INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL.

CÁLCULO INFINITESIMAL.

HOJA2: DERIVADA Y DIFERENCIAL EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE.

EJERCICIOS

1. Utilizando las reglas de derivación, obtener la derivada de las siguientes funciones:

$$a)\ y=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3 \quad b)\ y=\mathrm{L}\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}} \quad c)\ y=(\operatorname{tg}x)^{2x} \quad d)\ y=(\cos x)^{\operatorname{arctg}x} \quad e)\ y=\sqrt{\operatorname{sen}x(e^x+x)}$$

2. Aplicando la definición de derivada como límite en un punto, calcular la derivada en el punto de abscisa x de cada una de las siguientes funciones:

$$a)\ y=x^n \qquad b)\ y=a^x \qquad c)\ y=\mathrm{L}\,x \qquad d)\ y=\operatorname{sen}x \qquad e)\ y=\cos x \qquad f)\ y=\sqrt{x}$$

3. Calcular la diferencial en el punto de abscisa x de las siguientes funciones:

$$a)\ y=\cos(2x)\operatorname{sen}\sqrt{x} \qquad b)\ y=\sqrt[3]{5x^2-x+1}$$

4. Calcular la derivada dw/dz de las siguientes funciones de variable compleja:

$$a)\ w=\cos\sqrt{\cos\sqrt{z}} \qquad b)\ w=iz^3+\frac{3-z}{z^2}+\mathrm{L}(z^{2-3i}) \qquad c)\ w=e^z-z^z$$

5. Calcular la derivada dy/dx, siendo:

$$a)\begin{cases} y=u^2+2u \\ u=\mathrm{L}\,x \end{cases} \qquad b)\begin{cases} y=\cos u-e^{u+1} \\ u=\operatorname{sen}x \end{cases} \qquad c)\begin{cases} y=\mathrm{L}\,(u^{-1})-\cos u \\ u=v^2+3 \\ v=2x\cos x \end{cases}$$

6. Utilizar la regla de L´Hôpital para resolver los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{L}\,x}{\sqrt[3]{x}} \qquad c)\ \lim_{x\to\infty} x\left(1-\sqrt[x]{a}\right) \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3}$$

7. Ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

$$a)\ x^2+y^2=18,\ \text{en } (3,3) \qquad b)\ y=\operatorname{sen}x,\ \text{en}\left(\frac{\pi}{2},1\right) \qquad c)\ y=\frac{a^3}{a^2+x^2},\ \text{en } x=a$$

8. Calcular el infinitésimo que separa la diferencial del incremento de las siguientes funciones cuando se incrementa la variable x en un valor diferencial h:

$$a)\ V=x^3 \qquad b)\ y=\cos x$$

9. Representar las siguientes funciones, estudiando los máximos y mínimos, las inflexiones y la concavidad:

$$a)\ y=(x-1)\sqrt[3]{x^2} \qquad b)\ y=x^x$$

10. Mediante el teorema de los incrementos finitos, obtener una cota de error al aceptar la siguiente aproximación:

$$\sqrt[5]{34}\approx 2$$

11. Calcular aproximadamente mediante la diferencial, el valor de la raíz cúbica de 25. *Nota:* Considerar el valor exacto de la raíz cúbica de 27 igual a 3.

12. Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, encontrar aquél de área máxima.

13. Descomponer el número 40 en dos partes tales que tres veces el cuadrado de la primera más siete veces el cuadrado de la segunda sea un valor mínimo.

14. Encontrar el punto de la parábola $y = 2x^2 + 3$ que está más próximo al origen de coordenadas.

15. Se quiere construir un depósito de bases semiesféricas y cuerpo cilíndrico cuya superficie total sea igual a 2π. Encontrar qué dimensiones ha de tener para que el volumen sea máximo.

SOLUCIONES

1. $$\begin{cases} a)\ y' = 12\dfrac{(x^2-1)^2 x}{(x^2+1)^4} \quad b)\ y' = -\dfrac{1}{\cos x} \quad c)\ y' = 2\,\mathrm{tg}^{2x-1} x \left[\mathrm{L}(\mathrm{tg}\, x)\,\mathrm{tg}\, x + x + x\,\mathrm{tg}^2 x\right] \\ d)\ y' = (\cos x)^{\mathrm{arctg}\, x}\left[\dfrac{\mathrm{L}(\cos x)}{x^2+1} - \dfrac{\mathrm{Arctg}\, x \,\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\right] \quad e)\ y' = \dfrac{\cos x(e^x + x) + \mathrm{sen}\, x(e^x+1)}{2\sqrt{\mathrm{sen}\, x(e^x+x)}} \end{cases}$$

2. $a)\ y' = nx^{n-1} \qquad b)\ y' = a^x\,\mathrm{L}\,a \qquad c)\ y' = \dfrac{1}{x} \qquad d)\ y' = \cos x \qquad e)\ y' = -\mathrm{sen}\, x \qquad f)\ y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $a)\ dy = \left[-2\,\mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{sen}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos(2x)\cos\sqrt{x}\right]dx \qquad b)\ dy = \dfrac{(10x-1)dx}{3(5x^2-x+1)^{2/3}}$

4. $a)\ w' = \dfrac{\mathrm{sen}\sqrt{\cos\sqrt{z}}\ \mathrm{sen}\sqrt{z}}{4\sqrt{\cos\sqrt{z}}\sqrt{z}} \qquad b)\ w' = \dfrac{3iz^5 + z - 6 + 2z^2 - 3iz^2}{z^3} \qquad c)\ w' = e^z - z^z(\mathrm{L}\,z + 1)$

5. $$\begin{cases} a)\ \dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{\mathrm{L}\,x}{x} + \dfrac{2}{x} \qquad b)\ \dfrac{dy}{dx} = -\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\, x)\cos x - \cos x\, e^{\mathrm{sen}\, x + 1} \\ c)\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{8x\cos^2 x - 8x^2\cos x\,\mathrm{sen}\, x}{4x^2\cos^2 x + 3} + \mathrm{sen}(4x^2\cos^2 x + 3)(8x\cos^2 x - 8x^2\cos x\,\mathrm{sen}\, x) \end{cases}$$

6. $a)\dfrac{3}{2} \qquad b)\,0 \qquad c)\,-\mathrm{L}\,a \qquad d)\dfrac{1}{2}$

7. $a)\ y + x - 6 = 0, \quad y = x \qquad b)\ y = 1, \quad x = \dfrac{\pi}{2} \qquad c)\ 2y + x - 2a = 0, \quad 2y - 4x + 3a = 0$

8. $a)\ \Delta V - dV = 3xh^2 + h^3 \qquad b)\ \Delta y = dy$ cuando $\mathrm{sen}\, h \approx h$ y $\cos h \approx 1 \qquad (h \downarrow\downarrow)$

9. $$\begin{cases} a)\ \max(x=0), \quad \min(x = 2/5), \quad \inf(x = -1/5), \quad Y^-(\forall x < -1/5), \quad Y^+(\forall x > -1/5 \text{ siendo } x \neq 0) \\ b)\ \min(x = 1/e), \quad x \to 0 \Rightarrow y \to 1, \quad Y^+(\forall x \geq 0) \end{cases}$$

10. $\varepsilon < 1/40$.
11. Valor aproximado: 2.9259. Se obtiene de la forma: 3 – 2/27
12. El triángulo equilátero de lado 10 cm.
13. Los sumandos son 28 y 12.
14. El vértice; punto (0,3).
15. El depósito ha de ser esférico de radio $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, y por tanto su parte cilíndrica tendrá altura cero.