Capítulo 8

Series numéricas

8.1. Definición y primeras propiedades

Informalmente, una serie es una suma de infinitos sumandos (ver antecedentes históricos y comentarios en [APOSTOL1, cap. 10] y en [DURÁN, pág. 184 y sigs.]). Estas sumas se usan implícitamente, por ejemplo, al considerar desarrollos decimales ilimitados de los números reales: así, la igualdad $\frac{7}{3} = 2,333\dots$ significa

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots,$$

suma con infinitos sumandos de la forma $\frac{3}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$. En general, consideraremos una sucesión cualquiera (a_n) y su suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ¿Qué sentido habrá que darle a esta suma? La respuesta se impone de modo natural: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene que ser $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$.

Analizando el proceso anterior, se trata de formar mediante la sucesión de sumandos (a_n) una nueva sucesión de sumas (s_m) dada por $s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, $m \in \mathbb{N}$, y determinar el límite (si existe) de esta última sucesión. Esquemáticamente:

lugar	1	2	3	4	$\dots$	n	$\dots$	
término	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$	a_n	$\dots$	
suma	a_1	$a_1 + a_2$	$a_1 + a_2 + a_3$	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$\dots$	$a_1 + \cdots + a_n$	$\dots$	$\to$?

Ahora bien: si, en definitiva, vamos a parar al estudio de la convergencia de una sucesión, ¿qué novedad vamos a encontrar respecto a lo que ya sabemos de sucesiones? El cambio radica en el punto de partida: tomando como dato la sucesión de sumandos (a_n), nos planteamos determinar propiedades de la sucesión de sumas (s_n) basándonos en propiedades de los términos a_n. Pasemos a formalizar estas ideas.

8.1.1. Series: términos y sumas parciales. Series convergentes, divergentes y oscilantes

Definición 8.1.1. *Una* **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es un par ordenado de sucesiones* $((a_n), (s_n))$ *relacionadas por la condición de que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *es*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

El término n-ésimo de la primera sucesión, a_n, recibe el nombre de **término** ***n*-ésimo** *de la serie; el término n-ésimo de la segunda sucesión, s_n, recibe el nombre de* **suma parcial** ***n*-ésima** *de la serie.*

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente** *si la sucesión (s_n) de sus sumas parciales es convergente, es decir, si*

$$\exists \lim_m s_m = \lim_m \sum_{n=1}^{m} a_n \in \mathbb{R}.$$

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente** *a $+\infty$, divergente a $-\infty$ u* **oscilante** *si la sucesión de sus sumas parciales es divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$ u oscilante, respectivamente.*

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, se llama **suma** *de dicha serie al límite de la sucesión de sus sumas parciales; si la serie diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, se dice que su suma es $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente. Con un abuso de notación que no suele conducir a error, se denota la suma con el mismo símbolo que la serie. Es decir, se escribe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_m \sum_{n=1}^{m} a_n,$$

cuando este límite existe.

Nota. A veces es cómodo considerar series de la forma $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, donde m es un número entero: las sumas parciales serán entonces $s_1 = a_m$, $s_2 = a_m + a_{m+1}, \dots$, $s_n = a_m + \cdots + a_{m+n-1}, \dots$

Se utiliza también la notación $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + \cdots$ en vez de $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ y, cuando no da lugar a confusión, se abrevia en $\sum a_n$.

Ejemplo. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una ***serie geométrica*** si existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_{n+1} = ra_n$ (o $a_{n+1}/a_n = r$ si $a_1 \neq 0$); de otro modo, si es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Si s_n es su suma parcial n-ésima, se tendrá

$$s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \begin{cases} a\frac{1-r^n}{1-r} & \text{si } r \neq 1 \\ an & \text{si } r = 1 \end{cases}.$$

Excluyendo el caso trivial $a = 0$, se sigue:

a) si $|r| < 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ es convergente y la suma es $\dfrac{a}{1-r}$;

b) si $r \geq 1$, la serie es divergente a $+\infty$ (si $a > 0$) o a $-\infty$ (si $a < 0$);

c) si $r = -1$, la serie es oscilante, aunque las sumas parciales están acotadas;

d) si $r < -1$, la serie es oscilante y las sumas parciales tienden, en valor absoluto, a $+\infty$.

Ejemplo. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

se llama ***serie armónica*** Se comprueba que, para cada n, su suma parcial n-ésima, denotada habitualmente por H_n, cumple

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1),$$

luego la serie armónica diverge a $+\infty$ a pesar de que $\lim_n \dfrac{1}{n} = 0$.

El ***carácter*** de una serie no cambia si se prescinde de un número finito de sumandos (aunque sí puede cambiar el valor de la suma). Dicho de forma más precisa,

Proposición 8.1.2. *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y un entero $m > 1$, se tiene:*

a) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si converge $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$. Si convergen, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n.$$

b) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ si y solo si $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$.*

c) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$ si y solo si $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$.*

d) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es oscilante si y solo si $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ es oscilante.*

Demostración. Basta observar que para todo $p > m$ es

$$\sum_{n=1}^{p} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{p} a_n,$$

donde $\sum_{n=1}^{m-1} a_n$ está fijo (independiente de p), y aplicar las definiciones previas y los resultados conocidos para sucesiones. □

8.1.2. Linealidad de la convergencia de series

Proposición 8.1.3. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Para cualesquiera α, $\beta \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente y se tiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que

$$\sum_{n=1}^{N}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{N} a_n + \beta \sum_{n=1}^{N} a_n.$$ □

Corolario 8.1.4. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ no es convergente.*

Demostración. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ convergiera, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Big((a_n + b_n) + (-1)a_n\Big)$$

también convergería, según la proposición 8.1.3. □

Ejemplos. La serie $\sum(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n})$ no converge, pues $\sum \frac{1}{n}$ no es convergente y $\sum \frac{1}{2^n}$ sí.

Sin embargo, al sumar dos series no convergentes, la suma puede ser tanto convergente como no convergente: examínense los casos $a_n = b_n = 1$ y $a_n = 1$, $b_n = -1$.

8.1.3. Series telescópicas

Proposición 8.1.5. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$a_n = b_n - b_{n+1}.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (denominada **serie telescópica***) es convergente si y solo si la sucesión (b_n) tiene límite real, en cuyo caso tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_n b_n.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{N-1} - b_N) + (b_N - b_{N+1}) = b_1 - b_{N+1}. \qquad \square$$

Ejemplo. Si $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, entonces la suma parcial N-ésima es simplemente

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1},$$

con lo que $\lim_N S_N = 1$. Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y su suma es 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ejemplo. Sea ahora $a_n = \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. La suma parcial de orden N es

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \left(\log(n+1) - \log n\right) = \log(N+1) - \log 1 = \log(N+1)$$

y tiende a $+\infty$. Es decir, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge a $+\infty$.

Nota. Toda serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se puede ver trivialmente como una serie telescópica: basta poner

$$b_1 = 0, \qquad b_{n+1} = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

lo que no añade nada interesante al estudio de la serie. Como es obvio, el resultado que hemos obtenido solo es útil cuando la sucesión (b_n) es una sucesión conocida, cuyo comportamiento sabemos de antemano.

8.1.4. Condición necesaria para la convergencia de una serie. Condición general de convergencia de Cauchy

Proposición 8.1.6 (condición necesaria para la convergencia de una serie). *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, necesariamente*

$$\lim_n a_n = 0.$$

Demostración. Si (s_N) es la sucesión de las sumas parciales, es decir,

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n,$$

entonces

$$\exists \lim_N s_N \in \mathbb{R}.$$

Como $a_N = s_N - s_{N-1}$, se deduce que

$$\lim_N a_N = \lim_N s_N - \lim_N s_{N-1} = 0. \qquad \square$$

Esta condición no es suficiente para la convergencia de una serie: veremos numerosos ejemplos de series no convergentes cuya sucesión de términos tiende a 0; el más sencillo es quizá la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

que ya hemos estudiado.

Teorema 8.1.7 (condición de Cauchy para la convergencia de una serie). *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n > N$ se cumple*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Demostración. La serie es convergente si y solo si lo es la sucesión (s_n) de sus sumas parciales, lo que equivale a que (s_n) sea una sucesión de Cauchy, y esto a su vez es es equivalente a que para cada $\varepsilon > 0$ exista un $N = N(\varepsilon)$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n > N$ sea $|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$; pero

$$s_m - s_{n-1} = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{m} a_k. \qquad \square$$

8.2. Series de términos no negativos

8.2.1. Convergencia de una serie de términos no negativos. Criterios de comparación

El estudio del carácter de una serie se simplifica cuando esta es de términos no negativos.

Proposición 8.2.1. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie tal que $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la sucesión (s_n) de sus sumas parciales está acotada superiormente. En caso contrario, la serie diverge a $+\infty$.*

Demostración. Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0,$$

la sucesión (s_n) es monótona no decreciente. Luego o bien está acotada superiormente y converge, o bien no está acotada superiormente y diverge a $+\infty$. $\square$

Este resultado permite deducir en algunos casos la convergencia (o divergencia) de una serie a partir del carácter de otra serie conocida.

Teorema 8.2.2 (criterio de comparación por mayoración). *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series y $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para $n \geq n_0$ es $0 \leq a_n \leq b_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. En consecuencia, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es asimismo divergente.*

Demostración. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene el mismo carácter que $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, y que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tiene el mismo carácter que $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Denotando por (s_n) la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y por (t_n) la de $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $s_n \leq t_n$, luego si (t_n) está acotada superiormente, (s_n) estará acotada superiormente. Y si (s_n) no está acotada superiormente, (t_n) tampoco puede estar acotada superiormente. Basta aplicar ahora la proposición 8.2.1. □

Otra forma de comparar dos series es estudiar el cociente de sus términos:

Teorema 8.2.3 (criterio de comparación por paso al límite). *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos no negativos. Supongamos que existe*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

a) Si $\ell < +\infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

b) Si $0 < \ell$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

c) Si $0 < \ell < +\infty$, entonces las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.

Demostración. a) Sea $C \in (\ell, +\infty)$ (por ejemplo $C = \ell + 1$). Entonces existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n/b_n \leq C$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $0 \leq a_n \leq Cb_n$ para todo $n \geq n_0$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces también la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Cb_n$ converge y, por el criterio 8.2.2 de maroración, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Sea $C \in (0, \ell)$. Existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n/b_n \geq C$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $a_n \geq Cb_n \geq 0$ para todo $n \geq n_0$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces también la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Cb_n$ diverge y, por el criterio 8.2.2 de mayoración, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

c) Basta aplicar *a)* y *b)*. □

Corolario 8.2.4 (series de términos equivalentes). *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos no negativos. Supongamos que $(a_n) \sim (b_n)$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.*

Por supuesto, en este resultado las dos series pueden tener distinta suma.

La comparación con las series geométricas proporciona dos criterios muy útiles en la práctica: el criterio de la raíz y el criterio del cociente. Después veremos versiones más generales para series de términos cualesquiera, así que dejamos la demostración para entonces.

Proposición 8.2.5 (criterio de la raíz o de Cauchy). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tal que existe $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.*

a) Si $R < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Si $R > 1$, entonces $a_n \not\to 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Proposición 8.2.6 (criterio del cociente o de D'Alembert). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tal que existe $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.*

a) *Si* $R < 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

b) *Si* $R > 1$*, entonces* $a_n \not\to 0$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

Un complemento interesante del criterio del cociente es el criterio de Raabe.

Proposición 8.2.7 (criterio de Raabe). *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no negativos tal que existe* $R = \lim_{n\to\infty} n(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n})$*. Entonces:*

a) *Si* $R > 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

b) *Si* $R < 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge a* $+\infty$*.*

Demostración. Ver [GARAY-CUADRA-ALFARO, teor. 5.28, págs. 101–102]. □

8.2.2. Otros criterios. Convergencia de algunas series de términos no negativos

Proposición 8.2.8 (criterio de la integral). *Sea* $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ *no creciente. Entonces:*

a) *La integral impropia* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ *es convergente si y solo si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge.*

b) *Existe* $C = \lim_n \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f \right) \in [0, +\infty)$*.*

c) *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f + C + \varepsilon_n$*, con* $0 \le \varepsilon_n \le f(n) - \lim_{x\to+\infty} f(x)$*.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \qquad t_n = \int_1^n f, \qquad d_n = s_n - t_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \right) \\ &= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)]\,dx \ge 0. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} = s_n - t_n - s_{n+1} + t_{n+1} &= \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1) \\ &= \int_n^{n+1} [f(x) - f(n+1)]\,dx \ge 0, \end{aligned}$$

se sigue que (d_n) es monótona no creciente y acotada inferiormente por 0, con lo que existe $C = \lim_n d_n \in [0, +\infty)$ y, en consecuencia, (s_n) y (t_n) serán simultáneamente convergentes o divergentes. Puesto que $f \ge 0$, la convergencia de (t_n) equivale asimismo a la de la integral $\int_1^{+\infty} f$, luego esta integral converge si y solo si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Con esto hemos demostrado *a)* y *b)*.

En cuanto a *c)*, la igualdad se cumple trivialmente si definimos $\varepsilon_n = s_n - t_n - C = d_n - C$; lo que hay que probar es que

$$0 \le \varepsilon_n \le f(n) - \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Observemos que

$$0 \le d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(n)\,dx - f(n+1) = f(n) - f(n+1).$$

Reiterando, para cualquier número natural $m > n$ resulta:

$$\begin{gathered} 0 \le d_n - d_{n+1} \le f(n) - f(n+1), \\ 0 \le d_{n+1} - d_{n+2} \le f(n+1) - f(n+2), \\ \dots \\ 0 \le d_{m-1} - d_m \le f(m-1) - f(m). \end{gathered}$$

Al sumar las desigualdades resulta que

$$0 \le d_n - d_m \le f(n) - f(m).$$

Pasando al límite en m, y teniendo en cuenta que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe por ser f monótona no creciente, obtenemos

$$0 \le d_n - C \le f(n) - \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Como $\varepsilon_n = d_n - C$, hemos terminado la demostración. □

Aplicaciones. a) ***La constante γ de Euler***. Aplicando los resultados que acabamos de obtener a la función f dada por $f(x) = 1/x$ y teniendo en cuenta que

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log n,$$

podemos escribir la suma parcial n-ésima de la serie armónica como

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \varepsilon_n,$$

donde $0 \le \varepsilon_n \le 1/n$ y

$$\gamma = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) = 0{,}5772156649\dots$$

es un número introducido por Euler en 1734 en el estudio de la función Γ, definida también por él. Euler obtuvo sus dieciséis primeras cifras decimales en 1781. No se sabe todavía si es un número racional o irracional (ver [Le Lionnais, pág. 28]).

b) ***La función ζ de Riemann***. El criterio 8.2.8 de la integral permite comprobar fácilmente que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge si y solo si $s > 1$. La función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1,$$

se denomina ***función zeta de Riemann*** y tiene importantes aplicaciones (especialmente en teoría de números). Hay expresiones más o menos sencillas para $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}$, pero no para otros valores. Se sabe por ejemplo que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$. Hasta fechas recientes (R. Apéry, 1978) no se había podido probar siquiera que $\zeta(3)$ es irracional: ver [Le Lionnais, pág. 36].

c) ***Series logarítmicas***. También mediante el criterio de la integral se prueba que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$$

converge si y solo si $s > 1$ (ver [Apostol1, pág. 486]).

Por comparación con las series anteriores se deducen inmediatamente los siguientes criterios de convergencia:

Proposición 8.2.9 (criterio de Pringsheim). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tal que para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ existe el límite*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = \ell \in [0, +\infty].$$

Entonces:

a) Si $\alpha > 1$ y $\ell < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\alpha \leq 1$ y $\ell > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge (a $+\infty$).

Proposición 8.2.10 (criterios logarítmicos). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tal que existe alguno de los dos límites $A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\log a_n}{\log n}$, $B = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\log(na_n)}{\log(\log n)}$. Entonces:*

a) Si $A > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente; si $A < 1$, diverge a $+\infty$.

b) Si $B > 1$, la serie$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente; si $B < 1$, diverge a $+\infty$.

8.3. Series de términos cualesquiera

8.3.1. Series alternadas: criterio de Leibniz

Proposición 8.3.1 (criterio de Leibniz). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una* **serie alternada***, es decir, una serie tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $x_n = (-1)^{n+1} a_n$ con $a_n \geq 0$. Si (a_n) es una sucesión no creciente con límite 0, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es convergente. Además, denotando con s_n la suma parcial n-ésima de la serie y con s su suma, se verifican para todo $n \in \mathbb{N}$ las desigualdades*

$$0 \leq (-1)^n (s_{n+2} - s_n) \leq a_{n+1}, \tag{8.1}$$

$$0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq a_{n+1}. \tag{8.2}$$

Nota. De (8.1) se sigue que las sumas de orden par forman una sucesión no decreciente y las sumas de orden impar una sucesión no creciente. Las desigualdades (8.2) pueden interpretarse del siguiente modo: si tomamos s_n como valor aproximado de s, el error que cometemos es menor o igual que a_{n+1}, de modo que si (a_n) converge rápidamente a 0 obtenemos una buena aproximación de la suma mediante una suma parcial de pocos términos.

Demostración. Obsérvese que dado $k \in \mathbb{N}$, la diferencia

$$-(s_{2k+1} - s_{2k-1}) = a_{2k} - a_{2k+1}$$

es mayor o igual que 0 por ser (a_n) decreciente, y menor o igual que a_{2k} por ser $a_{2k+1} \geq 0$, lo que da (8.1) en el caso $n = 2k - 1$. Para $n = 2k$ es

$$s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k+2},$$

que análogamente es mayor o igual que 0 y menor o igual que a_{2k+1}, lo que completa la prueba de (8.1) para todos los casos. Además, hemos obtenido que (s_{2k}) es una sucesión no decreciente. Como

$$s_{2k} = a_1 - [(a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2k-2} - a_{2k-1}) + a_{2k}] \leq a_1,$$

(s_{2k}) está acotada superiormente, luego es convergente. Sea s su límite. Puesto que

$$s_{2k-1} = s_{2k} + a_{2k}$$

y $a_{2k} \to 0$, resulta que

$$\lim_k s_{2k-1} = \lim_k (s_{2k} + a_{2k}) = \lim_k s_{2k} + \lim_k a_{2k} = s + 0 = s.$$

Es decir: tanto la subsucesión de términos pares como la de términos impares de (s_n) son convergentes con límite s. Esto permite afirmar que (s_n) es convergente con límite s, es decir, que $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$.

Finalmente, puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$s = x_1 + \cdots + x_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k = s_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k,$$

se sigue que

$$\begin{aligned}(-1)^n (s - s_n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{n+k+1} a_k \\ &= a_{n+1} - a_{n+2} + \lim_m [(a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2m+1} - a_{n+2m+2})] \\ &\geq a_{n+1} - a_{n+2} \geq 0\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}(-1)^n (s - s_n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{n+k+1} a_k \\ &= a_{n+1} - \lim_m [(a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots + (a_{n+2m} - a_{n+2m+1})] \\ &\leq a_{n+1},\end{aligned}$$

lo que prueba (8.2). □

Ejemplo. La ***serie armónica alternada***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

es convergente. Además, su suma se calcula fácilmente utilizando la constante de Euler. En efecto: para cada $n \in \mathbb{N}$, sumando y restando términos, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= H_{2n} - H_n = \log 2n + \gamma + \varepsilon_{2n} - \log n - \gamma - \varepsilon_n = \log 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n.\end{aligned}$$

Como sabemos ya que la serie armónica alternada es convergente, podemos escribir:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_m \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_n \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2.$$

Ejemplo. La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$$

es convergente. En efecto, es fácil comprobar que la función $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ es decreciente en $[3, +\infty)$ (por ejemplo, calculando f'). Además, $\dfrac{\log n}{n} \geq 0$ y $\dfrac{\log n}{n} \to 0$. De aquí se deduce que la serie converge, sumando desde $n = 3$, y por lo tanto también sumando desde $n = 2$..

8.3.2. Series absolutamente convergentes

Definición 8.3.2. *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice* **absolutamente convergente** *si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.*

El ejemplo más sencillo de serie convergente que no converge absolutamente es la serie armónica alternada.

Observación. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series absolutamente convergentes y $r, s \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(ra_n + sb_n)$ también es absolutamente convergente. Esto se deduce de la desigualdad $|ra_n + sb_n| \leq |r||a_n| + |s||b_n|$ y el criterio 8.2.2 de mayoración.

Definición 8.3.3. *Para un número real cualquiera x, escribamos*

$$x^+ = \text{máx}\{x, 0\}, \qquad x^- = \text{máx}\{-x, 0\}. \tag{8.3}$$

Es fácil comprobar que $|x| = x^+ + x^-$, $x = x^+ - x^-$, $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$.

Proposición 8.3.4. *Toda serie absolutamente convergente es convergente: dicho de otro modo, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Y en ese caso,*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Demostración. Con la notación (8.3),

$$0 \le a_n^+ \le |a_n|, \qquad 0 \le a_n^- \le |a_n|,$$

luego las dos series $\sum_{n=1}^\infty a_n^+$ y $\sum_{n=1}^\infty a_n^-$ convergen. Como $a_n = a_n^+ - a_n^-$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ también converge. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k\right| \le \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

por la desigualdad triangular. Pasando al límite (una vez que ya sabemos que las dos series convergen),

$$\left|\sum_{k=1}^\infty a_k\right| \le \sum_{k=1}^\infty |a_k|. \qquad \square$$

8.3.3. Criterios generales de Cauchy (de la raíz) y de D'Alembert (del cociente)

Los criterios que hemos visto sobre convergencia de series de términos no negativos se traducen de manera obvia en criterios de convergencia absoluta para series de términos cualesquiera. Así:

Proposición 8.3.5 (criterio de la raíz o de Cauchy). *Sea $\sum_{n=1}^\infty a_n$ una serie tal que existe $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.*

a) Si $R < 1$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge absolutamente.

b) Si $R > 1$, entonces $a_n \not\to 0$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ no es convergente.

Demostración. a) Supongamos que $R < 1$. Sea $R < c < 1$. Entonces existirá algún n_0 tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \le c$ para todo $n \ge n_0$. Por lo tanto,

$$0 \le |a_n| \le c^n, \qquad n \ge n_0.$$

Como $0 < c < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=n_0}^\infty c^n$ converge y por lo tanto la serie $\sum_{n=n_0}^\infty |a_n|$ converge, y la serie $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ también converge.

b) Supongamos que $R > 1$. Entonces existirá algún n_0 tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ para todo $n \ge n_0$. Por lo tanto,

$$|a_n| \ge 1, \qquad n \ge n_0.$$

Entonces, $a_n \not\to 0$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ no es convergente. $\square$

Proposición 8.3.6 (criterio del cociente o de D'Alembert). *Sea $\sum_{n=1}^\infty a_n$ una serie tal que existe $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.*

a) Si $R < 1$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge absolutamente.

b) Si $R > 1$, entonces $a_n \not\to 0$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ no es convergente.

Demostración. a) Supongamos que $R < 1$. Sea $R < c < 1$. Entonces existirá algún n_0 tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le c$ para todo $n \ge n_0$. Por lo tanto,

$$|a_{n+1}| \le c|a_n|, \qquad n \ge n_0.$$

De aquí es fácil deducir por inducción que

$$0 \le |a_n| \le \frac{|a_{n_0}|}{c^{n_0}} c^n, \qquad n \ge n_0.$$

Como $0 < c < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=n_0}^{\infty} c^n$ converge y por lo tanto la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ también converge.

b) Supongamos que $R > 1$. Entonces existirá algún n_0 tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto,

$$|a_{n+1}| \geq |a_n|, \qquad n \geq n_0.$$

Entonces, la sucesión $|a_n|$ no tiende a 0 (es no decreciente), luego $a_n \not\to 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es convergente. □

8.3.4. Criterios de convergencia de Abel y Dirichlet

El criterio 8.3.1 de Leibniz nos ha permitido encontrar series que convergen pero no absolutamente. Para ampliar la lista de criterios que no se refieren a la convergencia absoluta añadimos los más conocidos, de Abel y Dirichlet, que se obtienen de una interesante fórmula de sumación por partes:

Lema 8.3.7 (fórmula de sumación por partes de Abel). *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones arbitrarias, y llamemos, para cada n,*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(suma parcial n-ésima de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$$

cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ver [APOSTOL1, pág. 497]. □

Proposición 8.3.8 (criterio de Abel). *Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona y acotada, y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente.*

Demostración. Ver [APOSTOL1, pág. 498]. □

Proposición 8.3.9 (criterio de Dirichlet). *Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona que converge a 0, y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie cuya sucesión de sumas parciales está acotada, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente.*

Demostración. Ver [APOSTOL1, págs. 497–498]. □

8.4. Propiedad conmutativa para series

¿Qué sucede cuando en una serie se cambia el orden de los sumandos? Se puede demsotrar que las únicas series inalterables por estos cambios son las absolutamente convergentes; en general, pues, las series no mantienen la propiedad conmutativa de las sumas finitas. Precisemos estos conceptos.

Definición 8.4.1. *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se dice que otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una* **reordenación** *suya si existe una aplicación biyectiva $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$b_n = a_{r(n)}.$$

Nótese que, recíprocamente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pues la inversa r^{-1} es igualmente una biyección.

Informalmente, una serie es una reordenación de otra si tiene exactamente los mismos términos, pero en otro orden. Que una serie tenga la propiedad conmutativa significará, así, que tenga suma y que cualquier reordenación suya tenga la misma suma. Vamos a dar un nombre especial a las series convergentes con la propiedad conmutativa.

Definición 8.4.2. *Una serie se denomina* **incondicionalmente convergente** *si es convergente y si toda reordenación suya es asimismo convergente, y con la misma suma.*

Decimos que una serie es **condicionalmente convergente** *si es convergente pero no incondicionalmente convergente, de modo que alguna reordenación suya o bien no es convergente o converge a una suma distinta.*

Lema 8.4.3. *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos no negativos y una reordenación suya $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, se tiene:*

a) si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente con suma s, también $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente con suma s.

b) si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente a $+\infty$, también $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente a $+\infty$.

Demostración. a) Sea $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{r(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$m(n) = \text{máx}\{r(1), r(2), \dots, r(n)\}.$$

Denotando con t_n la suma parcial n-ésima de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ será entonces

$$t_n = a_{r(1)} + a_{r(2)} + \cdots + a_{r(n)} \le a_1 + a_2 + \cdots + a_{m(n)} \le s,$$

lo que prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente con suma menor o igual que s. Como a su vez $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, por el mismo motivo su suma será menor o igual que la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, lo que implica la igualdad entre ambas sumas.

b) En caso contrario, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sería convergente y entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, reordenación suya, también convergería. □

Proposición 8.4.4. *Toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente.*

Demostración. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, aplicamos el lema 8.4.3 a las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ (que también convergen) y por último recordamos que $a_n = a_n^+ - a_n^-$. □

El recíproco también es cierto: más aún, una serie convergente que no converja absolutamente posee reordenaciones que *van a parar* donde se desee: convergentes con suma arbitrariamente prefijada, divergentes a $+\infty$, divergentes a $-\infty$, oscilantes a capricho. Este es el contenido de un célebre teorema de Riemann.

Teorema 8.4.5 (de Riemann). *Si una serie es convergente pero no absolutamente convergente, para cada $\ell \in [-\infty, +\infty]$ existe una reordenación suya con suma ℓ; en general, dados ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_k, existe una reordenación cuya sucesión de sumas parciales contiene subsucesiones que convergen a ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_k.*

Demostración. Ver [GARAY-CUADRA-ALFARO, teor. 5.33, pág. 105], [ORTEGA, teor. 9.20, pág. 303]. □

Corolario 8.4.6 (teorema de Dirichlet). *Una serie es incondicionalmente convergente si y solo si es absolutamente convergente.*

8.5. Apéndice: sumación de series

Resumimos las ideas fundamentales sobre el cálculo de las sumas de algunos tipos particulares de series.

Series telescópicas

Si para cada n puede ponerse $a_n = b_n - b_{n+1}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si es convergente la sucesión (b_n), y si este es el caso, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_n b_n$.

Series geométricas

Si $a \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ converge si y solo si $|r| < 1$; si converge, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$.

Series aritmético-geométricas

Si P es un polinomio no constante, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)r^n$ converge si y solo si $|r| < 1$. Llamando S a su suma, $(1-r)S = P(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [P(n) - P(n-1)]r^n = P(0) + \sum_{n=1}^{\infty} Q(n)r^n$, donde Q es un polinomio de grado menor que P; reiterando, se llega a una serie geométrica.

Series hipergeométricas

Son de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$, $\alpha > 0$. La serie converge si y solo si $\gamma > \alpha + \beta$, con suma $\frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta}$

Series racionales o de cocientes de polinomios

Series del tipo $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$, donde P y Q son polinomios (el nombre no es estándar). Cuando convergen, puede hallarse a veces su suma descomponiendo P/Q en fracciones simples y calculando la suma parcial n-ésima, relacionándola con sumas de series conocidas. Pueden ser de ayuda las siguientes:

- Serie armónica
  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \varepsilon_n$, donde γ es la constante de Euler y $\lim_n \varepsilon_n = 0$

- Función ζ de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$. En particular

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Reordenadas de la serie armónica alternada

En algunos casos pueden hallarse expresiones simplificadas de ciertas sumas parciales en términos de H_n, y deducir así el comportamiento de la serie.

Series que se reducen a la exponencial

Partiendo de que para todo $x \in \mathbb{R}$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, se pueden sumar series de la forma $\sum \frac{P(n)}{n!} x^n$, donde P es un polinomio de grado m, sin más que reescribir

$$P(n) = a_0 n(n-1)\cdots(n-m+1) + a_1 n(n-1)\cdots(n-m+2) + \cdots + a_{m-1}n + a_m$$

para coeficientes $a_0, \ldots, a_m$ adecuados, y observar que

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{n!} = \frac{1}{(n-k-1)!},$$

si $n > k$.

8.6. Ejercicios

Ejercicio 8.1. Escribiéndolas como series telescópicas, estudiar las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+2}{n(n+1)}$ (descomponer $\frac{n+2}{n(n+1)}$ en fracciones simples).

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \operatorname{sen}^3 \frac{a}{3^n}$ (obsérvese que $\operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} - 4 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3}$).

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2^n} \operatorname{tg} \frac{a}{2^{n-1}}$ (utilizar que $\operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$).

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n}$ (tener en cuenta que $\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)]$).

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n \cos^2(x/2^n)}$ $\quad (0 < x < \pi/2$; usar que $\frac{1}{4\cos^2 a} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 2a} - \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 a}$).

Ejercicio 8.2. Estudiar el carácter de las series de término general:

a) $\frac{\operatorname{sen}^4 n}{n^2}$	b) $\frac{1}{\sqrt{n} - 2/3}$	c) $\frac{1+n^2}{n!}$
d) $\cos^n\left(a + \frac{b}{n}\right) \quad (0 < a < \pi/2)$	e) $\frac{n^2+1}{na^n} \quad (a \neq 0)$	f) $\frac{n!}{n^n}$
g) $\frac{3^n}{n^2+1}$	h) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^3}$	i) $\frac{1}{\log n}$
j) $\frac{1}{na+b}, \quad (a,b) \neq (0,0)$	k) $\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$	l) $\frac{1}{n-3/2}$

m) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ n) $\dfrac{1+\operatorname{sen}^2(nx)}{n^2}$ ñ) $\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$

o) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ p) $\dfrac{n(n+1)}{n^2+2n}$ q) $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/n}$

r) $\dfrac{\log(n+1)-1}{(1+n)^2}$ s) $\dfrac{1}{3-\cos(1/n)}$ t) $\left(\dfrac{x}{n}\right)^n n!$

u) $\dfrac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}$ v) $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3\log n}$ w) $\dfrac{1}{(\log n)^{2n}}$

x) $\log\dfrac{n+1}{n}$ y) $e^{-\sqrt{n^2+1}}$ z) $\dfrac{1}{(\log n)^p}$

A) $\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ B) $\dfrac{\log n}{n^p}$ C) $\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$

D) $\dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ E) $\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n!}$ F) $\dfrac{(n^2+1)x^n}{(n+1)!}$

G) $e^{1/n^2}-e^{1/(n^2+1)}$ H) $(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n^2+1}$ I) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$

Ejercicio 8.3. Hallar la suma, si convergen, de las series de término general (para $n\geq 1$, si no se indica otra cosa):

a) $\dfrac{4n-1}{(n+2)(n-1)^2}$, $n\geq 2$ b) $\dfrac{1}{n(n+1)}$ c) $\dfrac{2n+3}{n(n-1)(n+2)}$, $n\geq 2$

d) $\dfrac{1}{n^2-1}$, $n\geq 2$ e) $\dfrac{1}{4n^2+16n+7}$ f) $\dfrac{1}{(n+1)^2-4}$, $n\geq 2$

g) $\dfrac{3n^2+7n+6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ i) $\dfrac{1}{(n-1+\sqrt{3})(n-2+\sqrt{3})(n+\sqrt{3})}$

h) $\dfrac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^2}$ j) $\dfrac{n^2(n+1)^2}{n!}$ k) $\dfrac{3^n(n-3)}{n!}$

l) $\dfrac{n^3-n+1}{n!\,3^n}$ m) $\dfrac{3n^2+8n+6}{(n+2)!}$, $n\geq 3$ n) $\dfrac{n-1}{n!(n+2)}$

ñ) $\dfrac{n^3-1}{n!}$ o) $\dfrac{n^2+1}{(n+1)!}$ p) $\dfrac{n^2+5n+7}{(n+2)!}$, $n\geq 2$

q) $(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ r) $\dfrac{n(n+1)}{2^n}$ s) $\dfrac{n^2}{3^n}$

t) $(n+1)x^n$ u) $(-1)^n\dfrac{n^2-n}{3^n}$ v) $\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

w) $\log\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n-\dfrac{1}{2n}+1$

Ejercicio 8.4. Hallar la suma de las series:

a) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$

b) $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}-\frac{1}{15}+\frac{1}{16}-\frac{1}{21}+\frac{1}{20}-\dots$

c) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{4}+\dots$

d) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\dots$

e) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\dots$