INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL.

CÁLCULO INFINITESIMAL.

HOJA 3: DESARROLLO DE TAYLOR.

EJERCICIOS

1. Dada la función: $y = \mathrm{L}(1+x)$, se pide:
a) Desarrollo en torno al punto $a = 0$
b) Intervalo de convergencia.
c) Expresión del resto de Lagrange.
d) Valor aproximado de L2 mediante los 4 primeros términos del desarrollo, evaluando el error cometido.

2. Resolver el ejercicio anterior para la función $y = \operatorname{sen} x$, aproximando el valor de sen (π / 4) mediante los 3 primeros términos no nulos del desarrollo, y evaluando el error cometido.

3. Desarrollando previamente en serie de Mc. Laurin la función $y = e^x$, obtener el valor del número *e* con un error menor de 0.001.

4. Aprovechando el desarrollo del ejercicio anterior, obtener el correspondiente de la función $y = k^x$ siendo *k* una constante positiva.

5. Obtener los 7 primeros términos del desarrollo de Taylor en torno al punto a = 1, de la función $y = \sqrt{x}$. Calcular mediante dichos términos el valor aproximado de la raíz cuadrada de 2. Evaluar el error cometido en esta aproximación mediante el primero de los términos despreciados.

6. Obtener los desarrollos de las funciones que se indican seguidamente, así como los correspondientes intervalos de convergencia:

$a)\ y = \cos x \qquad \text{en } a = 0.$

$b)\ y = \mathrm{L}\, x \qquad \text{en } a = 1.$

$c)\ y = \dfrac{1}{x+2} \qquad \text{en } a = 0.$

$d)\ y = \mathrm{L}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \qquad \text{en } a = 0$

Nota: Aprovechar cuando se pueda los desarrollos ya efectuados.

SOLUCIONES

1.

$a)\ y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad b)\ -1 < x \le 1 \quad c)\ R_n = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right| \quad d)\ 0.58,\quad \varepsilon < 0.2$

2.

$a)\ y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots \quad b)\ \forall x \quad c)\ R_n = \left|\frac{\left.\begin{matrix}\text{sen}\\ \cos\end{matrix}\right\}(\theta\, x)}{(n+1)\,!}x^{n+1}\right| \quad d)\ 0.707143,\quad \varepsilon < 0.000037$

3. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow \quad e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (Para $\varepsilon < 0.001$ hay que tomar $n = 6 \ \Rightarrow e = 2.7180$)

4. $k^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\,\mathrm{L}\,k)^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$

5.

$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \frac{7}{256}(x-1)^5 - \frac{21}{1024}(x-1)^6 + R_6$

$\sqrt{2} \approx 1.405, \qquad \varepsilon < 0.161$

6.

$a)\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \qquad -\infty < x < +\infty$

$b)\ \mathrm{L}\,x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} + \ldots \qquad 0 < x \le 2$

$c)\ \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} - \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{2^{n+1}} + \ldots \qquad -2 < x < +2$

$c)\ \mathrm{L}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots \qquad -1 < x < +1$