

# INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL.

## CÁLCULO INFINITESIMAL.

### HOJA 4: FUNCIONES DE VARIABLE VECTORIAL. LÍMITE Y CONTINUIDAD.

#### EJERCICIOS

1. Encontrar el dominio de las siguientes funciones:

$$1.1. f(x, y) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{y - 2x}$$

$$1.2. f(x, y) = \left( \sqrt{x - y}, \quad L(x - 2), \quad \frac{1}{x - y} \right)$$

$$1.3. f(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2 - 4}, \quad L(16 - x^2 - y^2), \quad Lx + Ly \right)$$

2. Calcular:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \mathbf{0}} (x^2 + y^2, \quad \text{sen}(xy)(x^2 + y), \quad x^2 + xy)$$

3. Calcular los siguientes límites:

$$3.1. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{3 - x + y}{4 + x - 2y}$$

$$3.2. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (4, \pi)} x^2 \text{sen} \frac{y}{x}$$

$$3.3. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x - 2y}{2x - 3y}$$

$$3.4. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x - y}{x^2 + y^2}$$

$$3.5. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x}{x + y}$$

$$3.6. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2 y^2 L(x^2 + y^2)$$

$$3.7. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$3.8. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$3.9. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$3.10. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$3.11. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow \mathbf{0}} \frac{(y^2 - x)^2}{x^2 + y^2}$$

$$3.12. \quad \lim_{(x, y) \rightarrow \mathbf{0}} \frac{y}{x} \text{sen}(x^2 + y^2)$$

$$3.13. \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$3.14. \lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}$$

4. Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

$$4.1. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x/y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4.2. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4.3. f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4.4. f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cos \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4.5. f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4.6. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

$$4.7. f(x,y) = \begin{cases} x^2 \text{sen} \frac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$4.8. f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4.9. f(x,y) = \begin{cases} x(4x^2+y^2-1)^{-1} & \text{si } 4x^2+y^2 \neq 1 \text{ y } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } 4x^2+y^2 = 1 \text{ o } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$4.10. f(x,y) = \begin{cases} \left( \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \text{sen } xy \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

## SOLUCIONES

1.

1.1.  $\{(x, y); x \in [-3, 3], y \neq 2x\}$

1.2.  $\{(x, y); x > 2, x > y\}$

1.3.  $\{(x, y); 2 \leq r < 4, x > 0, y > 0\}$

2.

$(0, 0, 0)$

3.

3.1. 4,    3.2.  $8\sqrt{2}$ ,    3.3. No existe,    3.4. No existe,    3.5. No existe,    3.6. 0,  
3.7. 0,    3.8. 0,    3.9. No existe,    3.10. 0,    3.11 a 3.13. No existe,    3.14. 0.

4.

4.1. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .

4.2. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$  salvo en  $\mathbf{0}$ .

4.3. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .

4.4. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .

4.5. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$  salvo en  $\mathbf{0}$ .

4.6. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$  salvo en la recta  $y = -x$ .

4.7. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$  salvo en el eje  $OX$  a excepción del origen.

4.8. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .

4.9. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$  salvo en la elipse  $4x^2 + y^2 = 1$  y en el origen.

4.10. Continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .

---