Tema 3

Derivadas Parciales y Derivadas Direccionales

En este tema y en el siguiente presentaremos los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial para funciones de varias variables.

Comenzaremos con las definiciones y cálculos de las derivadas parciales y direccionales, presentándose el concepto de diferenciabilidad, más complejo que el correspondiente al Cálculo en una variable real, en el tema próximo.

3.1 Derivadas Parciales

Presentaremos en primer lugar la definición de derivadas parciales para una función escalar de dos variables.

Sea $f(x, y)$ una función escalar de dos variables reales definida al menos en un entorno del punto (x_0, y_0). Se define la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0) como el siguiente límite (si existe):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

De manera análoga, definiremos la derivada parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

De estas definiciones se deduce fácilmente que el cálculo efectivo de una derivada parcial con respecto a a una variable es idéntico al de las derivadas ordinarias, sin más que considerar el resto de las variables involucradas como constantes.

Desde el punto de vista geométrico, y teniendo en cuenta que la gráfica de una función $f(x, y)$ se visualiza como la superficie de ecuación: $z = f(x, y)$, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$

y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en (x_0, y_0) representan las pendientes de las rectas tangentes a las curvas intersección entre dicha superficie y los planos $y = y_0$ y $x = x_0$, respectivamente, en el punto (x_0, y_0, z_0), siendo $z_0 = f(x_0, y_0)$.
De esta manera, si las derivadas parciales existen en el punto, la ecuación del plano tangente[1] sería:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

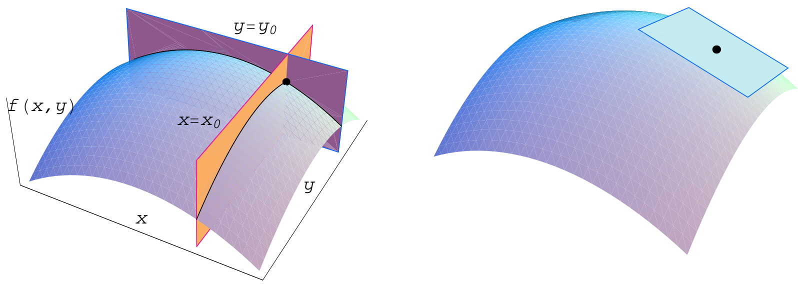
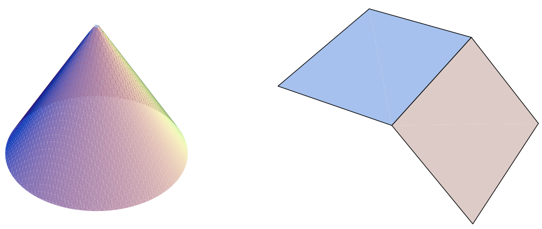


Figura 1: (izquierda) Curvas sobre la superficie $z = f(x, y)$, obtenidas al cortarla con los planos $x = x_0$ e $y = y_0$. (derecha) Plano tangente a la superficie en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Como vemos, la derivabilidad de una función $f(x, y)$ se va a relacionar de manera directa con la existencia y "correcto" comportamiento del plano tangente a su gráfica. Resulta evidente, en cualquier caso, que para superficies del tipo a las presentadas en la siguiente figura (con "picos", o "dobleces", el plano tangente no estará bien definido).



Generalicemos la definición de derivada parcial al caso de n variables:

Definición: Sea $f(\vec{x})$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una función escalar de n variables reales, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, definida al menos en un entorno[2] de $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Se define la derivada parcial de f con respecto a x_j en $\vec{x}_0$ como el límite (si existe):

[1]Suponiendo que dicho plano existe y que esté bien definido, lo cual no siempre es cierto, aunque las derivadas parciales sí que existan. Aclararemos estas ideas en el próximo tema.

[2]Recordemos que un entorno de un punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es todo conjunto abierto que contenga una bola abierta centrada en $\vec{x}_0$, es decir: $U \supset B_r(\vec{x}_0)$, con:

$$B_r(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{u}_j) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

donde $\vec{u}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ denota al vector j-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Si denotamos: $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, podemos escribir, de forma explícita:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_j^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h}$$

Una vez definida la derivada parcial en un punto, es directo definir la función derivada parcial:

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, se define la función derivada parcial respecto de la variable i-ésima $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $D_{x_i} f$ o f_{x_i}, como la función tal que a cada punto $\vec{x}_0 \in U$ le asocia, cuando exista, el valor $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$.

Ejemplo: Calculemos las derivadas parciales de $f(x, y) = 2x^3 y + \cos(xy)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 y - y \operatorname{sen} xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 - x \operatorname{sen} xy$$

Ejemplo: Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie: $z = x^2 + y^3$ en el punto $P \equiv (3, 1, 10)$.

Evidentemente: $f(x, y) = x^2 + y^3$, y $f(3, 1) = 10$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x}(3, 1) = 6 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(3, 1) = 3$$

De esta forma, el plano tangente será:

$$z = 10 + 6(x - 3) + 3(y - 1)$$

3.2 Derivadas direccionales

Teniendo en cuenta la definición anterior, se puede considerar la posibilidad de derivar con respecto a una dirección diferente a las de los ejes coordenados, tenemos entonces el concepto de derivada direccional:

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida al menos en un entorno de $\vec{x}_0$, y sea $\vec{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$ tal que $\|\vec{v}\| = 1$. Se define entonces la derivada direccional de f en la dirección[3] de $\vec{v}$ en el punto $\vec{x}_0 \in \operatorname{Dom} f$ como el límite:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

[3]Se produce aquí un evidente abuso del lenguaje, pues lo correcto sería decir: "en la dirección y sentido de $\vec{v}$".

Alternativamente, esta definición puede escribirse de la siguiente forma, con frecuencia más útil en los cálculos:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) \;=\; \frac{d}{dt}\, f(\vec{x}_0 + t\,\vec{v})\bigg|_{t=0}$$

La equivalencia entre ambas expresiones es trivial si recordamos la definición de derivada ordinaria.

Una vez definido el concepto de derivada direccional, poemod comprobar con facilidad que las derivadas parciales no son más que las derivadas direccionales en la dirección de los vactores $\vec{u}_j$ de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. En particular, para el caso de una función de tres variables $f(x,y,z)$, tendremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_{\vec{i}}f \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = D_{\vec{j}}f \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = D_{\vec{k}}f$$

donde se ha denotado, como es tradicional, por $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo: Encontrar la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2 + y + 1$ en la dirección de $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ en el punto $(0,0)$.

Utilizando la definición de derivada direccional como un límite tendremos:

$$D_{\vec{v}}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f[(0,0) + h(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})] - f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{2} + \frac{h}{\sqrt{2}} + 1 - 1}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Alternativamente, usando la definición como una derivada ordinaria:

$$f[(0,0) + t(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})] \;=\; \frac{t^2}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} + 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} + 1\right) = t + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y así:

$$D_{\vec{v}}f(0,0) \;=\; \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{t=0} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Veremos en el próximo tema cómo es posible calcular las derivadas direccionales de una tercera forma, más fácil y operativa.

3.3 Matriz Jacobiana

Dada una función vectorial $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), ..., f_m(\vec{x}))$, es posible derivar parcialmente (o direccionalmente) dicha función en $\vec{x}_0$ si las correspondientes funciones escalares componentes f_i $(i = 1, 2, ..., m)$ tienen derivadas parciales o direccionales en dicho punto $\vec{x}_0$.

Si existen las derivadas parciales de las funciones componentes de $\vec{f}$ en el punto $\vec{x}_0$, entonces se define la matriz de derivadas parciales o matriz Jacobiana de $\vec{f}$ en el punto $\vec{x}_0$ de la forma siguiente:

$$J(\vec{f})(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_3}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

A veces se utiliza la notación:

$$J(\vec{f})(\vec{x}_0) \equiv D(\vec{f})(\vec{x}_0)$$

Finalmente, se utiliza también el término matriz Jacobiana de $\vec{f}$ para referirse a la "función" matricial $J(\vec{f})$ que asigna de manera directa la matriz $J(\vec{f})(\vec{x})$ a cada punto concreto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo: Calcular la matriz Jacobiana de la función $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + yz^2, \operatorname{sen}(x^2 + y^2))$ en el punto $(1, 1, 1)$.
Las funciones componentes de esta función vectorial son: $f_1(x, y, z) = x^2 + yz^2$, $f_2(x, y, z) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$, y por tanto la matriz Jacobiana de $\vec{f}$ en un punto cualquiera será:

$$J(\vec{f}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & z^2 & 2yz \\ 2x\cos(x^2 + y^2) & 2y\cos(x^2 + y^2) & 0 \end{pmatrix}$$

Para el caso particular del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, tendremos:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2\cos(2) & 2\cos(2) & 0 \end{pmatrix}$$
