FMT2 - FEB05 - 1/6

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II - 2 de febrero de 2005 Problema 1

**1.** Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Q}$ acotado inferiormente tiene:

- [ ] a) mínimo.
- [ ] b) supremo.
- [x] c) ninguna de las anteriores.

**2.** Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado inferiormente tiene:

- [x] a) mínimo.
- [ ] b) supremo.
- [ ] c) ninguna de las anteriores.

**3.** Los números complejos que verifican la ecuación $\overline{z} = -z$ forman

- [ ] a) el eje real.
- [x] b) el eje imaginario.
- [ ] c) ninguna de las anteriores.

**4.** $\sum_{n=0}^{50} i^n =$

- [ ] a) 1.
- [ ] b) $-1$.
- [x] c) $i$.

**5.** El conjunto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n})$ es

- [ ] a) vacío.
- [ ] b) abierto.
- [x] c) compacto.

**6.** Si $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0\}$ es

- [x] a) cerrado.
- [ ] b) abierto.
- [ ] c) ni abierto ni cerrado.

**7.** $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} =$

- [ ] a) 1.
- [ ] b) $e^2$.
- [x] c) $e$.

8. Dada la función $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ se verifica que $\lim_{x\to 1} D(x)$

- [ ] a) $= 1$.
- [ ] b) $= 0$.
- [x] c) no existe.

9. La función real $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ es

- [ ] a) decreciente.
- [ ] b) acotada.
- [x] c) continua.

10. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$, y $f(a) = f(b)$, entonces

- [ ] a) existe $\xi \in (a, b)$ / $f(\xi) = 0$.
- [ ] b) existe un único $\xi \in (a, b)$ / $f'(\xi) = 0$.
- [x] c) ninguna de las anteriores.

11. La derivada de $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ es

- [ ] a) $(1 + x^2)^{-1/2}$.
- [ ] b) $(1 - x)^{-1/2}$.
- [x] c) $(1 - x^2)^{-1/2}$.

12. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$. Entonces $f$ es

- [ ] a) monótona creciente.
- [x] b) inyectiva.
- [ ] c) sobreyectiva.

13. El gradiente de $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$ en el punto $(0, 1)$ vale

- [ ] a) 0.
- [x] b) $(2, 0)$.
- [ ] c) $(0, 2)$.

14. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie real. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces

- [ ] a) la serie es convergente.
- [ ] b) la serie es divergente.
- [x] c) ninguna de las anteriores.

15. Siendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series reales con $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$:

- [ ] a) si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente.
- [ ] b) si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente.
- [x] c) ninguna de las anteriores.

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II - 2 de febrero de 2005 Problema 2

**2.1** (1 punto) Demuestre, mediante el uso de la definición de límite, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**2.2** Considere la función $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy^2 + y^3$:

**2.2(a)** (1.25 puntos) Estudie la existencia y, en su caso, el carácter (máximo o mínimo) de los extremos relativos y absolutos de $f$ en $\mathbb{R}^2$.

**2.2(b)** (1.25 puntos) Estudie la existencia y, en su caso, el carácter de los extremos absolutos de $f$ en

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le x\}.$$

---

**Solución:**

**2.1** Observemos que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Por tanto, dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, si $\epsilon \ge 1$ podemos tomar $N = 1$, mientras que si $\epsilon < 1$ podemos tomar $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1 > 1$, donde $[x]$ denota la parte entera de $x$. De esta forma, se tendrá que si $n > N$ entonces

$$\left|\tfrac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1} \le \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon,$$

ya que $\left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1 \ge \frac{1}{\epsilon}$.

**2.2(a)** Dado que $\mathbb{R}^2$ es un abierto, y $f$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, un punto de extremo, relativo o absoluto, $(a,b)$ habrá de ser un punto estacionario de $f$ y, por tanto, deberá verificar la condición necesaria $D_x f(a,b) = D_y f(a,b) = 0$, es decir,

$$\begin{cases} a - b^2 = 0 \\ 3b^2 - 2ab = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son,

$$\boxed{p_1 \equiv (\frac{9}{4}, \frac{3}{2}) \text{ y } p_2 \equiv (0,0).}$$

a) Estudiemos $p_1 = (\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$. Dado que para un incremento cualquiera $(h_1, h_2)$ se tiene

$$\left(h_1^2 - 4yh_1h_2 + (6y-2x)h_2^2\right)(p_1) = h_1^2 - 6h_1h_2 + \frac{9}{2}h_2^2 = (h_1 - 3h_2)^2 - \frac{9}{2}h_2^2,$$

tenemos una expresión que claramente no conserva el signo para $(h_1,h_2) \ne (0,0)$ (tómese $h_1 = 3h_2$ y entonces es negativa, mientras que para $h_1 \ne 0$ y $h_2 = 0$ es positiva). Por tanto, $f$ no alcanza extremo alguno en $p_1$. La misma conclusión se desprende del criterio basado en los menores de la matriz Hessiana, que en $p_1$ es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ por lo que se tiene $\Delta_2 = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2} < 0$.

b) Por otra parte, para $p_2 = (0,0)$, es claro que

$$\left(h_1^2 - 4yh_1h_2 + (6y-2x)h_2^2\right)(p_2) = h_1^2 \ge 0,$$

que es justamente el caso que no discrimina. Otro tanto ocurre con la matriz Hessiana, en este caso $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que, como es lógico, tampoco discrimina.

Observemos, sin embargo, que para un incremento $h = (0,h_2)$ tenemos que $f(0,h_2) = h_2$, cuyo signo depende del signo de $h_2$. Por tanto, tampoco hay extremo alguno en $p_2$.

En conclusión, $f$ no alcanza extremo alguno en $\mathbb{R}^2$.

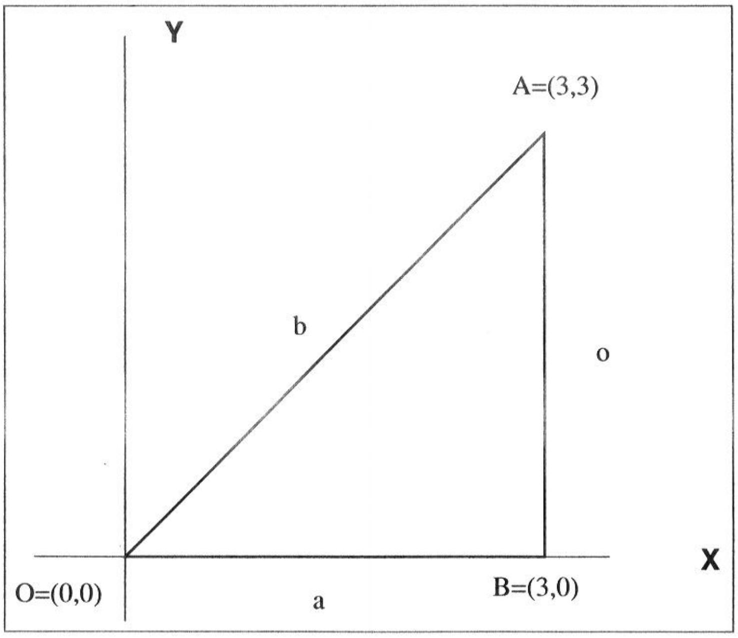


Figura 1: Dominio de la función $f$

**2.2(b)** Dado que el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado y acotado, se trata de un compacto y, al ser $f$ continua en $A$, por ser suma de funciones elementales, $f$ necesariamente alcanza extremos absolutos en $A$.

Observemos primero que los únicos posibles extremos en el interior de $A$, esto es, en el abierto $A - Fr(A)$, son aquellos que, correspondiendo a puntos estacionarios calculados anteriormente, caigan en el interior. El único de tales es $p_1$, que ya se ha visto que no es extremo. Por tanto, sólo resta estudiar $Fr(A)$, es decir, la reunión de los vértices O, A y B y de los lados b, o y a (véase la figura), es decir,

$$\begin{aligned} Fr(A) &= \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 3, y = x\} \cup \{(3,3)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3, 0 < y < 3\} \cup \\ &\cup \{(3,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 < x < 3\}. \end{aligned}$$

Tenemos que $f(0,0) = 0, f(3,3) = f(3,0) = \frac{9}{2}$. Por otro lado, observemos que, tanto $f$ restringida al conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 3, y = x\}$, como restringida al conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 < x < 3\}$, es la función de una variable $u : (0,3) \to \mathbb{R}$, con $u(x) = \frac{x^2}{2}$ que es estrictamente creciente. Finalmente, $f$ restringida al conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3, 0 < y < 3\}$$

es la función de una variable $v : (0,3) \to \mathbb{R}$, con $v(y) = y - 3y^2 + \frac{9}{2}$. Como $v'(y) = 3y^2 - 6y$, $v$ tiene un punto estacionario en $y = 2$, que es mínimo local de $v$, ya que $v''(y) = 6y - 6$ es positiva en $y = 2$. Observemos que $v(2) = \frac{1}{2}$.

En conclusión, $f$ tiene máximos absolutos en los puntos $(3,3)$ y $(3,0)$, mientras que tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$.

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II - 2 de febrero de 2005 Problema 3

**3.1** (1 punto) Demuestre por inducción que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**3.2 (a)** (0.5 puntos) Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$

**3.2 (b)** (0.75 puntos) Calcule la función suma de la serie anterior en su intervalo de convergencia. Indique si la serie es convergente en los extremos del intervalo.

**3.2 (c)** (0.25 puntos) Indique razonadamente si la serie anterior converge uniformemente en el intervalo $[-1/2, 1/2]$.

**3.2 (d)** (1 punto) Calcule la función suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1} = 2x + 4x^3 + 6x^5 + \ldots$$

---

**Solución:**

**3.1** Para $n = 1$, el resultado es cierto pues

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Suponiendo el resultado cierto para $n$, comprobemos que se verifica para $n+1$, es decir, que se verifica la igualdad

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}.$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

y, efectivamente, se verifica que

$$\frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}.$$

**3.2 (a)** La serie de potencias $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$ es una serie geométrica de razón $x^2$, y por lo tanto será convergente si y sólo si $|x^2| < 1$, es decir, si y sólo si $|x| < 1$. Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = 1$.

Alternativamente, la serie se puede escribir como $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ con

$$a_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

de donde se deduce que $\limsup \sqrt[m]{|a_m|} = 1$ y por tanto $R = 1$.

**3.2 (b)** La suma de la serie geométrica de razón $x^2$ es

$$\frac{1}{1 - x^2},$$

en el intervalo de convergencia $(-1, 1)$. En los extremos del intervalo $x = \pm 1$ la serie no es convergente por el razonamiento descrito en el apartado anterior.

**3.2 (c)** Por ser $[-1/2, 1/2]$ un conjunto compacto comprendido en el intervalo de convergencia, la serie converge uniformemente en él.

**3.2 (d)** Obsérvese que la serie $2x + 4x^3 + 6x^5 + \dots$ se obtiene derivando término a término la serie de potencias anterior $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$. En el intervalo de convergencia, la serie $2x + 4x^3 + 6x^5 + \dots$ convergerá por tanto a la derivada de la función suma calculada en 3.2 (b), esto es, a

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$