MATEMÁTICAS II Curso 07-08

Funciones de varias variables. Límites y continuidad

1. Se construye un depósito de propano adosando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen V de ese depósito en función del radio *r* del cilindro y de su altura *h*.

2. Determinar si las siguientes funciones son acotadas:

a) $z = sen^2(x+y)\cos\left(x-e^y\right)$ **b)** $z = x^2 sen\frac{1}{x^2} + y^2 sen\frac{1}{y^2}$ **c)** $z = \frac{x+y}{e^{x+y}}$

3. Hallar, y representar gráficamente, el dominio de las funciones siguientes. Calcula también el conjunto imagen o recorrido:

a) $f(x,y) = \ln(xy-6)$; **b)** $g(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$; **c)** $h(x,y) = \text{arc cos } \frac{y}{x}$;

d) $p(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; **e)** $r(x,y) = x^2 e^{\left(-\frac{xy}{2}\right)}$.

4. Describir las curvas de nivel de las funciones siguientes y dibujar las curvas de nivel correspondientes a los valores de c que se especifican:

a) $z = xy$ c = ± 1, ± 2, ± 4.

b) $z = \frac{x}{x^2+y^2}$ c = 0, ± 1/2, ± 1; ± 2.

c) $z = e^{\left(\frac{xy}{2}\right)}$ c = 2, 4, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.

d) $z = 6 - 2x - 3y$ c = 0, 2, 4, 6, 8.

5. La temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (x,y) de una placa circular de 10m de radio es:

$$T = 600 - 0{,}75x^2 - 0{,}75y^2$$

Donde *x* e *y* se miden en metros. Calcular y dibujar algunas curvas isotermas.

6. Consideremos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}$. Se pide:

a) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de cualquier recta $y = mx$.

b) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$.

c) ¿Existe el límite? Justifica la respuesta.

7. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$; **c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y^4}{x^3-y^4}$ **f)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy-x+y}{x+y}$

8. Estudiar la continuidad en (0, 0), y en el resto del dominio, de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

9. Dada la función f(x,y)= $\begin{cases} \dfrac{sen^2 x\, sen y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Se pide:

a. Límites reiterados en el punto (0,0).

b. A la vista del resultado anterior ¿qué puedes decir acerca del límite de f en (0,0)?¿Es continua la función en (0,0)?

c. Definir f(0,0) para que f sea continua en dicho punto.

10. Para las siguientes funciones, probar que el valor de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ depende del camino elegido para acercarse a (0,0):

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{x^2y^4+(x-y^2)^2}$ **b)** $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

¿Existen dichos límites?

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Hallar el dominio y el recorrido de las funciones:

f(x,y) = $\ln(2x+y)$ g(x,y) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ h(x,y) = arc sen(x+y).

2.- Hallar las curvas de nivel de las funciones siguientes:

a) z = 2x+y-1 b) z= x^2-y^2 c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

3.- Dada la función f(x,y)= $\begin{cases} x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{y} & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases}$ .Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

4.- Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy\left(y^2-x^2\right)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Se pide:

a) Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) ¿Existe algún valor de k para el cual la función f sea continua en (0,0)?

5.- Sea la función f(x,y)= $(x+y)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x}\,\text{sen}\,\dfrac{1}{y}$.

a) Hallar, si existen, los límites reiterados en (0,0).
b) Hallar los límites radiales en (0,0).
c) Aplicar el criterio de la mayorante para averiguar si existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
d) ¿Es continua f en (0,0)? Si no fuera así ¿cómo debería definirse f(0,0) para serlo?

6.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ b) $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

7.- Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Se pide:

a. Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b. Estudiar la continuidad de f en todo R^2, según los valores de k.

Soluciones a los ejercicios propuestos

1.- Dom f = $\{(x,y)\in R^2 \,/\, y>-2x\}$, Imf = R

Dom g = $\{(x,y)\in R^2 \,/\, x^2+y^2<1\}$, Img = $[1,\infty)$

Dom h = $\{(x,y)\in R^2 \,/ -1-x\le y\le 1-x\}$, Imh = $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

2.- Rectas paralelas, 2 x + y -1 – k = 0

Hipérbolas, $x^2-y^2=k$

Elipses, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$

3.- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

4.- a) No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

b) f es discontinua en (0, 0) para todo valor de k.

5.- a) No existen los límites reiterados en (0, 0).

b) Valen 0

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

d) f no es continua en (0, 0). Habría que definir f (0, 0) = 0.

6.- a) f es continua en todo R^2 excepto en el (0,0).

b) g es continua en todo R^2 excepto en el (0,0).

7.- a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

b) Si k = 0, f es continua en todo R^2.

En caso contrario, f es continua en $R^2-\{(0,0)\}$