(a) $f(x)$ está definida en x_0;

(b) existe el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y este es igual a $f(x_0)$.

Definición 2.2.8 Función continua en un intervalo $[a,b]$. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ si lo es en todo punto $x_0 \in (a,b)$ y además es continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Teorema 2.2.9 ***Teorema de Weierstrass de los valores extremos (resultado previo).*** *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f alcanza el mínimo y el máximo en el intervalo $[a,b]$.*

Teorema 2.2.10 ***Teorema de los valores intermedios (resultado previo).*** *Si f es continua en $[a,b]$ y v es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = v$.*

Problema 2.2.11 Sea la función $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Probar que el teorema se cumple el teorema de Weierstrass en el intervalo $[0,1]$, pero no en el intervalo $(0,1)$.

2.2.3 Integral definida para funciones continuas en un intervalo $[a,b]$

La idea de Riemann fue la de aproximar el área de la curva por dos tipos de rectángulos, unos que están estrictamente por abajo de la curva, y otros estrictamente por encima. El número de rectángulos va creciendo y aproxima con más exactitud el valor del área. Estamos de nuevo ante la idea de cálculo de áreas por exhauscíón, pero con más rigor. Veamos cómo se formalizan estas ideas.

Definición 2.2.12 (Sumas inferiores y superiores) Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Las *sumas inferior* y *superior* de f en relación a P, denotadas $L(P,f)$ y $U(P,f)$, respectivamente, se definen (figuras 2.3 y 2.4) como:

- $L(P,f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i$, donde $m_i = \text{mín}\{f(x) \,|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$;
- $U(P,f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i$, donde $M_i = \text{máx}\{f(x) \,|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$;

En las figuras 2.3 y 2.4 observamos que tanto las sumas inferiores como las superiores son sumas de las áreas de los rectángulos de base $x_i - x_{i-1}$ y alturas m_i o M_i, respectivamente. El área de la región comprendida entre la curva $f(x)$ y el eje OX entre los extremos a y b será mayor o igual que cualquier suma inferior, y será menor o igual que cualquier suma superior de f. En estas figuras aparece una partición regular, pero sería igual para particiones arbitrarias.

Ejemplo 2.2.13 Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función constante $f(x) = c$, donde c es una constante. Hallar $L(P_n, f)$ y $U(P_n, f)$ para todo n.

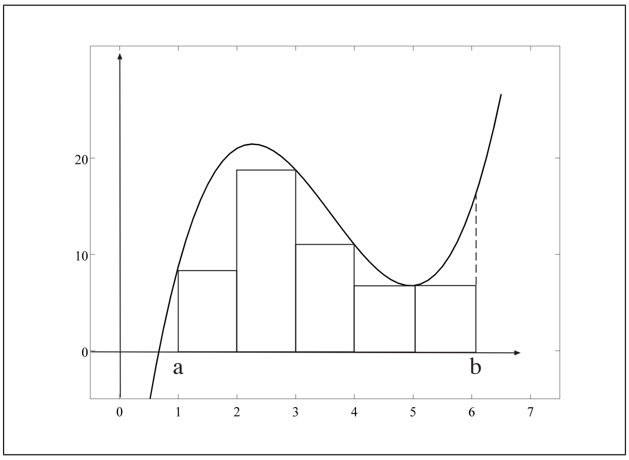

Figura 2.3: Una suma inferior.

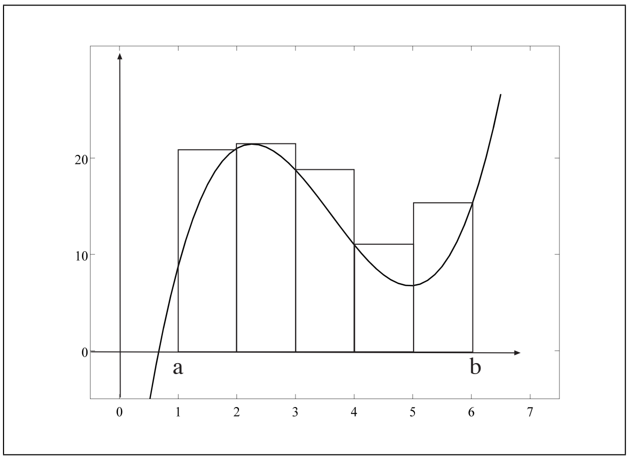

Figura 2.4: Una suma superior.

Ejercicio 2.2.14 Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función identidad $f(x) = x$ definida en $[0,1]$. Hallar $L(P_n, f)$ y $U(P_n, f)$ para todo n.

Teorema 2.2.15 *Sean P, Q dos particiones arbitrarias del intervalo $[a,b]$ de modo que P es un refinamiento de Q; además, sea f una función continua en $[a,b]$. Probar lo siguiente:*

(a) $L(P, f) \leq U(P, f)$;

(b) $L(Q, f) \leq L(P, f)$ *y* $U(P, f) \leq U(Q, f)$.

Ejercicio 2.2.16 Sea P_n una partición regular del intervalo $[a,b]$ y f una función continua en $[a,b]$. Se consideran las sucesiones de números $a_n = L(P_n, f)$ y $b_n = U(P_n, f)$. Probar o refutar que a_n es creciente y que b_n es decreciente.

Ejercicio 2.2.17 Sean P, Q dos particiones arbitrarias de un intervalo $[a,b]$. Probar que siempre se cumple que $L(P, f) \leq U(Q, f)$ y que $L(Q, f) \leq U(P, f)$.

El resultado del teorema 2.2.15 nos dice que según se va refinando la partición el valor de la suma inferior crece y el de la suma superior decrece. Es intuitivo esperar que en el límite ambas coincidan y que ese valor común sea el área de la curva. La siguiente definición pide que la sumas inferior y superior se aproximen la una a la otra exigiendo que su diferencia se pueda hacer *arbitrariamente* pequeña.

Definición 2.2.18 Definición de integral definida (1). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se dice que f es *integrable* en [a,b] si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

Observación 2.2.19 Esta definición, aunque recoge la idea intuitiva de que los rectángulos se confunden con la curva en el límite, no es práctica en absoluto para calcular integrales. El principal escollo está en que la partición puede ser arbitraria. Las particiones manejables son las regulares, que tienen una expresión algebraica sencilla. Mientras no se diga lo contrario, se trabajará con *particiones regulares.* Está fuera del alcance de este curso, pero es posible probar que los resultados de integración formulados para particiones regulares son igual de generales que para particiones arbitrarias.