

FUNDAMENTOS MATEMATICOS II
EXAMEN EXTRAORDINARIO (SEPTIEMBRE) DE 2002

SOLUCIONES

PROBLEMA 1

SI NO

- 1 ☒ ☐ Toda sucesión monótona que contiene una subsucesión convergente es convergente.
- 2 ☒ ☐ En un espacio normado se verifica $0 \in B_r(x) \iff \|x\| < r$.
- 3 ☐ ☒ Si R es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge $\forall x_0 \in [-R, R]$.
- 4 ☒ ☐ $\sum_{n=0}^{50} i^n = i$.
- 5 ☐ ☒ Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza mínimo y máximo en $[a, b]$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
- 6 ☐ ☒ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 0$.
- 7 ☒ ☐ El conjunto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n}]$ es cerrado en $\mathbb{R}$.
- 8 ☒ ☐ La función $f(x, y) = x^2 + y^4$ tiene mínimo absoluto en el origen.
- 9 ☐ ☒ Si $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
- 10 ☐ ☒ Si (X, d) es un espacio métrico, $A, B \subset X$ y $A \neq B$, entonces $\overline{A} \neq \overline{B}$.
- 11 ☐ ☒ La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- 12 ☒ ☐ Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales primeras continuas en $x_0 \in \mathbb{R}^2$, entonces f es continua en x_0 .
- 13 ☐ ☒ Toda serie alternada, tal que la sucesión de términos en valor absoluto es decreciente, es convergente.
- 14 ☐ ☒ Si $A \subset \mathbb{R}$ comprende sólo puntos aislados y es completo, entonces A es finito.
- 15 ☐ ☒ Sea $A \subset \mathbb{R}$ un abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Si $f'(x) = 0 \forall x \in A$, entonces f es constante.
- 16 ☒ ☐ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$.
- 17 ☐ ☒ La función $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ es discontinua en todo punto.
- 18 ☒ ☐ Si $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, entonces su matriz Hessiana es simétrica para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 19 ☐ ☒ Si $A \subset \mathbb{R}$ y $B = \{-x : x \in A\}$, entonces $\sup B = -\sup A$.
- 20 ☐ ☒ La sucesión de funciones $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) converge uniformemente a la función nula en $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 2Sea $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Sean

$$g_n(x) = \begin{cases} (1 + \frac{1}{n})f(x), & \text{si } x \in [0, n], \\ f(x), & \text{resto.} \end{cases}$$

- 1) (2 puntos) Estudiar la convergencia puntual de $g_n(x)$.
- 2) Estudiar la convergencia uniforme de $g_n(x)$ en su dominio $[0, \infty)$ y en subconjuntos del dominio de la forma $[a, b]$:
 - a) (2 puntos) Cuando f está acotada en su dominio $[0, \infty)$.
 - b) (2 puntos) Cuando f es continua y cumple que $f(n) = n$.
- 3) (4 puntos) Estudiar la convergencia uniforme de $g_n(x)$ en su dominio $[0, \infty)$ y en subconjuntos del dominio de la forma $[a, b]$ para el caso

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{resto.} \end{cases}$$

① ESTÁ CLARO QUE $g_n(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE A $f(x)$ EN $[0, \infty)$. EN EFECTO, SI $a \in [0, \infty)$, EXISTE $N \in \mathbb{N}$ TAL QUE $a \in [0, N]$; ENTONCES, PARA TODO $n > N$ SE TIENE $g_n(a) = (1 + \frac{1}{n})f(a)$ Y, POR LO TANTO $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(a) = f(a)$

② SI $A \subset [0, \infty)$, LA CONVERGENCIA UNIFORME DE g_n A f EN A SIGNIFICA QUE $M_n = \sup_{x \in A} |R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, DONDE $R_n(x) = g_n(x) - f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} f(x), & x \in [0, n]; \\ 0, & \text{RESTO.} \end{cases}$

Ⓐ COMO f ES ACOTADA EN $A = [0, \infty)$, EXISTE $K \in \mathbb{R}$ TAL QUE $\forall x \in A \quad |f(x)| < K$. ENTONCES $|R_n(x)| < \frac{1}{n} K$ Y $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, DEMODO QUE HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $A = [0, \infty)$.

Ⓑ COMO f ES CONTINUA EN $[0, \infty)$, ESTÁ ACOTADA EN CUALQUIER $A = [a, b] \subset [0, \infty)$ Y, POR LO TANTO, HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN CUALQUIER $A = [a, b] \subset [0, \infty)$. SIN EMBARGO, NO LA HAY EN $[0, \infty)$, YA QUE $f(n) = n \implies R_n(n) = \frac{1}{n} f(n) = 1$ Y $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 1 \neq 0$.

③ HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN CUALQUIER $A = [a, \infty)$ CON $a > 0$, PORQUE $f(x) = \frac{1}{x}$ ES ACOTADA EN A . PERO NO LA HAY EN $A = (0, \infty)$, YA QUE $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} R_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{nx} = +\infty$.

PROBLEMA 3

1. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- 1a) (1 punto) Estudiar su continuidad.
- 1b) (1 punto) Calcular $D_1 f(0, 0)$, $D_2 f(0, 0)$, $D_1 f(1, 1)$, $D_2 f(1, 0)$.
- 1c) (1 punto) Hallar el conjunto de puntos donde la función f es diferenciable.
- 1d) (1 punto) Estudiar si el conjunto $f^{-1}(\{0\})$ es abierto, cerrado, conexo, compacto.
2. (6 puntos) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - x - y + y^2$. Encontrar los máximos y mínimos de f en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2\}$.

①a) SI $A = \{(0, y)\}$, ES OBVIO QUE f ES CONTINUA EN $\mathbb{R}^2 - A$. SI $y_0 \neq 0$, NO HAY CONTINUIDAD EN $(0, y_0) \in A$, YA QUE $f(0, y_0) = 0$ Y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \frac{y_0^2}{x}) = \infty$. TAMPOCO HAY CONTINUIDAD EN $(0, 0) \in A$, YA QUE $f(0, 0) = 0$ Y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$. LUEGO, f ES CONTINUA SOLAMENTE EN $\mathbb{R}^2 - A$.

$$(1b) D_1 f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-0}{h} = 1;$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0;$$

$$D_1 f(1,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 - 1] - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = 2;$$

$$D_2 f(1,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1,h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h^2) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h) = 0.$$

(1c) SOLO PODRÍA HABER DIFERENCIABILIDAD EN EL ABIERTO $\mathbb{R}^2 - A$. EN ESTE ABIERTO LAS DERIVADAS PARCIALES $D_1 f(x,y) = 1 + \frac{y^2}{x}$ Y $D_2 f(x,y) = -\frac{2y}{x}$ EXISTEN Y SON CONTINUAS. LUEGO, f ES DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2 - A$.

(1d) OBTIVAMENTE $f^{-1}(\{0\}) = \{(0,y)\} \cup \{(x,x)\} \cup \{(x,-x)\}$ ES EL CONJUNTO FORMADO POR EL EJE DE LAS ORDENADAS Y LAS DOS BISECTRICES DE LOS CUADRANTES Y, POR ESO, NO ES ABIERTO (SU COMPLEMENTO NO ES CERRADO), ES CERRADO (SU COMPLEMENTO ES ABIERTO), ES CONEXO (POR SER CONEXO POR CAMINOS) Y NO ES COMPACTO (NO ES ACOTADO).

(2) COMO f ES CONTINUA EN EL COMPACTO A , NECESARIAMENTE ALCANZA MÁXIMO Y MÍNIMO BIEN EN EL INTERIOR DE A , BIEN EN LA FRONTERA DE A .

1) COMO f ES DIFERENCIABLE EN EL INTERIOR DE A , DEBEN CONSIDERARSE SÓLO LOS PUNTOS EN LOS QUE $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0$ Y $\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + 2y = 0$, O SEA, SÓLO EL PUNTO $a_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2) LA FRONTERA DE A ES UNA CIRCUNFERENCIA, FORMADA POR LA SEMICIRCUNFERENCIA SUPERIOR $A_1 = \{(x, \sqrt{2-x^2}), -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$ Y LA INFERIOR $A_2 = \{(x, -\sqrt{2-x^2}), -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

EN A_1 LA FUNCIÓN f SE REDUCE A LA $\varphi(x) = f(x, \sqrt{2-x^2}) = 2 - x - \sqrt{2-x^2}$, DEFINIDA EN EL COMPACTO $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, CONTINUA EN EL MISMO Y DIFERENCIABLE EN SU INTERIOR, DE MODO QUE φ PUEDE TENER EXTREMOS SOLO EN LOS PUNTOS FRONTERA $-\sqrt{2}$ Y $\sqrt{2}$ DE ESTE COMPACTO Y EN AQUELLOS PUNTOS INTERIORES DEL MISMO EN LOS QUE $\frac{d\varphi}{dx} = -1 + \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 0$, O SEA, EN LOS PUNTOS -1 Y 1 . ESTO SIGNIFICA QUE LOS EXTREMOS DE f EN A_1 PUEDEN ESTAR SÓLO EN LOS PUNTOS $a_1 = (-\sqrt{2}, 0)$, $a_2 = (\sqrt{2}, 0)$, $a_3 = (-1, 1)$ Y $a_4 = (1, 1)$.

ANÁLOGAMENTE, PUEDE VERSE QUE EN A_2 DEBEN CONSIDERARSE SOLAMENTE LOS PUNTOS $a_1 = (-\sqrt{2}, 0)$, $a_2 = (\sqrt{2}, 0)$, $a_5 = (-1, -1)$ Y $a_6 = (1, -1)$.

PUESTO QUE $f(a_0) = -\frac{1}{2}$, $f(a_1) = 2 + \sqrt{2}$, $f(a_2) = 2 - \sqrt{2}$, $f(a_3) = 2$, $f(a_4) = 0$, $f(a_5) = 4$ Y $f(a_6) = 2$, COMPARANDO ESTOS VALORES SE CONCLUYE QUE f TIENE EN A MÍNIMO (ABSOLUTO) $-\frac{1}{2}$ EN $a_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Y MÁXIMO (ABSOLUTO) 4 EN $a_5 = (-1, -1)$.