INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL.

CÁLCULO INFINITESIMAL.

HOJA 6: FUNCIONES DE VARIABLE VECTORIAL. DIFERENCIAL.

EJERCICIOS Y SOLUCIONES

1. Obtener la derivada direccional de la función $U(x, y, z) = 5x^2 - 3x + y + z^2 - 2$ en el punto (1, 2, 3) según la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. [*Sol.* $14/\sqrt{3}$]

2. Calcular el valor máximo de la derivada direccional de la función $U(x, y, z) = yz + xz + xy$ en el punto (1, 2, 3), así como la dirección donde ésta tiene lugar. [*Sol.* $5\sqrt{2}$, en la dirección $5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$]

3. Dado el campo escalar $U(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz$, hallar el gradiente en el punto P (2, 1, 1). Determinar en qué puntos el gradiente es perpendicular al eje OZ y en cuáles es un vector nulo.
[*Sol.* En P: (9, –3, –3), $\perp$ OZ en $(x, y, \sqrt{x}\sqrt{y})$, Nulo en (x, x, x)]

4. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la siguiente función en el origen:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy/\sqrt{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x.y)=(0,0) \end{cases}$$ [*Sol.* Continua pero no diferenciable.]

5. Un depósito prismático tiene por dimensiones 5, 10 y 6 metros. Sabiendo que las paredes tienen un espesor común de 10 centímetros, calcular el volumen ocupado por éstas: *a)* mediante el incremento total y *b)* mediante la diferencial de la función, *c)* comparar ambos resultados.
[*Sol. a)* 14.211 m^3, *b)* 14 m^3, *c)* El error de la estimación con la diferencial es 0.211 m^3.]

6. Un recinto tiene forma de triángulo rectángulo. Se han medido los dos catetos resultando los siguientes valores con sus correspondientes errores máximos $x = 22.52 \pm 0.02$ m, $y = 15.33 \pm 0.02$ m. Encontrar el valor de la hipotenusa con su respectivo error máximo. [*Sol.* 27.24 ± 0.03 m.]

7. El mismo problema anterior pero suponiendo que los errores son medios. [*Sol.* 27.24 ± 0.02 m.]

8. Obtener aquellos puntos de la función $z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ donde la derivada direccional en cualquier dirección es nula. [*Sol.* (0, 0) y (2/3, –4/3)]

9. Siendo $z = u + v^2$, $u = x^2 + \operatorname{sen} y$, $v = \mathrm{L}\,(x + y)$, calcular el gradiente de z en el punto (2, 0) aplicando la regla de la cadena. [*Sol.* $(4+\mathrm{L}2)\,\mathbf{i} + (1+\mathrm{L}2)\,\mathbf{j}$.]

10. Siendo $z = {}^{1+u}\!/_{1+v}$, $\quad u = \operatorname{sen} x$, $\quad v = \cos x$, calcular el gradiente de z en el punto $(0, y)$ aplicando la regla de la cadena. [*Sol.* $(1/2)\,\mathbf{i}$.]

11. Obtener en el punto $x = \pi / 4$ la derivada total de la función $z = (u\ v\ x)$, siendo u y v las siguientes funciones: $u(x) = x \cos x$, $v(x) = x \operatorname{sen} x$. [*Sol.* $3\pi^2/ 32$.]

12. Dada la función $y^x - x^y = 0$, y sabiendo que $y = y(x)$, determinar el valor de la derivada de y respecto de x en el punto (1, 1). [*Sol.* 1.]

13. Dada la función $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, y sabiendo que z es función de las variables independientes x e y, calcular el vector gradiente de z en el punto genérico (x, y). [*Sol.* $-\dfrac{c^2x}{a^2z}\,\mathbf{i} - \dfrac{c^2y}{b^2z}\,\mathbf{j}$]

14. Dada la función $x^2y - 2xz + 2y^2z^4 = 10$, y sabiendo que $z = z(x, y)$, obtener las ecuaciones del plano tangente y recta normal a la superficie z en el punto (2, 1, –1).
[*Sol.* $3x + 4y - 6z = 16$, $\mathbf{r}(t) = (3t + 2)\,\mathbf{i} + (4t + 1)\,\mathbf{j} + (-6t - 1)\,\mathbf{k}$.]