero en $\mathbb{R}^3$ se define como un vector unitario $\overline{u} = \dfrac{\overline{v}}{|\overline{v}|}$.

De cualquier manera, resulta conveniente definir la dirección de un vector en términos de ciertos ángulos. Se definen α como el ángulo entre $\overline{v}$ y la parte positiva del eje x, β como el ángulo entre $\overline{v}$ y la parte positiva del eje y y γ como el ángulo entre $\overline{v}$ y la parte positiva del eje z. Los ángulos α, β y γ reciben el nombre de **ángulos de dirección** o **ángulos directores** del vector. Y su valor se puede calcular mediante las siguientes fórmulas:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{v}|} \quad \cos\beta = \frac{y}{|\overline{v}|} \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{v}|}$$

Los cosenos de estos ángulos reciben el nombre genérico de **cosenos directores** del vector $\overline{v}$ y satisfacen la igualdad:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{|\overline{v}|^2} = 1$$

3. Áreas y volúmenes

a) Área del triángulo de vértices A, B, C.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

b) Volumen de un paralelepípedo de lados concurrentes AB, AC y AD.

$$\text{Volumen} = [\,\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\,]$$

c) Volumen de un tetraedro de vértices A, B, C, D.

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}[\,\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\,]$$