Cambio de variable en una integral triple: coordenadas cilíndricas y esféricas

Al igual que en el caso de integrales dobles, en ocasiones un cambio de coordenadas puede facilitar la resolución de una integral triple.

Un cambio de coordenadas cartesianas (x, y, z) a otras coordenadas (u, v, w) es un aplicación biyectiva entre dos recintos D^* y D de $\mathbf{R}^3$ dada por

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Entonces la fórmula de cambio de variable para integrales triples queda:

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\|J\|dudvdw$$

donde $\|J\|$ es el valor absoluto del Jacobiano de la función de cambio de coordenadas.

Cambiaremos coordenadas cartesianas por cualquiera de los siguientes sistemas de coordenadas en $\mathbf{R}^3$:

Cordenadas cilíndricas o polares en el espacio (ρ, θ, z)

Las coordenadas cilíndricas consisten en tomar coordenadas polares (ρ, θ) en cada plano horizontal, es decir para cada valor constante de la coordenada z.

$$\begin{cases} x = \rho \, cos \, \theta \\ y = \rho \, sen \, \theta; \quad (\rho > 0, \ 0 \leq \theta < 2\pi) \\ z = z \end{cases}$$

y entonces $\|J\| = \rho$ y $dxdydz = \rho \cdot dzd\rho d\theta$.

La inversa de este cambio es: $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg(\theta) = y/x \\ z = z \end{cases}$

Ecuaciones de algunas superficies en cartesianas y cilíndricas:

- Cilindro de generatrices paralelas al eje z: $x^2 + y^2 = k^2$ (k constante) $\Leftrightarrow \rho = k$.
- Esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Leftrightarrow \rho^2 + z^2 = r^2$
- Cono: $x^2 + y^2 - k^2z^2 = 0$ (k constante) $\Leftrightarrow \rho^2 - k^2z^2 = 0$
- Paraboloide: $z = k(x^2 + y^2)$ (k constante) $\Leftrightarrow z = k \cdot \rho^2$

Cordenadas esféricas en el espacio (ρ, θ, φ)

Las coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) de un punto del espacio son su módulo ρ y su latitud θ y su altitud φ medidos sobre la esfera de radio ρ.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\ cos\ \varphi cos\, \theta \\ y = \rho\ cos\ \varphi sen\, \theta; \quad (\rho > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ -\pi/2 \le \varphi < \pi/2) \\ z = \rho\ sen\ \varphi \end{array}\right.$$

y entonces $\|J\| = \rho^2 cos\ \varphi$ y $dxdydz = \rho^2 cos\ \varphi \cdot d\rho d\varphi d\theta$.

La inversa de este cambio es: $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ tg(\theta) = y/x \\ sen(\varphi) = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{array}\right.$

Ecuaciones de algunas superficies en cartesianas y esféricas:

- Esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Leftrightarrow \rho = r$
- Esfera de centro $(0, 0, r)$ y radio r: $x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0 \Leftrightarrow \rho = 2r \cdot sen\ \varphi$
- Cono: $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$ (k constante) $\Leftrightarrow tg(\varphi) = 1/k$