Tema 1

Cálculo integral de funciones reales de una variable

1.1 El problema del cálculo de áreas

Por razones prácticas, los problemas de encontrar el área encerrada por una curva o el volumen delimitado por una superficie han tenido gran importancia histórica. El cálculo de volúmenes aparece en el antiguo Egipto, hacia el año 1.800 a.C., en un papiro, *el papiro de Moscú*, en que se da una fórmula para calcular el volumen de una pirámide truncada. Más tarde, en la época griega, el matemático y astrónomo Eudoxo (alrededor del 370 a.C.), inventa un método, llamado el *método de exhausción*, que consiste en aproximar áreas y volúmenes mediante formas cuyas áreas y volúmenes eran conocidas. Veamos en qué consiste ese método.

Ejemplo 1.1.1 (El método de exhausción) Sea C un círculo de radio r, como se muestra en la figura. Intuitivamente, es claro que los sucesivos polígonos inscritos tienen áreas cada vez más próximas a la del círculo.

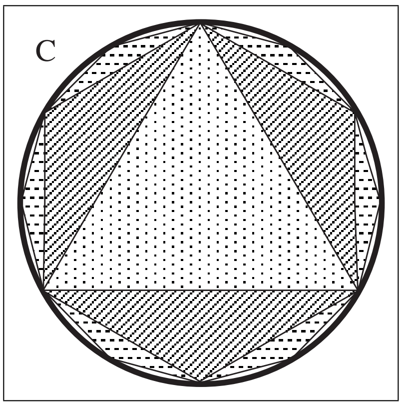

Figura 1.1: El método de exhausción.

Como se ha podido comprobar al resolver el problema, no era un método general ni cómodo de calcular. Sin embargo, este fue el método principal de cálculo de áreas hasta nada menos que el siglo XVII, en que de manera independiente Leibniz y Newton inventan el cálculo diferencial e integral. En particular, es el *teorema fundamental del cálculo* el resultado que unirá de manera profunda derivación e integración y permitirá el cálculo sistemático de áreas y volúmenes.

A pesar de que los trabajos de Newton y Leibniz suponen un gran avance, hay aspectos del cálculo que todavía no son totalmente rigurosos. En la época de Newton no se había inventado el concepto de límite. Newton mismo hablaba de *infinitesimales*, y los usaba de manera poco rigurosa; véase la sección 1.9 para más información sobre este punto. Hay que esperar a la formalización del concepto de límite, ya entrado el siglo XIX, para que el concepto de integral se defina con total rigor. Cauchy formaliza el concepto de límite y sobre él Riemann establece una formalización definitiva. La formulación de Riemmann permite calcular integrales de funciones bastante generales: funciones continuas, acotadas, continuas a trozos, y otras de más complejidad. A continuación, planteamos el problema general del área.

P1: Área bajo una función continua. Dada una función $f(x)$ continua y positiva en un intervalo $[a, b]$, encontrar el área encerrada entre $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

La figura 1.2 ilustra el planteamiento del problema: hallar el área de la zona rayada.

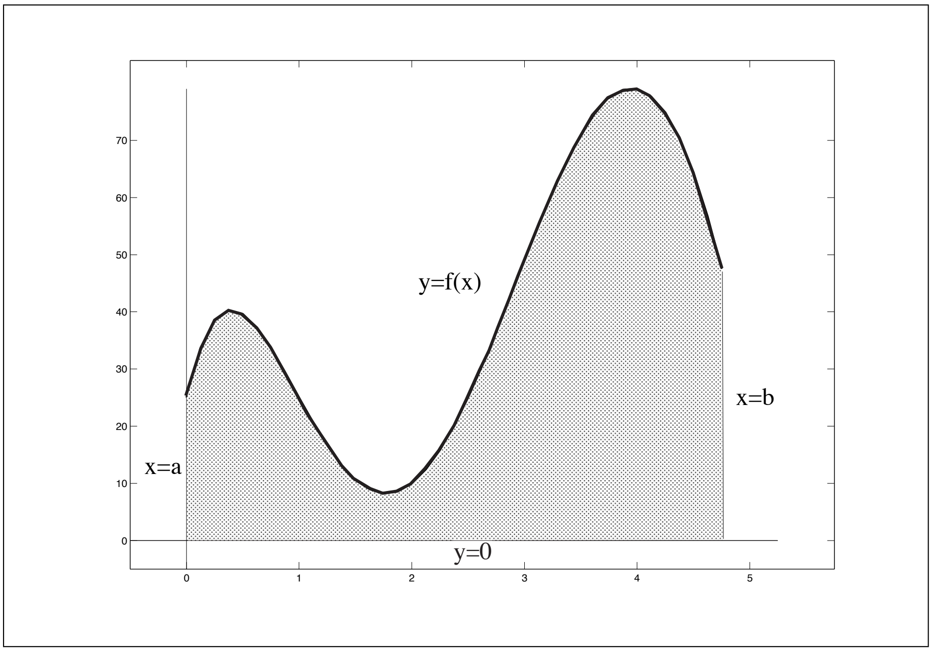

Figura 1.2: Área bajo una curva.

Como veremos más adelante, no es necesario que la función sea positiva ni continua, pero empezamos por este tipo de funciones para hacer el problema suficientemente asequible.

1.2 Aproximación del área por vía de rectángulos

A lo largo de esta sección vamos a desarrollar la teoría de la integral de Riemann, que, como dijimos, formaliza el concepto de *integral definida*. A pesar de todo el tiempo que ha pasado desde Eudoxo, la formalización de Riemann se basa todavía en la aproximación del área delimitada por una curva por figuras más simples, en este caso tan simples como rectángulos. Obviamente, el éxito de su formalización está en explicar con rigor los pasos al límite y las condiciones de integrabilidad. En la siguiente sección se estudia las particiones de intervalos, que son necesarias más tarde para la construcción de los rectángulos.

1.2.1 Particiones de intervalos

Definición 1.2.1 Partición. Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se llama *partición* de $[a, b]$ a una colección finita de puntos del intervalo, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tales que $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. Se llama *diámetro* de la partición al número $d = \text{mín}\{x_i - x_{i-1} \,|\, i = 1, \cdots, n\}$.

Es obvio que las particiones de un intervalo no son únicas; de hecho, hay infinitas particiones de un mismo intervalo. Nos interesan un tipo especial de particiones, que definimos a continuación.

Definición 1.2.2 Partición regulares. Dado un intervalo $[a, b]$, la partición que consiste en dividir en n subintervalos iguales $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1 \ldots n\}$ el intervalo entero se llama partición regular. La partición se designa por P_n y su diámetro es $d = 1/n$.

Ejercicio 1.2.3 Escribir la expresión exacta de los puntos x_i para una partición regular del intervalo $[a, b]$ con n puntos.

Definición 1.2.4 Ordenación de particiones. Dadas dos particiones P y Q se dice que P es un refinamiento de Q o que es más fina que Q si todo punto de Q es un punto de P. Se escribe $Q \subseteq P$.

Las particiones están definidas en base a la relación de inclusión de conjuntos. Esto sugiere que las relaciones se pueden ordenar entre sí, al menos parcialmente. Una *relación* sobre un conjunto se dice que es de *orden* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es de *orden total* si todo par de elementos del conjunto están relacionados. Es de *orden parcial* si no es de orden total.

Problema 1.2.5 Demostrar que la relación ser más fina que en el conjunto de las particiones es una relación de orden parcial. Prueba que no es de orden total.

Intuitivamente, puede parecer que siempre se puede encontrar una partición regular más fina que una dada. Esto no es cierto en general. El problema siguiente propone investigar esta cuestión.

Problema 1.2.6 Dado el intervalo $[0, 1]$, encontrar una partición arbitraria Q para la que no exista una partición regular P_n más fina que Q.

1.2.2 Resultados previos de funciones continuas

Dado que vamos a resolver el problema general del área $P1$ para funciones continuas, repasaremos brevemente algunas definiciones y resultados de funciones continuas.

Definición 1.2.7 Función continua en un punto. Una función $f(x)$ es continua en x_0 si: