FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II FEBRERO 2002

SOLUCIONES

PROBLEMA 1

	SI	NO	
1	X		Sea (a_n) una sucesión real tal que $\lim a_{2n+1} = a$, $\lim a_{2n} = b$ y $a < b$. Entonces $\overline{\lim}\, a_n = b$.
2		X	Todo espacio métrico completo está acotado.
3		X	Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in A$. Entonces f es constante en A.
4		X	Si $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
5	X		$f(x) = e^x + \cos x$ es uniformemente continua en $(0,1)$.
6	X		$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.
7	X		Si $f(x,y) = \operatorname{sh} x + e^y$, la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ es máxima en la dirección $(1,1)$.
8	X		La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$ converge únicamente en $x = 1$.
9		X	$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 - y^2$ alcanza mínimo relativo en $(0,0)$.
10		X	La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ es convergente.
11	X		Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x) = (\cos x, e^x)$ y sea $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$. Entonces $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = (1,1)$.
12		X	Cualquier $z \in \mathbb{C}$ tiene n raíces n−ésimas distintas.
13	X		Todo subconjunto de un espacio métrico discreto es acotado.
14		X	Si (x_n) es una sucesión real tal que $x_n \leq x_{n+1}$ y $-\pi < x_n < \pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (x_n) converge.
15		X	$\lim\limits_{n\to\infty} (\cos 2n\pi)^{n^2+3n}$ no existe.
16		X	Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en A, entonces $f \in C^1(A)$.
17		X	Si (a_n) es una sucesión real, entonces $\overline{\lim}\, a_n \in \mathbb{R}$.
18		X	Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que existen $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$, entonces f es continua en $(0,0)$.
19	X		Si $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
20		X	$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge en } x_0 \in \mathbb{R}\right) \Longleftrightarrow \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ converge en } x_0 \in \mathbb{R}\right)$.

PROBLEMA 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) (2 puntos) Estudiar la continuidad de f.

b) (2 puntos) Estudiar la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

c) (3 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

d) (1 punto) Estudiar si f tiene extremo en $(0,0)$.

e) (2 puntos) Analizar el carácter de abierto, cerrado, compacto, conexo y completo de $f^{-1}(\{0\})$ en $(\mathbb{R}^2, d_u)$.

a) OBVIAMENTE f ES CONTINUA EN $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. TAMBIÉN LO ES EN $(0,0)$, YA QUE $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} r \operatorname{sen}\varphi \cos 2\varphi = 0 = f(0,0)$. LUEGO, f ES CONTINUA EN $\mathbb{R}^2$.

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(h_1,0)-f(0,0)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0} \frac{0-0}{h_1} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h_2\to 0} \frac{f(0,h_2)-f(0,0)}{h_2} = \lim_{h_2\to 0} \frac{-h_2-0}{h_2} = -1.$$

c) SI f FUESE DIFERENCIABLE EN $(0,0)$, DEBERÍA SER $f(h_1,h_2) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 + \varphi(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2} = -h_2 + \varphi(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$ CON $\varphi(h) \to 0$ CUANDO $h = (h_1,h_2) \to (0,0)$. COMO $f(h_1,h_2) - f(0,0) = h_2 \frac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2}$, RESULTARÍA QUE $\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(h_2 + h_2\frac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\right)$. PERO SI, POR EJEMPLO, $h_2 = h_1$, SE TENDRÍA $\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{h_1}{|h_1|}$, O SEA, $\varphi(h) \not\to 0$ CUANDO $h \to 0$. LUEGO, f NO ES DIFERENCIABLE EN $(0,0)$.

d) f NO PUEDE TENER EXTREMO EN $(0,0)$, YA QUE, POR EJEMPLO, $f(0,h) - f(0,0) = -h$ CAMBIA DE SIGNO, SEGÚN SEA $h>0$ Ó $h<0$.

e) $f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=x\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=-x\}$. LUEGO, $f^{-1}(\{0\})$ ES CERRADO (UNIÓN DE TRES CERRADOS), NO COMPACTO (SUBCONJUNTO NO ACOTADO DE $\mathbb{R}^2$), CONEXO (HAY CONEXIÓN POR CAMINOS) Y COMPLETO (SUBCONJUNTO CERRADO DEL COMPLETO $\mathbb{R}^2$); NO ES ABIERTO (POR SER CERRADO, DISTINTO DE $\mathbb{R}^2$ Y DEL $\emptyset$).

PROBLEMA 3

Se considera la sucesión funcional (f_n) donde $f_n(x) = \dfrac{\cos^2 nx}{2^{nx}}$.

a) (4 puntos) Encontrar la función límite $f = \lim f_n$ en $[0, +\infty)$, y estudiar la convergencia uniforme de (f_n) en $[0, +\infty)$ y $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

b) (2 puntos) Estudiar la covergencia uniforme de la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ en el conjunto $[1, +\infty)$.

c) (2 puntos) Calcular una cota del error $R_n(1)$ que se comete si la serie se aproxima por la n−ésima suma parcial, o sea, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) \approx \dfrac{\cos^2 1}{2} + \dfrac{\cos^2 2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$.

d) (2 puntos) Estudiar si tiene mínimo el conjunto $\{R_n(1), n \in \mathbb{N}\}$.

a) ESTÁ CLARO QUE $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{SI } x>0, \\ 1 & \text{SI } x=0. \end{cases}$ POR ESO $|f(x)-f_n(x)| = \begin{cases} \dfrac{\cos^2 nx}{2^{nx}} & \text{SI } x>0, \\ 0 & \text{SI } x=0. \end{cases}$ LUEGO, EN $[0,+\infty]$ SE TIENE $M_n = \sup_{x\in[0,+\infty]} |f(x)-f_n(x)| = 1 \not\to 0$ CUANDO $n\to\infty$ Y NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME. EN CAMBIO, EN $[a,+\infty)$ CON $a>0$ SE TIENE $M_n = \dfrac{\cos^2 na}{2^{na}} \le \dfrac{1}{2^{na}} \to 0$ SI $n\to\infty$ Y HAY CONVERGENCIA UNIFORME.

b) SI $x\in[1,\infty)$, SE CUMPLE $0 \le f_n(x) \le \frac{1}{2^n}$ $(n\in\mathbb{N})$ Y, COMO $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ CONVERGE, LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[1,\infty)$.

c) COMO $R_n(1) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(1) - \sum_{k=1}^{n} f_k(1) = \dfrac{\cos^2(n+1)}{2^{n+1}} + \dfrac{\cos^2(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots \le \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots\right) = \dfrac{1}{2^n}\,\dfrac{1/2}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^n}$ PARA TODO $n\in\mathbb{N}$.

d) COMO $\lim_{n\to\infty} R_n(1) = 0$ (DEBIDO A LA CONVERGENCIA DE LA SERIE EN $x=1$) Y $R_n(1)\ge 0$ (POR SER TODOS LOS SUMANDOS ≥ 0), RESULTA QUE $(\exists \min\{R_n(1), n\in\mathbb{N}\}) \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\exists k\in\mathbb{N} \text{ TAL QUE } R_k(1) = \dfrac{\cos^2(k+1)}{2^{k+1}} + \dfrac{\cos^2(k+2)}{2^{k+2}} + \ldots = 0\right) \Rightarrow (\cos(k+1) = \cos(k+2) = \ldots = 0)$. PERO ESTO ES IMPOSIBLE, YA QUE $(m\in\mathbb{N}) \Rightarrow (\cos m \neq 0)$.

LUEGO, EL CONJUNTO $\{R_n(1), n\in\mathbb{N}\}$ NO TIENE MÍNIMO.