1) El 28 de noviembre de 1963, EE.UU. lanzó el Explorer 18. Sus puntos más alto y más bajo sobre la superficie de la Tierra fueron 119 millas y 122000 millas. El centro de la Tierra es el foco de la órbita. Hallar la ecuación en polares de la órbita $r = f(\alpha)$ y la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\alpha = 60^\circ$. (Suponer que el radio de la Tierra es 4000 millas y que el foco mencionado es el izquierdo).

Solución

2a = 119mi + 122000mi + 2(4000mi) , a = 65059.5 millas, c = 122000mi + 4000mi – a = 126000mi – 65059.5mi, c = 60940.5 millas, excentricidad = c/a= e = 0.94

La directriz está a la izquierda del polo y la ecuación en polares de la órbita del satélite debe tener una ecuación del siguiente tipo:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha}$$

$$p = b^2/a = \frac{(a^2 - c^2)}{a} = 518994000/a = 7977.22$$

Ecuación: $r = f(\alpha) = \dfrac{p}{1 - e\cos\alpha} = \dfrac{7977.22}{1 - 0.94\cos\alpha}$

$$r = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7977.22}{1 - 0.94\cos\frac{\pi}{3}} = 15051.34 \text{ millas}$$

Distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite es:{ $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ – radio de la Tierra}.

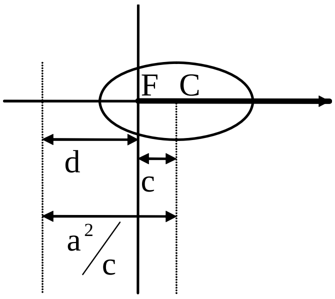
Distancia = 15051.34mi – 4000mi = 11051.36 millas.

La ecuación en coordenadas polares de la órbita del satélite es: $r = \dfrac{7977.22}{1 - 0.94\cos\alpha}$

La distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\alpha = 60^\circ$ es de 11051.36 millas.

2) El cometa Halley describe una orbita elíptica de excentricidad e ≈ 0.97. la longitud del eje mayor de la órbita es, aproximadamente, 36.18 unidades astronómicas (una u.a., distancia media entre la Tierra y el Sol, es ≈ 93 millones de millas). Hallar una ecuación en polares para la órbita ¿Cuánto se acerca el cometa Halley al Sol?

Solución:



$e = 0.97 = \frac{c}{a}$, $2a = 36.18$ u.a. $\Rightarrow$ $a = 18.09$ u.a.

Tomamos una referencia polar de tipo1 y la ecuación de la cónica sería de la forma:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{ed}{1 - e\cos\alpha}$$

$d = \frac{a^2}{c} - c$; $c = a\,.\,e = 17.5473 \Rightarrow d = 1.1022 \Rightarrow$

$p = d\,.\,e = 1.0691189$. Luego, una ecuación en polares para la órbita es:

$$r = \frac{1.0691}{1 - 0.97\cos\alpha}$$

La distancia mínima entre el cometa Halley y el Sol es el valor de "r" mínimo, que se obtiene cuando el denominador $1 - 0.97\cos\alpha$ es máximo, es decir, para $\cos\alpha = -1$:

$$r = \frac{1.0691}{1 + 0.97} \approx 0.5427 \text{ u.a.}$$

3) Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama derecha suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco derecho de la hipérbola.

b) en el foco izquierdo de la hipérbola.

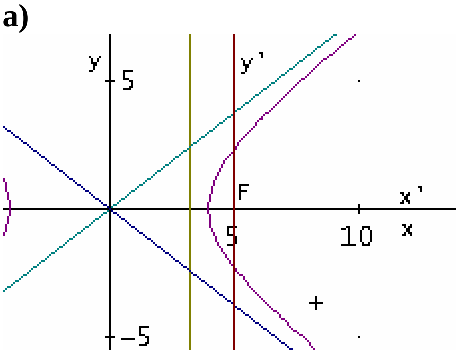
En el caso a), hallar la ecuación polar de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 4,\ b = 3 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$.

Por tanto, $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$, $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$, $d = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5}$.

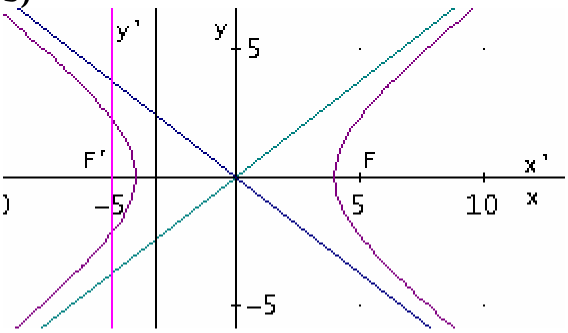
a)



La directriz es la recta $x = c - d = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$.

La ecuación, en este caso, es: $r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{9/4}{1 - 5/4\,\cos\alpha} = \frac{9}{4 - 5\cos\alpha}$.

b)



La directriz es la recta $x = -c + d = -\frac{a^2}{c} = -\frac{16}{5}$

.

La ecuación que se debe emplear ahora es:

$$r = \frac{-p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{-9/4}{1 - 5/4\cos\alpha} = \frac{-9}{4 - 5\cos\alpha}\ .$$

Directrices en el caso a):

$$\text{dir} \equiv x` = -(c - \frac{a^2}{c}) = -\frac{9}{5} \Rightarrow r\cos\alpha = -\frac{9}{5} \Rightarrow r = -\frac{9}{5\cos\alpha}$$

$$\text{dir}` \equiv x` = -(c + \frac{a^2}{c}) = -\frac{41}{5} \Rightarrow r\cos\alpha = -\frac{41}{5} \Rightarrow r = -\frac{41}{5\cos\alpha}$$

Asíntotas en el caso a):

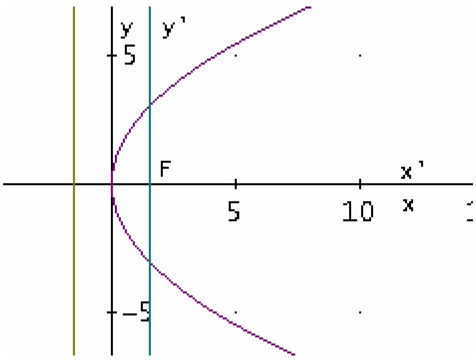
Son rectas que pasan por O(0,0) en la referencia x y ó bien O(-c, 0) = (-5, 0) en la x`y`, y tienen de pendiente $\pm\frac{b}{a} = \pm\frac{3}{4}$, luego su ecuación es: $y`-0 = \pm\frac{3}{4}(x`+5)$.

Pasando a polares:

$$r\text{sen}\alpha = \pm\frac{3}{4}(r\cos\alpha + 5) \Rightarrow r = \frac{15/4}{\text{sen}\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha},\ \ r = \frac{-15/4}{\text{sen}\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha}$$

4) Dada la parábola de ecuación $y^2 = 6x$, hallar su ecuación polar suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el foco de la parábola.

Solución:



$y^2 = 6x = 2px \Rightarrow p = 3\ ;\ e = 1$.

La ecuación adecuada es:

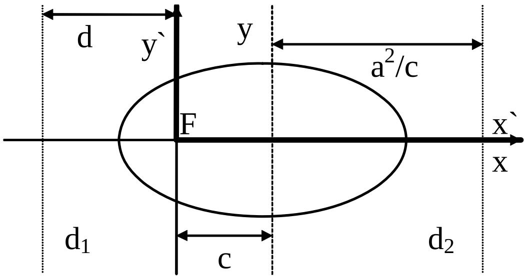
$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{3}{1 - \cos\alpha}\ .$$

5) Verificar que la ecuación $r = \frac{21}{5 - 2\cos\alpha}$ determina una elipse y hallar los semiejes y las ecuaciones polares de sus directrices.

Solución:

$$r = \frac{21}{5 - 2\cos\alpha} = \frac{21/5}{1 - 2/5\cos\alpha} \Rightarrow p = \frac{21}{5},\ \ e = \frac{2}{5}$$

Por ser e < 1, se trata efectivamente de una *elipse*; y, por la forma de la ecuación, un foco está en el polo, la directriz no corta al eje polar y la cónica y el foco están en el mismo semiplano respecto de la directriz.



$$p = de \Rightarrow d = \frac{p}{e} = \frac{21/5}{2/5} = \frac{21}{2}\ .$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} = 5\ ,\quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{21}\ .$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 21 = 4 \Rightarrow c = 2\ .$$

La directriz d_1 tiene de ecuación:

$$x` = -d = -\frac{21}{2} \Rightarrow r\cos\alpha = -\frac{21}{2} \Rightarrow d_1 \equiv r = -\frac{21}{2\cos\alpha}\ .$$

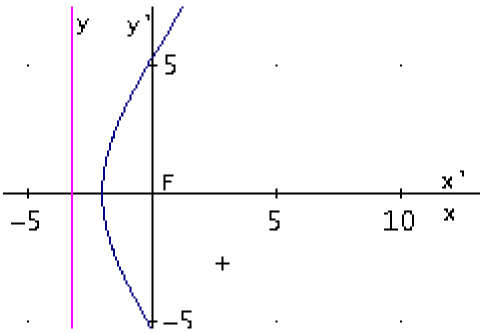
La otra directriz d_2 tiene de ecuación:

$$x` = c + \frac{a^2}{c} = 2 + \frac{25}{2} = \frac{29}{2} \Rightarrow r\cos\alpha = \frac{29}{2} \Rightarrow d_2 \equiv r = \frac{29}{2\cos\alpha}$$

6) Verificar que la ecuación $r = \dfrac{16}{3-5\cos\alpha}$ determina la rama derecha de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$$r = \frac{16}{3-5\cos\alpha} = \frac{16/3}{1-5/3\cos\alpha} \Rightarrow p = \frac{16}{3},\ e = \frac{5}{3}\ .$$



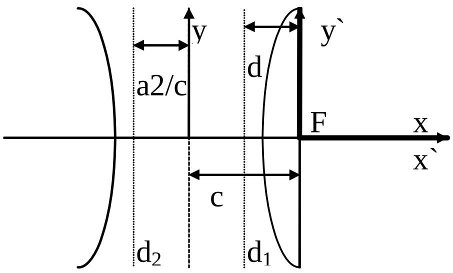
Por ser e > 1, se trata de una rama de una hipérbola. A la vista de la ecuación, la cónica y el foco están del mismo lado respecto de la directriz y el eje polar no corta a dicha recta, luego, la situación es la siguiente:

Así pues, se trata de la rama derecha de una hipérbola.

$$d = \frac{p}{e} = \frac{16}{5}\ ,\quad a = \frac{p}{e^2-1} = 3\ ,\quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} = 4\ .$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5\ .$$

Las ecuaciones polares de las directrices se hallan de forma análoga a como se hizo en el problema anterior, obteniéndose:



$$d_1 \equiv r = -\frac{16}{5\cos\alpha}\ ,\ d_2 \equiv r = -\frac{34}{5\cos\alpha}\ .$$

Las ecuaciones de las asíntotas respecto al sistema de referencia x , y (de origen el centro de la cónica, y de ejes los de la cónica) son: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Los nuevos ejes son ahora: $\begin{cases} x` = x - 5 \\ y` = y \end{cases}$

Respecto a estos nuevos ejes, las ecuaciones cartesianas de las asíntotas son, por tanto:

$y` = \pm\frac{4}{3}(x`+5)$.

Por consiguiente, las ecuaciones polares de estas rectas son:

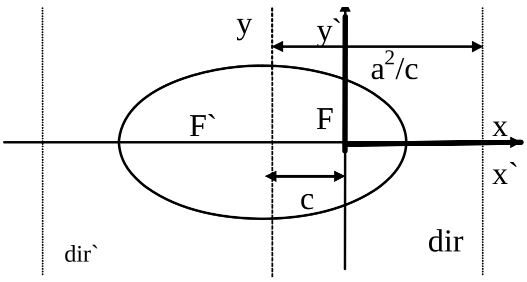
$r\,\text{sen}\alpha = \pm\frac{4}{3}(r\cos\alpha - 5)$; es decir, operando para cada uno de los signos se obtiene:

$$r = \frac{20}{3\,\text{sen}\alpha - 4\cos\alpha} \quad , \; r = \frac{-20}{4\cos\alpha + 3\,\text{sen}\alpha}$$

7) Una elipse de excentricidad $e = \frac{1}{4}$ tiene un foco F en el origen (polo) y su directriz correspondiente tiene de ecuación polar $r\cos\alpha = 8$. Sabiendo que el eje polar es OX^+, se pide:

- **a)** Hallar las coordenadas del otro foco F'.
- **b)** La ecuación polar de la elipse
- **c)** Dibujar la elipse

Solución:



De la ecuación de la directriz:

$$r = \frac{8}{\cos\alpha} \Leftrightarrow x` = 8$$

se deduce que la directriz está a la derecha del foco F (polo); por tanto, el eje polar corta a la directriz y la cónica y el foco están en el mismo semiplano (izquierdo) respecto de la misma.

Debe usarse una ecuación del tipo 3: $r = \frac{p}{1 + e\cos\alpha}$

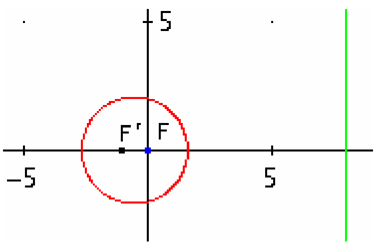
a) Las coordenadas polares del otro foco serán: F`(r = 2c, $\alpha = \pi$). Hallemos c:

$$e = \frac{1}{4} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 4c \text{, luego } 8 = \frac{a^2}{c} - c = \frac{16c^2}{c} - c = 15c \Rightarrow c = \frac{8}{15}.$$

Por tanto, : F`($r = 2\frac{8}{15} = \frac{16}{5}$, $\alpha = \pi$).

b) $p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{(4c)^2 - c^2}{4c} = 2 \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos\alpha} = \frac{2}{1 + \frac{1}{4}\cos\alpha}$

c)



Ejercicios propuestos

1) Determinar las cónicas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

a) $r = \dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\alpha}$ **b)** $r = \dfrac{6}{1-\cos\alpha}$ **c)** $r = \dfrac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\alpha}$

d) $r = \dfrac{12}{2-\cos\alpha}$ **e)** $r = \dfrac{5}{3-4\cos\alpha}$ **f)** $r = \dfrac{1}{3-3\cos\alpha}$

Solución:
a) Elipse **b)** Parábola **c)** Una rama de una hipérbola **d)** Elipse **e)** Una rama de una hipérbola **f)** Parábola.

2) Dada la ecuación de la hipérbola $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{144}=1$, hallar la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco izquierdo de la hipérbola;
b) en el foco derecho.

Solución:
a) $r = \dfrac{144}{5+13\cos\alpha}$ **b)** $r = -\dfrac{144}{5+13\cos\alpha}$

3) Hallar en la elipse $r = \dfrac{12}{3-\sqrt{2}\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 6.

Solución:
$\left(6,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(6,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$

4) Hallar en la hipérbola $\rho = \dfrac{15}{3-4\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 3.

Solución:
$\left(3,\ 2\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(6,\ -2\dfrac{\pi}{3}\right)$.

5) Hallar en la parábola $r = \dfrac{p}{1-\cos\alpha}$ los puntos :

a) cuyos radios polares sean mínimos.
b) cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

Solución:
a) $\left(\dfrac{p}{2},\pi\right)$, **b)** $\left(\dfrac{\pi}{2},p\right)$, $\left(p,-\dfrac{\pi}{2}\right)$