FORMULARIO DE VARIABLE COMPLEJA

$z = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$; $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ si y solo si $x_1=x_2$ y $y_1=y_2$.
$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
$(x_1 + iy_1)*(x_2 + iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2) + i(y_1x_2+x_1y_2)$

$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\right), (z \neq 0)$, $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\bar{z} = x - iy$, $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

; $z\bar{z} = |z|^2$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = r \operatorname{cis}\theta$, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$;

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$, $z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$;

$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta + k(360^\circ)}{n}$

$w = f(z)$; $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$e^z = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$; $e^{z+w} = e^z e^w$; $e^z \neq 0$

$|e^z| = e^x$; e^z es periodica ; $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi n i, n \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$; $\cos(-z) = \cos(z)$

$\operatorname{sen}(z \pm w) = \operatorname{sen} z \cos w \pm \cos z \operatorname{sen} w$

$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$

$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$; $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$; $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh}(z)$

$\cosh(-z) = \cosh(z)$

$\operatorname{senh}(z \pm w) = \operatorname{senh} z \cosh w \pm \cosh z \operatorname{senh} w$

$\cosh(z \pm w) = \cosh z \cosh w \pm \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w$

$\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z$; $\cos iz = \cosh z$ $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

$a^b = e^{b\ln a}$. Sea $f : A \subset \mathbf{C}$ con A abierto y $L \in \mathbf{C}$

$\lim_{z\to zo} f(z) = L$ si para toda e>0 existe d > 0 tal que para

$0 < |z - z_0| < \delta$ se tiene que $|f(z) - L| < \varepsilon$. Si $\lim_{z\to zo} f(z)$

existe este es único. Si $\lim_{z\to zo} f(z) = L$ y $\lim_{z\to zo} g(z) = M$,

entonces: $\lim_{z\to zo} f(z) + g(z) = L + M$

$\lim_{z\to zo} f(z)g(z) = LM$ $\lim_{z\to zo}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$

Si f y g son iguales en una vecindad de z_0 excepto en z_0 y $\lim_{z\to zo} f(z) = L$ entonces $\lim_{z\to zo} g(z) = L$

Si f(z)=u(x,y)+iv(x,y), entonces: $\lim_{z\to zo} f(z) = L = L_1 + iL_2$

si y solo si $\lim_{(x,y)\to(xo,yo)} u(x,y) = L_1$ y

$\lim_{(x,y)\to(xo,yo)} v(x,y) = L_2$.

f es continua en z_0 si $\lim_{z\to zo} f(z) = f(z_0)$

Si f y g son continuas en z_0 entonces:
f+g es continua en z_0. fg es continua en z_0
f/g es continua en z_0 siempre que $g(z_0) \neq 0$
f(z)=u(x,y) + iv(x,y) es continua en $z_0=x_0+iy_0$ si y solo si u(x,y) y v(x,y) son continuas en (x_0, y_0).

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

a) f es derivable en z_0 si $f'(z_0)$ existe.
f es derivable en $A\subset\mathbf{C}$ si $f'(z_0)$ existe $\forall z_0 \in A$, en este caso se dice que f es analítica u holomorfa en A.

b. f es analítica en z_0 si f' existe en una vecindad de z_0.
Una función analítica en **C** se llama entera.
Si $f'(z_0)$ entonces f es continua en z_0.
Teorema de Cauchy – Riemann. Si f(z)=u+iv es analítica en $z_0=x_0+iy_0$ entonces las funciones u y v satisfacen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ en (x_0, y_0)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

f(z)=u+iv es analítica en (x_0,y_0) si y solo si u y v tienen primeras derivadas parciales continuas en (x_0,y_0) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy – Riemann en (x_0,y_0).
Si f y g son analíticas en A, entonces:
f+g es analítica en A y (f+g)' = f' + g'.
fg es analítica en A y (fg)' = fg' + f'g.
f/g es analítica en A y $(f/g)'=(gf'-fg')/g^2$ $g\neq0$.

Integrales:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b [u(x,y) + iv(x,y)][x'(t) + iy'(t)]dt$$

$$\int_\gamma (u,-v)\cdot(dx,dy) + i\int_\gamma (v,u)\cdot(dx,dy)$$

$$\int_\gamma [f(z) + g(z)]dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$$

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

$$\int_{\gamma 1+\gamma 2} f(z)dz = \int_{\gamma 1} f(z)dz + \int_{\gamma 2} f(z)dz$$

$\int_\gamma f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$ Si Γ es una reparametrización de γ.

Si ∃ F analítica tal que F'=f entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z)\Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$$

Teorema de Cauchy – Goursat. Si f es analítica dentro y sobre una curva cerrada simple, entonces:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Si f es analítica en una región simplemente conexa A y γ es suave en A, entonces: $\oint_\gamma f(z)dz = 0$.

Análisis de Fourier
Si n y m ∈ Z, no negativos distintos,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = 0$$

Para cualquier par de enteros m y n

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = 0$$

Para cualquier entero positivo n:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(mx)dx = \pi$$

Sea f una función integrable en [-L, L], los coeficientes de fourier en [-L, L] son:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx$$

La serie de Fourier de f es:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Sea f una función integrable en [-L, L]. Si f es par ⇒

$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_0^L f(x)dx$ Si f es impar

$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$ Si f es par, la serie de fourier es

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ en donde $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$ y

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx$$

Si f es impar su serie de Fourier es $\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ en

donde $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx$

Si f continua en [-L, L] y f(L)=f(-L) y f' c.p.t entonces:

$$f'(x) = \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-na_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + nb_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$\int_{-L}^{x} f(t)dt = a_0(x+L) + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{a_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - b_n\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \cos(n\pi)\right]\right\}$$

La serie de Fourier en cosenos de f en [0, L] es como la serie de una función par. La serie de Fourier en senos es como la serie de una función impar.
La transformada finita de Fourier en senos F_s de f se def:
$F_S(n) = \int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$. Sean f y f' cont en [0, pi], f'' c.p.t. ⇒ $S_n\{f''(x)\} = -n^2F_S(n) + nf(0) - n(-1)^n f(\pi)$
con n=1,2,3,...
La transformada finita de Fourier en cosenos F_c de f:
$F_C(n) = \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$. Sean f y f' cont en [0, pi], f'' c.p.t. ⇒ $C_n\{f''(x)\} = -n^2F_C(n) - f'(0) + (-1)^n f'(\pi)$
con n=1,2,3,...
Serie de Fourier compleja de f (con periodo T):
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega 0t}$ donde ω0=2π/T y

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega 0t}dt$$

La integral de Fourier o representación integral:
$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\operatorname{sen}(\omega t)]d\omega$ t ∈ R en donde:

$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)d\xi$ y $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)d\xi$

La integral de Fourier en cosenos: $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos(\omega t)]d\omega$

donde $A(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)d\xi$ pasa lo mismo con la integral de Fourier en senos.
La integral de fourier compleja: $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[C(\omega)e^{i\omega t}]d\omega$

donde: $C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\omega\xi}d\xi$

La transformada de fourier:

$$F\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$$

La transformada inversa de Fourier:

$$F^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Tabla de derivadas:

$\frac{d}{dx}x = 1$ $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}uv = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

$\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$

si y=f(u), u=g(x): $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\operatorname{tg} u = \sec^2 u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\operatorname{tg} u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} u = \frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$ $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} u = \frac{du/dx}{1+u^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arc cot} u = -\frac{du/dx}{1+u^2}$ $\frac{d}{dx}\operatorname{arc sec} u = \frac{du/dx}{u\sqrt{u^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arc csc} u = -\frac{du/dx}{u\sqrt{u^2-1}}$ $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u\frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u\frac{du}{dx}$$

$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh} u = \operatorname{sec}h^2 u\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}c\operatorname{tgh} u = -\cosh^2 u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{sec} hu = -\operatorname{sec} hu\operatorname{tgh} u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{csc} hu = -\operatorname{csc} hu\coth u\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}a^u = a^u\ln a\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}u^v = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v\ln u\frac{dv}{dx}$

INTEGRALES:

$\int du = u + c$ $\int(du + dv - dw) = u + v - w + c$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$ $\int\frac{du}{u} = \ln u + c$

$\int e^u du = e^u + c$ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c; a = cte.$

$\int\ln u du = u(\ln u - 1) + c$ $\int ue^u du = e^u(u-1) + c$

$\int\operatorname{sen} u du = -\cos u + c$ $\int\cos u du = \operatorname{sen} u + c$

$\int\operatorname{tg} u du = \ln|\sec u| + c$ $\int\cot u du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$

$\int\sec u du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + c$

$\int\csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + c$ $\int\sec^2 u du = \operatorname{tg} u + c$

$\int\csc^2 u du = -\cot u + c$ $\int\sec u\operatorname{tg} u du = \sec u + c$

$\int\csc u\cot u du = -\csc u + c$ $\int\frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{1}{a} + c$

$\int\frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c = -\frac{1}{a}\operatorname{tgh}^{-1}\frac{u}{a} + c$

$\int\frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c = \frac{1}{a}\operatorname{tgh}^{-1}\frac{u}{a} + c$

$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + c$

$\int\frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

$= \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + c(+) = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + c(-)$

$\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + c$

$\int\sqrt{a^2-u^2}du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2-u^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}\right)$

$\int\sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{1}{2}(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|) + c$