

# **Resistencia de Materiales Aplicada**

**Primera Edición**

Alejandro M. Mayori M.

# Resistencia de Materiales Aplicada

## Primera Edición

Alejandro M. Mayori M.  
Universidad Mayor de San Andrés

Revisión Técnica:

Editorial Yucatán Hermosa

La Paz Bolivia

Impreso en La Paz – Bolivia

## **Dedicatoria**

**A mis hijas Mariel y Marian  
A mi esposa, padres y hermanos**

## **Prefacio**

El presente libro estudia los temas más importantes de la Resistencia de Materiales, con énfasis en aplicaciones, solución de problemas y diseño de elementos estructurales y dispositivos mecánicos. El presente texto está orientado para alumnos de Ingeniería del segundo o tercer año. Es recomendable que los estudiantes que lean este texto hayan completado un curso de estática y otro sobre las propiedades de momentos y centroides de áreas planas.

En el presente libro, la resistencia de materiales se basa en conceptos básicos y en el uso de conceptos simplificados de los cuales se deducen las ecuaciones de modelos matemáticos.

En la mayoría de los capítulos el objetivo principal es la determinación de los esfuerzos normales y cortantes, para luego determinar sus valores máximos y finalmente el cálculo de las correspondientes deformaciones. Se estudian cargas de Tracción, Corte, Torsión y Flexión. Estos tipos de carga se complementan con un apreciable número de ejemplos o problemas resueltos y luego con problemas propuestos para que el alumno refuerce su comprensión.

Las unidades que se emplean en el presente libro son las unidades métricas y para la solución de muchos de los problemas se usó software matemático como MATHCAD.

# ÍNDICE

## 1.- Conceptos Generales

- 1.1.- Introducción
- 1.2.- Concepto de Esfuerzo (Esfuerzo)
- 1.3.- Concepto de Deformación por Esfuerzos Normales
- 1.4.- Coeficiente de Poisson
- 1.5.- Concepto de Deformación por Esfuerzos Cortantes
- 1.6.- Propiedades Mecánicas de los Materiales
- 1.7.- Esfuerzo admisible - Coeficiente de Seguridad
- 1.8.- Modulo de Elasticidad - Ecuación de Hooke
- 1.9.- Cargas Estáticas y Variables
- 1.10.- Esfuerzo admisible para Cargas Variables

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

## 2.- Tracción Compresión

- 2.1.- Introducción
- 2.2.- Esfuerzos en tracción compresión (Cargas en una dimensión)
- 2.3.- Esfuerzos principales (Cargas en una dimensión)
- 2.4.- Deformaciones (Cargas en una dimensión)
- 2.5.- Esfuerzos en tracción compresión (Cargas en dos dimensiones)
- 2.6.- Esfuerzos principales (Cargas en dos dimensiones)
- 2.7.- Deformaciones (Cargas en dos dimensiones)
- 2.8.- Cargas debido al Peso Propio
- 2.9.- Deformaciones debido a la temperatura
- 2.10.- Problemas Estáticamente Indeterminados (Hiperestáticos)

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

## 3.- Esfuerzos de Corte

- 3.1.- Introducción
- 3.2.- Esfuerzos en corte
- 3.3.- Esfuerzos principales
- 3.4.- Deformaciones
- 3.5.- Problemas Estáticamente Indeterminados (Hiperestáticos)

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

## 4.- Torsión

- 4.1.- Introducción
- 4.2.- Calculo de Esfuerzos
- 4.3.- Deformaciones
- 4.4.- Problemas Estáticamente Indeterminados (Hiperestáticos)

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

## **5.- Flexión - Fuerza Cortante y Momento Flector**

- 5.1.- Introducción
- 5.2.- Tipos de Cargas
- 5.3.- Carga puntual equivalente de distribuida
- 5.4.- Tipos de Apoyos
- 5.5.- Tipos de Vigas
- 5.6.- Cálculo de reacciones
- 5.7.- Momento Flector y Fuerza Cortante
- 5.8.- Relación entre el momento Flector y la Fuerza Cortante
- 5.9.- Cálculo del momento Flector y la Fuerza Cortante
- 5.10.- Valores del Momento Flector y la Fuerza Cortante en los extremos
- 5.11.- Cálculo de Momentos por funciones de Singularidad

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

## **6.- Flexión – Esfuerzos Normales y Cortantes**

- 6.1.- Introducción
- 6.2.- Esfuerzos normales en flexión
- 6.3.- Esfuerzo cortantes en flexión
- 6.4.- Perfiles preferidos para secciones transversales de vigas

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

## **7.- Deformaciones en flexión**

- 7.1.- Introducción
- 7.2.- método de la doble integración
- 7.3.- Método de Superposición
- 7.4.- Método del Área del Diagrama de Momentos
- 7.5.- Sistemas Hiperestáticos.-

PROBLEMAS RESUELTOS

- a) Método de la doble integración
- b) Método de Superposición
- c) Método del Área del diagrama de Momentos
- d) Sistemas hiperestáticos

PROBLEMAS PROPUESTOS

- a) Método de la doble integración
- b) Método de superposición
- c) Sistemas hiperestáticos

## **8.- Métodos Energéticos**

- 8.1.- Introducción
- 8.2.- Trabajo
- 8.3.- Energía Potencial
- 8.4.- Ecuaciones de la energía
- 8.5.- Teorema de Castigliano

PROBLEMAS RESUELTOS

## PROBLEMAS PROPUESTOS

### **9.- Esfuerzos Combinados**

- 9.1.- Introducción
- 9.2.- Ecuaciones para hallar el esfuerzo en cualquier dirección
- 9.3.- Circulo de Mohr
- 9.4.- Esfuerzos principales
- 9.5.- Ecuaciones para hallar la deformada en cualquier dirección
- 9.6.- Combinación de Esfuerzos
- 9.7.- Combinación de Deformaciones

## PROBLEMAS RESUELTOS

## PROBLEMAS PROPUESTOS

### **10.- Pandeo de Columnas**

- 10.1.- Introducción y Objetivos
- 10.2.- Tipos de apoyos
- 10.3.- Tipos de Columnas
- 10.4.- Falla por pandeo (Formula de Euler)
- 10.5.- Falla por Compresión y por pandeo
- 10.6.- Formula de La Secante

Problemas Resueltos

Problemas Resueltos

# 1.- CONCEPTOS GENERALES

## 1.1.- INTRODUCCIÓN

### 1.1.1 Propósito de la Resistencia de los Materiales

En los cursos de estática se consideran los cuerpos indeformables, sin embargo en la realidad los cuerpos sufren deformaciones. La Resistencia de los Materiales analiza a los cuerpos como deformables, predice estas deformaciones y permite encontrar los materiales y dimensiones óptimos. Con la Resistencia de los Materiales se puede verificar la habilidad de los elementos para soportar las cargas a las que están sometidos y se pueden diseñar elementos seguros y baratos.

Entonces en lo posterior se consideran a todos los cuerpos no rígidos sino elásticos, es decir, que cualquier carga producirá en ellos deformaciones que en magnitud son pequeñas comparadas con las dimensiones globales del cuerpo.

### 1.1.2. Tipos de elementos

En el presente texto los cuerpos se clasificaran en tres tipos:

a) Barra: Es un cuerpo que tiene dos dimensiones pequeñas en comparación con la tercera. La línea que une los centros de gravedad de sus secciones transversales se denomina eje centroidal de la barra



Fig. 1.1.- Barra

b) Placa: Es un cuerpo que tiene una dimensión pequeña en comparación con las otras dos.



Fig. 1.2.- Placa

c) Bloque: Es un cuerpo cuyas tres dimensiones son del mismo orden.



### **1.1.3. Tipos de problemas**

La Resistencia de Materiales tiene como finalidad el cálculo de los cuerpos sometidos a cargas y los problemas a resolver son de dos tipos:

- a) Dimensionamiento.- Cuando se busca seleccionar el material, las formas y dimensiones más adecuadas de una pieza, de manera que ésta pueda trabajar con seguridad, en buen estado y con costos adecuados.
- b) Verificación.- Cuando una pieza tiene el material, las formas y dimensiones prefijadas y es necesario conocer si estas son las adecuadas para resistir el estado de solicitaciones actuantes.

### **1.1.4. Hipótesis fundamentales**

En el presente texto se asumen como ciertas las siguientes hipótesis:

- a) Los materiales se consideran continuos.- La mayoría de los materiales cumple con esta hipótesis aún cuando existan poros o se considere la discontinuidad de la estructura de la materia, compuesta por átomos que no están en contacto rígido entre sí, ya que existen espacios entre ellos y fuerzas que los mantienen vinculados, formando una red ordenada.
- b) Los materiales se consideran homogéneos.- Con esta hipótesis se consideran las propiedades idénticas en todos los puntos.
- c) Los materiales son isótropos.- Con esta hipótesis se consideran las propiedades idénticas en todas las direcciones. Los metales son materiales homogéneos e isótropos y la madera, el hormigón y la piedra no lo son.
- d) Las fuerzas interiores que preceden a las cargas son nulas.- Las fuerzas interiores entre las partículas del material se oponen al cambio de la forma y dimensiones del cuerpo sometido a cargas. Al hablar de fuerzas interiores no consideramos las fuerzas moleculares que existen en un sólido no sometido a cargas.
- e) Es válido el principio de superposición de efectos.- Debido a que las deformaciones de los cuerpos son pequeños en comparación con las dimensiones del mismo, las ecuaciones de equilibrio correspondiente a un cuerpo cargado pueden plantearse sobre su configuración inicial, es decir, sin deformaciones, y que las deformaciones son proporcionales a las cargas.
- f) Es aplicable el principio de Saint Venant.- Según este principio las fuerzas interiores en los puntos de un sólido, situados lejos de los lugares de aplicación de las cargas no

dependen del modo de aplicación de las mismas, por lo que se puede sustituir un sistema de fuerzas por otro equivalente

g) Las cargas son estáticas o cuasi-estáticas.- Es decir que no varían con el tiempo

### 1.1.5. Metodología

Para el calculo de elementos y sistemas nunca se podrán incluir todas las variables por lo que se deben despreciar aquellas que no son relevantes. Por ejemplo, en el calculo del cable de un ascensor se deben incluir el peso de la cabina, su aceleración y el peso del cable, pero se pueden despreciar la resistencia al aire del ascensor, la presión barométrica a distintas alturas, la variación de la temperatura con la altura, etc.

Adicionalmente se deberán realizar ciertas simplificaciones en:

- a) La geometría del objeto. Así los sólidos muy largos se idealizaran como barras.
- b) Los vínculos. Usualmente se consideran ideales.
- c) Los sistemas de fuerzas aplicadas. Las cargas concentradas prácticamente no existen en la realidad, sino que son las resultantes de fuertes presiones localizadas en zonas pequeñas.
- d) Las propiedades de los materiales.

## 1.2. FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS

Los elementos de estructuras o maquinas están sometidos a la acción de fuerzas y momentos externos. Estas Fuerzas y Momentos externos generan en las secciones internas de los cuerpos, Fuerzas y Momentos Internos que cuando sobrepasan a las fuerzas de atracción de las moléculas del material producen la separación o rotura de la pieza. Las Fuerzas y los Momentos de cada sección internos se pueden hallar generalmente con las ecuaciones de la estática

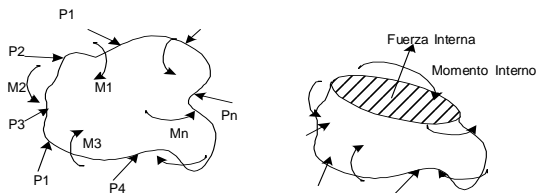


Fig. 1.3.- Fuerza y Momento Internos

La magnitud y dirección de la Fuerza y el Momento internos dependen de la sección elegida, pero pueden descomponerse en una dirección normal y en otra tangencial a la sección. Estas componentes definen los diferentes tipos de carga. Así la componente de la Fuerza Normal a la sección producirá cargas Normales de Tracción o Compresión, la componente de la Fuerza Tangencial a la sección producirá cargas de Corte o Tangenciales, la componente del Momento Normal a la sección producirá cargas de Torsión y la componente del Momento Tangencial a la sección producirá cargas de Flexión.

### 1.3. CONCEPTO DE ESFUERZO O TENSIÓN

Considérese una barra sometida a la acción de dos fuerzas iguales, opuestas y colineales en sus extremos. Se verifica el equilibrio:  $P - P = 0$

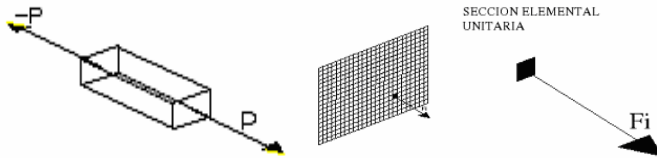


Fig. 1.4.- Fuerzas Moleculares

Si se aumenta el tamaño de una sección de la barra hasta ver sus moléculas. La fuerza externa se distribuye en pequeñas fuerzas tirando de cada molécula, que tratan de separarla de sus vecinas. Sin embargo la atracción entre moléculas opone resistencia con una fuerza igual y contraria, lo que finalmente impide que las moléculas se alejen entre si. Tomando un par de ellas se verifica que:

$$-P_i \quad F_i - F_i \quad P_i \tag{1.1}$$

Donde  $P_i$  es la acción sobre cada molécula generada por las fuerzas “P” y “ $F_i$ ” las reacciones que opone el material generada por la atracción molecular (o Atómica).

Aumentando “P” aumenta la reacción  $F_i$ , que podrá crecer hasta un determinado límite, más allá del cual las moléculas se separan irremediablemente, y como consecuencia la barra se deforma permanentemente o se separa.

#### 1.3.1. Hipótesis de Navier

A fin de facilitar el estudio del comportamiento de los sólidos homogéneos frente a los distintos esfuerzos, Navier propuso la siguiente hipótesis: Un sólido homogéneo puede imaginárselo como una sucesión de innumerables secciones transversales paralelas

entre sí y perpendiculares a su eje longitudinal (Parecido a varios naipes firmemente pegados entre sí). Cada sección transversal sería tan delgada como el diámetro de un átomo. Al mirar la barra de costado veríamos:

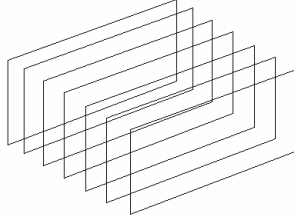


Fig. 1.5.- Hipótesis de Navier

Entonces de acuerdo al modelo de Navier, en un sólido homogéneo cada sección transversal es una especie de placa con el espesor de un átomo, donde todos los átomos están perfectamente ordenados y dispuestos según un arreglo matricial cuadrado. Sobre cada átomo de cada una de las secciones, actuará una fuerza  $P_i$ , de manera que podríamos escribir :

$$P_i = \frac{P}{n} \quad (1.2)$$

$$P = \sum_{i=0}^n P_i \quad (1.3)$$

Donde : “n” el número de átomos que hay en la sección transversal.

Este modelo atómico explica el comportamiento de un sólido ideal. Sin embargo los materiales reales distan mucho de esta definición, por lo que en un modelo más “macro” se divide a cada sección transversal en un número finito “N” de áreas unitarias elementales y que al aplicar una fuerza P esta no se concentra en un solo punto sino que se distribuye en toda el área de la sección dando como resultado una fuerza  $F_i$  sobre cada área unitaria. La fuerza que soporta cada unidad de área es el Esfuerzo.

$$Esfuerzo = \frac{Fuerza}{Area} = \frac{F}{A} \quad (1.4)$$

### 1.3.2.- Esfuerzos Normales ( $\sigma$ )

Aquellos esfuerzos o fuerzas que soporta cada unidad de área cuya dirección es perpendicular a la sección transversal se conocen como esfuerzos normales. Para

fuerzas de compresión el esfuerzo normal será negativo y para fuerzas de tracción el esfuerzo normal será positivo.

En la figura 6, se muestran dos perfiles unidos por un perno que soportan la acción de dos fuerzas opuestas  $P$  y paralelas al eje del perno. En las secciones transversales al perno aparecen fuerzas internas perpendiculares a estas secciones que se distribuyen generando solo esfuerzos normales.

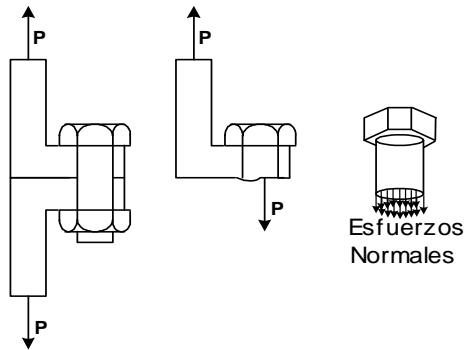


Fig. 1.6.- Esfuerzos Normales

### 1.3.2.- Esfuerzos Cortantes ( $\tau$ )

Aquellos esfuerzos o fuerzas que soporta cada unidad de área cuya dirección es tangencial a la sección transversal se conocen como esfuerzos cortantes. Los esfuerzos de corte no son positivos ni negativos.

En la figura 7, se muestran dos piezas unidas por un perno que soportan la acción de dos fuerzas opuestas  $P$  y perpendiculares al eje del perno. En las secciones transversales al perno aparecen fuerzas internas tangenciales a ellas que se distribuyen generando solo esfuerzos cortantes.

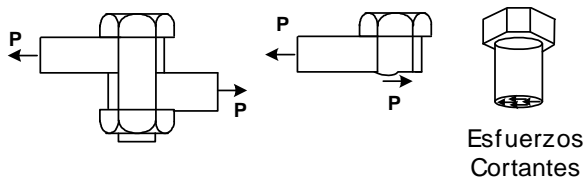


Fig. 1.7.- Esfuerzos Cortantes

Los esfuerzos normales y cortantes aparecen por lo general simultáneamente y sus valores no son constantes en una sección sino que varían de un punto a otro.

## 1.4. RESISTENCIA DE LOS CUERPOS

Los esfuerzos que un cuerpo puede soportar dependen únicamente del material Sin embargo las Fuerzas y Momentos que un cuerpo puede soportar dependen además del material, de sus dimensiones.

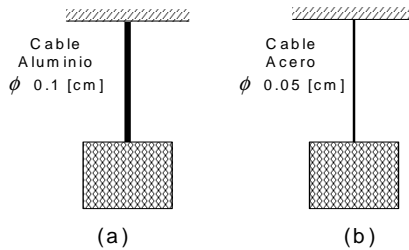


Fig. 1.8.- Resistencia de Cables

A modo de ilustración, se pide elegir el cable mas resistente de dos cables, el primero de aluminio de 1 mm de diámetro y el segundo de acero de 0.5 mm de diámetro. Un breve análisis no sugiere que :

- Si ambos cables tuvieran el mismo diámetro, debido a que el acero es más resistente que el aluminio se debería elegir al segundo
- Si el material fuera el mismo para ambos cables, el de mayor resistencia fuera el de mayor diámetro y por lo tanto se debería elegir al primero

Ahora bien como los materiales y las dimensiones son diferentes la elección del cable con mayor resistencia se complica. La elección se analiza en la sección de problemas resueltos.

## 1.5. DENSIDAD O FLUJO DE ESFUERZOS

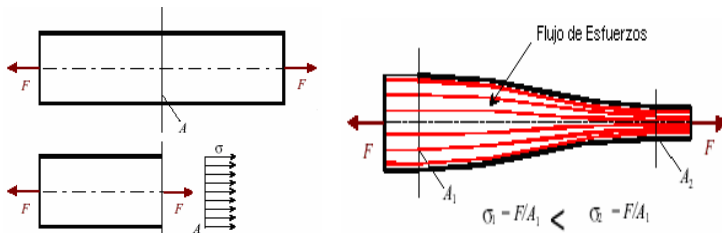


Fig. 1.9.- Densidad de Esfuerzos

Si una barra de sección constante es sometida a cargas de tracción  $F$ , en cualquier sección transversal aparece una fuerza interna de igual magnitud  $F$  que equilibra a la externa y que se origina solo esfuerzos normales  $\sigma = F/A$  de magnitud constante.

Cuando una barra de sección variable se somete a cargas de tracción  $F$ , en cualquier sección transversal aparece una fuerza interna  $F$  que equilibra a la externa que se distribuye en esfuerzos normales. Sin embargo la magnitud de estos esfuerzos es variable debido a la variación del área. Estos esfuerzos son mayores donde las secciones normales son las menores y viceversa. Dibujando líneas equidistantes de la periferia se puede apreciar que ellas tienen mayor “concentración” o “densidad” donde el área es menor. La magnitud de los esfuerzos es proporcional a la concentración de líneas equidistantes. Este fenómeno es similar a la velocidad que adquiere un fluido en una tubería por lo que también es conocido por flujo de esfuerzos.

### 1.6. CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS

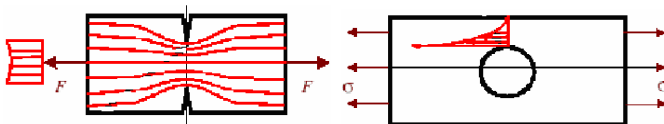


Fig. 1.10.- Concentración de Esfuerzos

Los cambios o variaciones de las secciones transversales de una pieza y especialmente las variaciones bruscas, resultan en la magnificación de los Esfuerzos efecto conocido como Concentración de Esfuerzos. Las hendiduras, agujeros y cambios de sección bruscos son Concentradores de Esfuerzos. Se ha podido verificar que por ejemplo un agujero circular en una placa plana incrementa los esfuerzos hasta tres veces.

### 1.7. TIPOS DE SOLICITACIÓN O CARGA

Los tipos de sollicitación o carga son:

#### 1.7.1.- Cargas Axiales de Tracción o Compresión

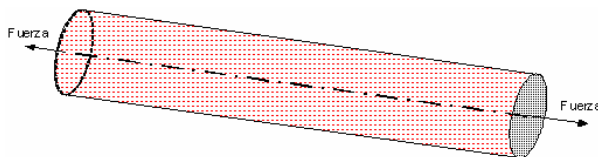


Fig. 1.11.- Barra sometida a cargas de tracción

Una barra recta esta sometida a cargas de tracción o compresión sometida a fuerzas paralelas a su eje centroidal. Dependiendo si la carga tiende a estirar o a comprimir la pieza, la carga será de tracción o compresión.

### 1.7.2.- Cargas Tangenciales o de Corte

Un cuerpo esta sometido a cargas tangenciales o de corte cuando sus caras o secciones internas soportan fuerzas tangenciales.

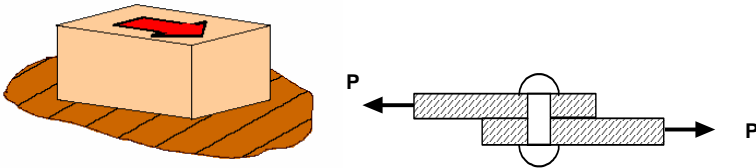


Fig. 1.12.- Cuerpos sometidos a cargas de Tangenciales o de Corte

### 1.7.3.- Cargas de Torsión

Una barra esta sometida a cargas de torsión cuando en sus extremos están aplicados momentos con dirección paralela al centroidal.

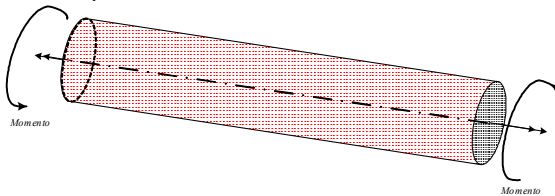


Fig. 1.13.- Barra sometida a cargas de Torsión

### 1.7.4.- Cargas de Flexión

Una viga esta sometida a cargas de flexión cuando soporta fuerzas y momentos con dirección perpendicular a su eje centroidal

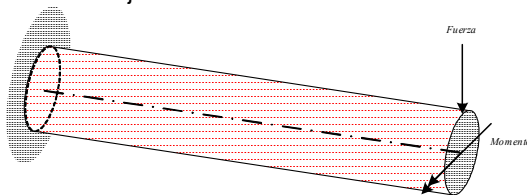


Fig. 1.14.- Viga sometida a cargas de Flexión



### 1.7.5.- Cargas Combinadas

Los cuerpos y elementos bajo condiciones de carga reales presentaran la combinación de los anteriores tipos de carga. En el presente texto inicialmente se analizaran los tipos de carga individual separadamente El cómo combinar los diferentes tipos de carga, se analizar posteriormente.

## 1.8. DEFORMACIONES

Las deformaciones que presentan los cuerpos dependen de los tipos de carga a los que están sometidos

### 1.8.1.- Deformación provocada por Cargas de Axiales

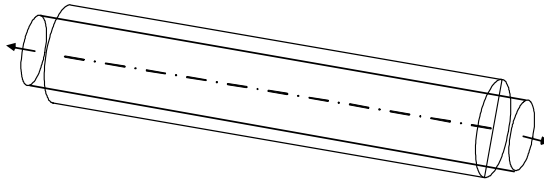


Fig. 1.15.- Deformación provocada por Cargas Axiales

Una barra sometida a cargas axiales además de experimentar deformación según la Dirección de la fuerza, el cuerpo también se deforma en las direcciones normales a ella. La tracción provoca alargamiento con adelgazamiento y la compresión acortamiento con ensanchamiento

Las deformaciones se definen como:

$\delta = l_f - l_o$	Deformación longitudinal
$\varepsilon = (l_f - l_o)/l_o$	Deformación longitudinal unitaria
$\delta_q = d_f - d_o$	Deformación transversal
$\varepsilon_q = (d_f - d_o)/d_o$	Deformación transversal unitaria
$l_f, l_o, d_f$ y $d_o$	Dimensiones longitudinal y normal final e inicial

### 1.8.2. Coeficiente de Poisson

Se define como coeficiente o módulo de Poisson a la relación entre las deformaciones longitudinal y transversal unitarias

$$\nu = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} \quad (1.5)$$

El coeficiente de Poisson vale de 0,25 a 0,35 en los materiales metálicos, de 0,1 a 0,25 para el concreto y para los elastómeros y materiales plásticos hasta 0,5.

### 1.8.3.- Deformación provocada por Cargas de Corte

Las cuerpos sometidos a Cargas de Corte mas que deformarse (cambio de dimensiones) se distorsionan (cambio de forma).

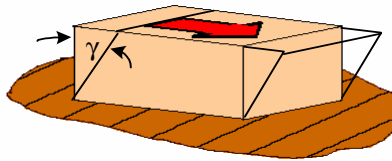


Fig. 1.16.- Distorsión provocada por Cargas de Corte

La deformación se define como:

$\gamma$       Angulo de inclinación de las caras

### 1.8.4.- Deformación provocada por Cargas de Torsión

Las barras sometidas a cargas de Torsión no presentan deformaciones longitudinales sino rotaciones o deformaciones angulares. Las secciones transversales giran una respecto a otra.

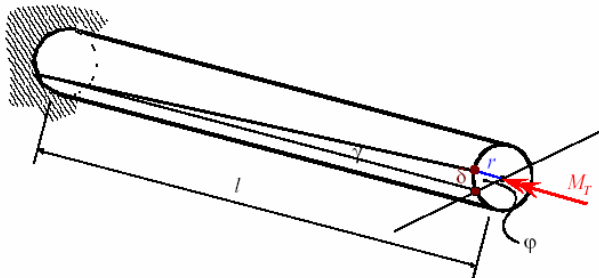


Fig. 1.17.- Deformación provocada por Cargas de Torsión

La deformación se define como:

$\phi$       Angulo de rotación entre extremos de la barra

### 1.8.5.- Deformación provocada por Cargas de Flexión

Los cuerpos generalmente rectos sometidos a cargas de Flexión se vuelven curvos por lo que presentan deformaciones lineales y angulares.

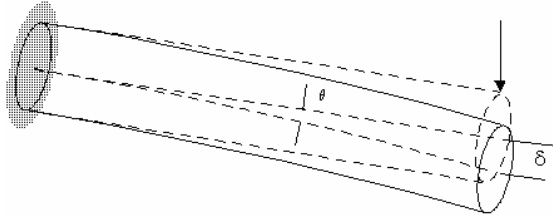


Fig. 1.18.- Deformación provocada por Cargas de Flexión

Las deformaciones se definen como:

$\Delta$	Deformación lineal
$\theta$	Deformación angular

## 1.9.- RELACIÓN ESFUERZO NORMAL – DEFORMACIÓN LONGITUDINAL.

### 1.9.1.- Ensayo de tracción

El ensayo de tracción consiste en someter a una barra a cargas axiales y graduales de tracción y hallar las deformaciones que estas producen. Para ello en una máquina de ensayos se traccionan probetas normalizadas para poder repetir internacionalmente el ensayo. Para los aceros, la probeta tiene en su parte central una sección transversal circular con un área de 1 cm<sup>2</sup>, (diámetro = 11,284 mm). Esta sección se ensancha gradualmente en sus extremos para una mejor sujeción a las mordazas de la máquina de ensayos.

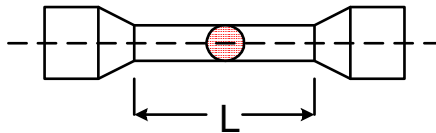


Fig. 1.19.- Probeta para el ensayo de tracción

### 1.9.2.- Grafico Esfuerzo – Deformación

La relación entre esfuerzos normales vs. deformaciones unitarias para el caso del acero común (acero dulce) presenta una forma similar al de la figura.

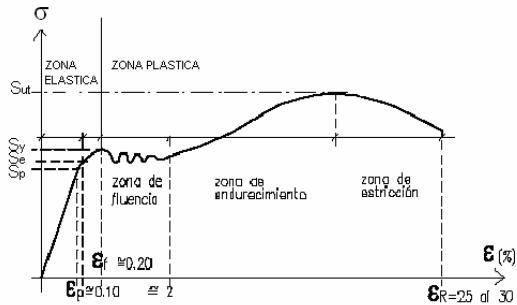


Fig. 1.20.- Diagrama Esfuerzo - Deformación

### 1.9.3.- Propiedades Mecánicas

En el Diagrama Esfuerzo - Deformación se definen:

- a) Zona elástica.- Zona donde las deformaciones no son permanentes
- b) Zona plástica.- Zona donde las deformaciones son permanentes
- c) Límite de elasticidad  $S_e$ .- Esfuerzo máximo que provoca deformaciones no permanentes
- d) Límite de proporcionalidad  $S_p$ .- Esfuerzo máximo donde hay proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones
- e) Límite de fluencia  $S_y$ .- Esfuerzo que produce una aumento de deformacion sin incremento de esfuerzo

La esfuerzo de proporcionalidad resulta ser aproximadamente el 80% de la esfuerzo de fluencia.

$$\sigma_p = 0.8\sigma_y \quad (1.6)$$

Durante la fluencia se producen deslizamientos relativos entre los cristales y en la superficie de la probeta aparecen las llamadas líneas de Chernov - Lüders, que forman con el eje de la misma un ángulo de 45°.

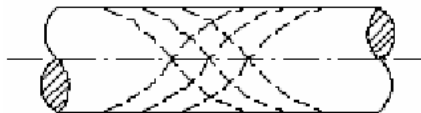


Fig. 1.21.- Líneas de Chernov - Lüders

e) Límite de rotura  $S_{ut}$ .- Sobre pasada la fluencia, el material se endurece y admite un incremento de carga aunque con grandes deformaciones. El límite de rotura es el esfuerzo máximo del gráfico. Este esfuerzo luego disminuye hasta que se produce la rotura o separación física.



Fig. 1.22.- Estricción

f) Coeficiente de estricción lateral  $\psi$ .- Pasado el esfuerzo de rotura  $S_{ut}$ , la sección central de la pieza se reduce por lo que aumentan los esfuerzos (diagrama efectivo) aunque para el cálculo de los esfuerzos se toma el área inicial (diagrama convencional).

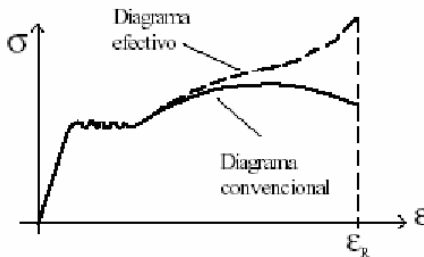


Fig. 1.23.- Diagrama efectivo y convencional

Se define el "coeficiente de estricción lateral", como:

$$\psi = \frac{A_o - A_f}{A_f} \tag{1.7}$$

donde  $A_o$  y  $A_f$  son las áreas inicial y final. En los aceros  $\psi \sim 50\%$

g) Módulo de elasticidad  $E$ .- Es la tangente de la recta en la zona elástica

#### 1.9.4.- Ecuación de Hooke

En la zona elástica

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \quad (1.8)$$

### 1.9.5.- Endurecimiento

Cuando una pieza metálica se descarga en la zona plástica, el esfuerzo desaparece por una recta paralela a la de la zona elástica, quedando una deformación permanente. Si la pieza se carga de nuevo la curva llega al punto N, y la proporcionalidad entre esfuerzos y deformadas se verifica hasta esfuerzos mayores a la fluencia inicial.

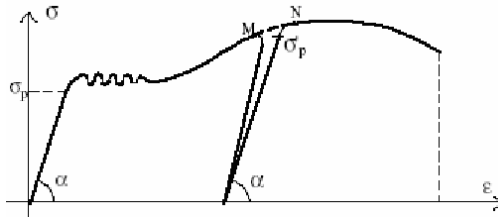


Fig. 1.24.- Endurecimiento mecánico de los metales

Este fenómeno se denomina endurecimiento mecánico o por trabajo en frío y puede lograrse por laminado en frío, trefilado o torsión. El trefilado se utiliza para endurecer alambres o barras circulares finas, y el torsionado para barras redondas. Las características de los aceros endurecidos son:

- Sus límites de proporcionalidad y elasticidad son más elevados que los aceros comunes.
- La deformación de rotura se reduce considerablemente
- No hay una zona de escurrimiento plástico ni un límite de fluencia definido. Este se determina en forma convencional como el esfuerzo para el cual la deformación unitaria permanente es del 0.2 %

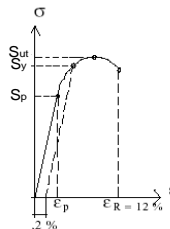


Fig. 1.25.- Límite de fluencia de metales endurecidos

### 1.9.6.- Materiales dúctiles y frágiles

Los materiales como el acero dulce, que alcanzan una gran deformación antes de alcanzar la rotura, se denominan “dúctiles” y los materiales como el acero duro donde la rotura se produce sin grandes deformaciones se denominan “frágiles”.

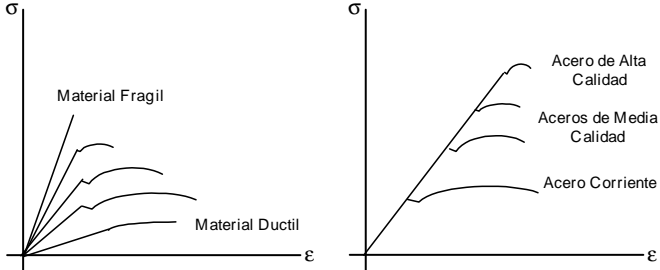


Fig. 1.26.- Materiales dúctiles y frágiles

1.9.7.- Modulo de elasticidad de materiales no metálicos

El diagrama esfuerzo deformación de algunos materiales no presenta un tramo recto (Ej. el hormigón) y se toman tres valores del módulo de elasticidad

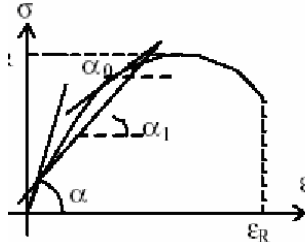


Fig. 1.27.- Diagrama Esfuerzo – Deformación de materiales no metálicos

a) Módulo al origen.- Que es la tangente en el origen

$$E = tg(\alpha) \tag{1.9}$$

b) Módulo instantáneo. Que es la tangente en cada punto

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = tg(\alpha_0) \tag{1.10}$$

c) Módulo secante.- Que es la tangente del ángulo  $\alpha_1$ .

$$E = tg(\alpha_1) \tag{1.11}$$

Para estos materiales, Bach, propone

$$\sigma^k = E\epsilon \tag{1.12}$$

Material	Coefficiente k
Hormigón	$k = 1,15$
Cobre	$k = 1,10$
Latón	$k = 1,085$
Cuero	$k = 0,70$

En el caso particular en que se toma  $k = 1, 0$  se obtiene la ley de Hooke

### 1.9.8.- Diagramas esfuerzo – deformación ideal

Para simplificar el manejo matemático se puede idealizar los diagramas de esfuerzo deformación (Prandtl). Para un material dúctil se toman dos tramos rectos, el primero inclinado correspondiente al período elástico; el otro horizontal, correspondiente al período de fluencia. El período de endurecimiento no interesa porque la deformación al final de la fluencia es tan significativa que el material está en falla antes de llegar a la rotura.

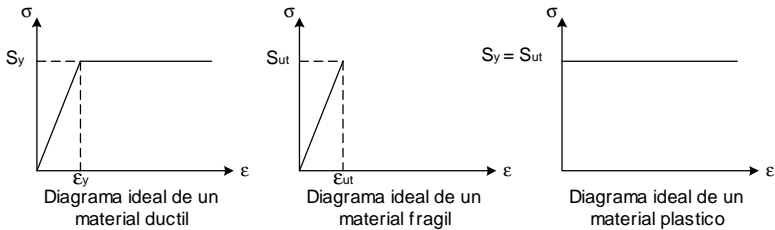


Fig. 1.28.- Diagrama Esfuerzo – Deformación ideal

Para un material frágil el límite de proporcionalidad es muy próximo a la esfuerzo de rotura, prescindiéndose entonces del tramo curvo.

Para materiales plásticos el diagrama es una recta horizontal, lo que significa que sometidos a una carga, se deforman indefinidamente sin incremento de esfuerzo.

## 1.10.- RELACIÓN ESFUERZO CORTANTE – DEFORMACIÓN ANGULAR.

### 1.10.1.- Ensayo de corte

El ensayo de corte consiste en someter a un cuerpo a cargas graduales de corte y hallar las deformaciones que estas producen. Para ello generalmente un paralelepípedo fijo en su parte inferior y de baja altura es sometido a cargas de corte  $P$  en su cara superior.



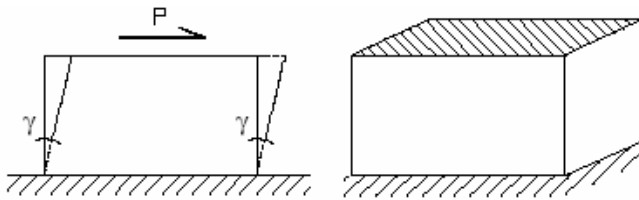


Fig. 1.29.- Probeta para el ensayo de corte

La grafica entre esfuerzos cortantes  $\tau$  y deformaciones  $\gamma$ , es similar a la de esfuerzos normales.

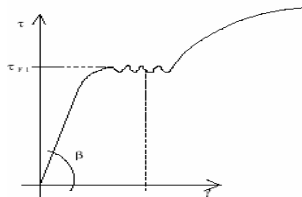


Fig. 1.30.- Grafica esfuerzos cortantes - deformaciones

#### 1.10.2.- Propiedades Mecánicas

En el diagrama se definen:

- a) Zona elástica.- Zona donde las deformaciones no son permanentes
- b) Zona plástica.- Zona donde las deformaciones son permanentes
- c) Límite de elasticidad  $S_e$ '.- Esfuerzo máximo al que el material se comporta elásticamente
- d) Límite de proporcionalidad  $S_p$ '.- Esfuerzo máximo donde se verifica proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones
- e) Límite de fluencia  $S_y$ '.- Esfuerzo que produce una aumento de deformacion sin incremento de esfuerzo
- f) Módulo de elasticidad transversal  $G$ .- Es la tangente de la recta en la zona elástica

#### 1.10.2.- Ecuación de Hooke

En la zona elástica los esfuerzos cortantes son proporcionales a las deformaciones angulares

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{\tau}{\gamma} = G \quad (1.13)$$

Los módulos de elasticidad longitudinal y transversal están relacionados por:

$$E = 2 G ( 1 + \nu ) \quad (1.14)$$

### 1.11.- COEFICIENTE DE SEGURIDAD Y ESFUERZO ADMISIBLE

En una pieza existen numerosas causas de incertidumbres:

- Las hipótesis de cargas
- Las hipótesis de cálculo
- Los errores de cálculos
- Defectos del material
- Errores de las dimensiones
- Errores de ejecución

La falla de una pieza además de una pérdida económica puede provocar pérdidas humanas por lo que se debe buscar la máxima seguridad. La teoría de probabilidades nos enseña que no se puede lograr una seguridad absoluta, lo único que puede hacerse es mantener reducidas las probabilidades de falla. Para ello el esfuerzo máximo de trabajo no debe superar cierto valor.

$$\sigma_{\max} \leq \frac{S_{adm}}{\eta} \quad (1.15)$$

$$\tau_{\max} \leq \frac{S'_{adm}}{\eta} \quad (1.16)$$

donde :

$\eta$  es el "coeficiente de seguridad" un número mayor que la unidad  
 $S_L$  para materiales dúctiles es el límite de fluencia y para frágiles es el límite de rotura

La elección del coeficiente de seguridad es compleja pero disposiciones reglamentarias que tratan sobre construcciones de acero; indican valores que varían entre 1.25 y 1.60. Para estructuras de hormigón armado, los coeficientes de seguridad varían entre 1,75 y 2,10.

### 1.12.- CARGAS ESTÁTICAS Y VARIABLES

#### 1.12.1.- Cargas Estáticas

Se denominan cargas estáticas a aquellas en las que la magnitud de la carga se mantiene invariable con el transcurso del tiempo.

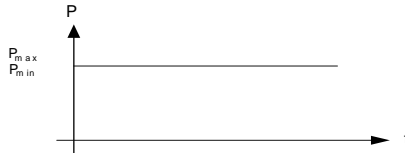


Fig. 1.31.- Carga estática

### 1.12.2.- Cargas Variables

Cargas Variables son aquellas en las que la magnitud de la carga varía con el transcurso del tiempo. Por lo general estas cargas pueden representarse por ondas armónicas.

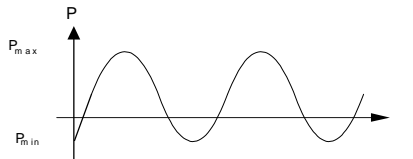


Fig. 1.32.- Carga variable

Se define el valor medio de la carga como a la semisuma de los valores extremos

$$P_{med} = \frac{P_{max} + P_{min}}{2} \quad (1.17)$$

Dos casos especiales de las cargas variables son:

- Cargas Intermitentes.- Son aquellas cuyo valor mínimo es cero.

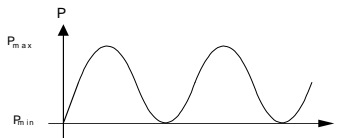


Fig. 1.33.- Carga Intermitente

$$P_{med} = \frac{P_{max}}{2} \quad (1.18)$$

- Cargas Alternantes.- Son aquellas cuyos valores máximos y mínimos tienen igual magnitud pero diferente sentido

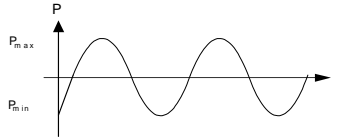


Fig. 1.34.- Carga Alternante

$$P_{med} = \frac{P_{max} + P_{min}}{2} = 0 \quad (1.19)$$

### 1.12.3.- Teoría de Goodman Modificado

Existen varias teorías para verificar la falla frente a cargas variables. En el presente libro se analizará sólo la teoría de Goodman Modificado que exige a los esfuerzos estar dentro de la región sombreada del Diagrama de Goodman

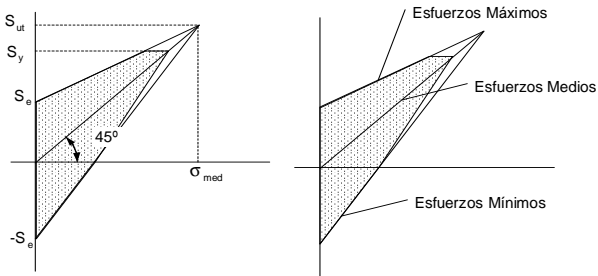
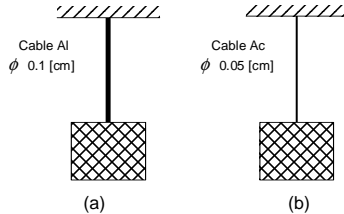


Fig. 1.35.- Diagrama de Goodman

Para construir el diagrama se necesitan sólo tres valores : El Limite de Rotura  $S_{ut}$  , El Limite de Fluencia  $S_y$  y el Limite de Resistencia a la fatiga  $S_e$  cuyo valor aproximado es la mitad de la resistencia a la rotura.

## PROBLEMAS RESUELTOS

1.1. Hallar la capacidad de carga de dos cables metálicos, el primero de Aluminio con un diámetro de 1 mm y el segundo de Acero con un diámetro de 0.5 mm. Tomar  $S_y$  al = 283 Mpa (2884.8 Kg/cm<sup>2</sup>) y  $S_y$  ac= 428 Mpa (4362.8 Kg/cm<sup>2</sup>).



Solución :

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq S_y$$

$$P \leq AS_y$$

De donde  $P_{al} = 22.65 \text{ Kg}$

$P_{ac} = 8.56 \text{ Kg}$

Por lo que el cable de aluminio puede levantar una mayor carga que el de acero.

1.2. Dos barras "a" y "b" con una longitud inicial de 10 cm y 100 cm y un diámetro de 1 cm, se deforman hasta alcanzar longitudes finales de 11 cm y 105 cm respectivamente. Se pide calcular las deformadas longitudinales (total y unitaria)

Solución :

$$\delta = l_f - l_o$$

$$\varepsilon = \delta / l_o = (l_f - l_o) / l_o$$

$$\delta_a = 1 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_a = 0.1 \text{ (10\%)}$$

$$\delta_b = 5 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_b = 0.05 \text{ (5\%)}$$

Nótese que:  $\delta_a < \delta_b$  pero  $\varepsilon_a > \varepsilon_b$

1.3. En el problema anterior ambas se pide calcular las deformadas transversales (total y unitaria). Tomar  $\nu = 0.3$

Solución :

$$\varepsilon_q = -\nu \varepsilon$$

$$d_f = \varepsilon_q d + d$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{qa} &= -0.03 \text{ (3\%)} \\ d_{fa} &= 0.97 \text{ cm} \\ \epsilon_{qb} &= -0.015 \text{ (1.5\%)} \\ d_{fb} &= 0.985 \text{ cm}\end{aligned}$$

1.4. Para el problema 1.2 se pide hallar los esfuerzos a los que están sometidas las piezas si son de acero. Tomar  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Solución :  $\sigma = E \epsilon$

$$\epsilon_a = 0.1 \text{ (10\%)}$$

$$\epsilon_b = 0.05 \text{ (5\%)}$$

Entonces  $\sigma_a = 210000 \text{ Kg/cm}^2$

$$\sigma_b = 105000 \text{ Kg/cm}^2$$

Ningún material soporta estos esfuerzos. Estas deformadas (10 y 5 %) son imposibles.

1.5. Cual es la deformada máxima que puede tener un acero antes de fallar. Tomar  $S_y = 428 \text{ Mpa}$  ( $4362.8 \text{ Kg/cm}^2$ ) y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Solución :  $\sigma < S_y$

$$\sigma = E \epsilon$$

$$\epsilon \leq S_y / E = 0.00207 \text{ (0.2\%)}$$

1.6. Una carga de 100 Kg se aplica a dos piezas de aluminio y acero con el mismo diámetro de 1 cm. Tomando  $E_{\text{acero}} = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $E_{\text{aluminio}} = 0.9 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $S_{y \text{ acero}} = 428 \text{ Mpa}$  ( $4362.8 \text{ Kg/cm}^2$ ) y  $S_{y \text{ aluminio}} = 283 \text{ Mpa}$  ( $2884.8 \text{ Kg/cm}^2$ ). Se pide hallar : La relación de deformadas y La relación de factores de seguridad.

Solución :  $\epsilon = \sigma / E$

$$\eta = S_y / \sigma$$

$$\sigma_{\text{acero}} = P/A = \sigma_{\text{aluminio}}$$

$$\epsilon_{\text{acero}} / \epsilon_{\text{aluminio}} = E_{\text{aluminio}} / E_{\text{acero}} = 0.428 \text{ (42.8 \%)}$$

$$\eta_{\text{acero}} / \eta_{\text{aluminio}} = S_{y \text{ acero}} / S_{y \text{ aluminio}} = 1,512 \text{ (151,2 \%)}$$

Estos resultados muestran primero que el acero se deforma menos que el aluminio y segundo que el acero resiste más que el aluminio

1.7. Hallar los módulos de elasticidad transversales del Acero y del Aluminio. Tomar  $\nu = 0.3$   $E_{\text{ac}} = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $E_{\text{al}} = 0.9 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Solución :  $G = E / [2 ( 1 + \nu )]$

$$G_{\text{acero}} = 8,07 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$G_{\text{aluminio}} = 3,46 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$



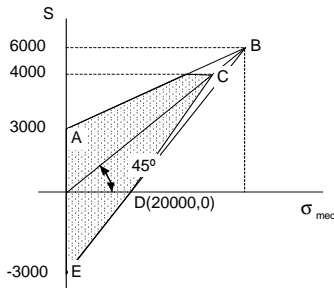
Solución :

- a) Carga estática  $S = S_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$   
 b) Carga intermitente  $S = S_{\max} = x/2 + 3000$   
 para  $x = 2000$   $S = 4000 \text{ Kg/cm}^2$   
 c) Carga alternante  $S = S_e = 3000 \text{ Kg/cm}^2$

1.11. Para las cargas dadas determinar en cada caso si hay o no falla con el material del problema anterior.

$\sigma_{\max} = 3500 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\sigma_{\min} = -3500 \text{ Kg/cm}^2$ .  
 $\sigma_{\max} = 3500 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\sigma_{\min} = -500 \text{ Kg/cm}^2$ .  
 $\sigma_{\max} = 4500 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\sigma_{\min} = 0 \text{ Kg/cm}^2$ .  
 $\sigma_{\max} = 4500 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\sigma_{\min} = 1500 \text{ Kg/cm}^2$ .

Solución :  $\sigma_{\text{med}} = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$   
 $\sigma_{a \text{ med}} = 0$   
 $\sigma_{b \text{ med}} = 1500 \text{ Kg/cm}^2$   
 $\sigma_{c \text{ med}} = 2250 \text{ Kg/cm}^2$   
 $\sigma_{d \text{ med}} = 3000 \text{ Kg/cm}^2$



- a)  $\sigma_{a \text{ med}} = 0$   
 $S_{\max} = 3000 < \sigma_{a \text{ max}} = 3500$  Hay falla
- b)  $\sigma_{b \text{ max}} = 3500 \text{ Kg/cm}^2 < 4000 \text{ Kg/cm}^2$   
 $y = x/2 + 3000$   
 $S_{\max} = 3750 > \sigma_{b \text{ max}} = 3500 \text{ Kg/cm}^2$  No hay falla  
 $\sigma_{b \text{ min}} = -500 \text{ Kg/cm}^2 < 0$   
 $y = 1,5x - 3000$   
 $S_{\min} = -750 < \sigma_{b \text{ min}} = -500 \text{ Kg/cm}^2$  No hay falla
- c)  $\sigma_{c \text{ max}} = 2250 \text{ Kg/cm}^2 < 4000 \text{ Kg/cm}^2$



$$y = x/2 + 3000$$

$$S_{\max} = 4125 < \sigma_{b \max} = 4500 \text{ Kg/cm}^2$$

Hay falla

d)  $\sigma_{d \max} = 3000 \text{ Kg/cm}^2 < 4000 \text{ Kg/cm}^2$

$$y = x/2 + 3000$$

$$S_{\max} = 4500 < \sigma_{b \max} = 4500 \text{ Kg/cm}^2$$

No hay falla

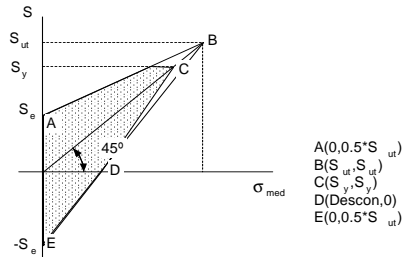
$$\sigma_{d \min} = 3000 \text{ Kg/cm}^2 > 0$$

$$y = 2x - 4000$$

$$S_{\min} = 2000 > \sigma_{b \min} = 1500 \text{ Kg/cm}^2$$

Hay falla

1.12. Hallar las ecuaciones genéricas de los esfuerzos máximos, esfuerzos medios y esfuerzos mínimos.



Solución:

La ecuación de la recta conocidos dos puntos es

$$\frac{(y - y_1)}{(x - x_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

La curva de esfuerzos máximos va de A a B

$$\frac{(y - 0.5S_{ut})}{(x - 0)} = \frac{(S_{ut} - 0.5S_{ut})}{(S_{ut} - 0)}$$

$$S_{\max} = \frac{(x + S_{ut})}{2}$$

para  $S_{\max} < S_y$

Las curvas de esfuerzos mínimos van de B a E y de C a D

BE) 
$$\frac{(y - S_{ut})}{(x - S_{ut})} = \frac{(-0.5S_{ut} - S_{ut})}{(0 - S_{ut})}$$

$$S_{\min} = \frac{(3x - S_{ut})}{2}$$

para  $\sigma_{\min} < 0$

CD) Cuando  $S_{\min} = 0$   $x = S_{ut}/3$  y la coordenada de D ( $S_{ut}/3, 0$ )

$$\frac{(y - S_y)}{(x - S_y)} = \frac{(0 - S_y)}{(\frac{S_{ut}}{3} - S_y)}$$

$$y = \frac{(x - S_y)(-S_y)}{(\frac{S_{ut}}{3} - S_y)} + S_y$$

$$S_{\min} = \frac{(x - S_y)(-S_y)}{(\frac{S_{ut}}{3} - S_y)} + S_y$$

para  $\sigma_{\min} > 0$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1.13. Se pide hallar la carga que pueden levantar (resistencia) dos cables metálicos, el primero de Aluminio con un diámetro de 2 mm y el segundo de Acero con un diámetro de 1 mm. Tomar  $S_y$  al = 2884.8 Kg/cm<sup>2</sup> y  $S_y$  ac= 4362.8 Kg/cm<sup>2</sup>

1.14. Se pide hallar resistencia de los cables del 1.anterior, para cargas Alternante e Intermitente.

1.15. Una carga de 100 Kg se aplica a una pieza de Acero con un diámetro de 1 cm y una longitud de 100 cm. Se pide calcular las deformadas longitudinal y transversal.

1.16. En el anterior 1.se pide calcular la variación del volumen debido a la deformación.

1.17. Que carga aplicada a una pieza cilíndrica de Acero con un diámetro de 1 cm y una longitud de 100 cm produce una deformación de 0,1 mm.

1.18. Cual es la deformada máxima que puede tener un Aluminio antes de alcanzar la fluencia. Tomar  $S_y$  = 2884.8 Kg/cm<sup>2</sup> y  $E = 0.7 \times 10^6$  Kg/cm<sup>2</sup>

1.19. Construir el diagrama de Goodman Modificado para un material con  $S_y = 3000$  Kg/cm<sup>2</sup>  $S_{ut} = 5000$  Kg/cm<sup>2</sup> y  $S_e = S_{ut}/2 = 2500$  Kg/cm<sup>2</sup>

1.20. En el anterior 1.hallar las ecuaciones de los esfuerzos máximos, esfuerzos medios y esfuerzos mínimos.

1.21. Hallar los esfuerzos admisibles para carga estática, carga intermitente y carga alternante del material de los problemas 4 y 5

1.22. Para las cargas dadas determinar en cada caso si hay o no falla con el material de los problemas 4, 5 y 6

$$\sigma_{\max} = 3000 \text{ Kg/cm}^2 \text{ y } \sigma_{\min} = - 3000 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\sigma_{\max} = 3000 \text{ Kg/cm}^2 \text{ y } \sigma_{\min} = - 500 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\sigma_{\max} = 4000 \text{ Kg/cm}^2 \text{ y } \sigma_{\min} = 0 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\sigma_{\max} = 4000 \text{ Kg/cm}^2 \text{ y } \sigma_{\min} = 1500 \text{ Kg/cm}^2.$$

1.23. Hallar las ecuaciones genéricas de los esfuerzos máximos, esfuerzos medios y esfuerzos mínimos.

## PROPIEDADES MECÁNICAS

Material	Sy		Sut		E		G		v
	Ksi	MPa	Ksi	MPa	Ksi	GPa	Ksi	GPa	
Aluminun allys 2014-T4	41	283	62	428	10,600	73	4,000	27.6	0.33
Aluminun allys 2014-T6	60	410	70	480	10,600	73	3,800	26.2	0.33
Aluminun allys 2024-T4	48	331	68	470	10,600	73	3,900	27	0.33
Aluminun allys 6061-T6	40	276	45	310	10,400	72	3,900	27	0.33
Aluminun allys 7075-T6	70	483	80	552	10,000	69	3,750	26	0.33
Brass (Red, cold rolled)	60	414	75	518	15,000	104	5,500	38	0.34
Brass (Red, annealed)	15	104	40	276	15,000	104	5,500	38	0.34
Bronze (cold rolled)	75	772	100	515	15,000	104	6,500	44.9	0.34
Bronze (annealed)	20	138	50	345	15,000	104	6,500	44.9	0.34
Cast iron (esfuerzo)	29.5	205	40	275	25,000	173	12,500	86.3	0.28
Cast iron (compression)	-	-	125	870	25,000	173	12,500	86.3	0.28
Concrete (compression)	2	13.8	5	35	4,500	31	-	-	0.15
Copper (cold-drawn)	40	280	45	310	17,000	117	6,300	43.5	0.35
Plate glass	-	-	10	70	10,000	69	4,000	27.6	0.2
Magnesium alloy	22	150	40	280	24,000	166	20,000	138	0.35
Monel (wrough, hot rolled)	50	345	90	621	26,000	179	9,500	65.6	0.32
Nickel alloy	60	414	80	552	30,000	207	11,400	78.7	0.31
Nylon	-	-	9	60	400	2.76	-	-	0.4
Polyethylene	-	-	2.5	17.5	150	1	-	-	0.4
Rubber (average)	0.6	4	2	13.5	0.4	0.00276	0.0007	41.5	0.48
Steel .2% C hardened	62	428	90	620	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel .2% C cold-rolled	60	414	85	587	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel .2% C hot-rolled	53	366	62	428	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel .4% C hot-rolled	53	366	84	580	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel .8% C hot-rolled	76	524	122	842	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel Stainless (cold-rolled)	165	1140	190	1310	29,000	200	12,500	86.3	0.27
Steel Stainless (heat-treated)	132	911	150	1040	29,000	200	12,500	86.3	0.27
Steel, structural					-	-	-	-	-
Steel ASTM-A36	36	250	60	400	29,000	200	11,000	75.9	0.32
Steel ASTM-A572	50	340	70	500	29,000	200	11,000	75.9	0.32
Steel ASTM-A514	100	700	120	830	29,000	200	11,000	75.9	0.32
Douglas Fir	6	41	7.4	51	1,300	9	-	-	0.29
Southern Pine	6.5	45	8.4	58	1,900	13.1	-	-	0.3
Red Oak	4.6	32	6.9	48	1,800	12.4	-	-	0.3

Tabla 1

## 2.- TRACCIÓN COMPRESIÓN

### 2.1- INTRODUCCIÓN

Una barra esta sometida a cargas de tracción o compresión cuando soporta fuerzas en sus extremos dirigidos a lo largo de su eje centroidal. Dependiendo si la carga tiende a estirar o a comprimir la pieza, la carga será de tracción o compresión.

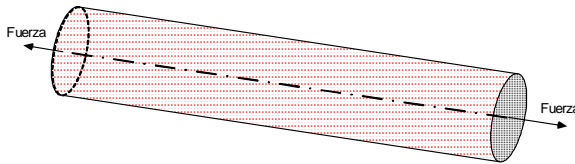


Fig. 2.1.- Barra sometida a carga de tracción

Ejemplos reales de elementos sometidos a este tipo de carga son los cables metálicos usados en maquinas de elevación, arriostres y elementos de Armaduras.

Para la validez de las ecuaciones y resultados de este capítulo se asume la veracidad de las siguientes condiciones :

- 1.- Los elementos son rectos
- 2.- Los elementos tienen secciones transversales uniformes
- 3.- Las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje axial
- 4.- Las deformaciones son pequeñas comparadas con las dimensiones de la barra
- 5.- Los esfuerzos no sobrepasan los límites de fluencia.
- 6.- Las cargas están aplicadas en los centros de gravedad de la sección transversal, de modo que no se produce flexión
- 7.- Los elementos no son tan esbeltos para producir pandeo.

### 2.2.- ESFUERZOS

Si en una barra sometida a tracción, se dibujan líneas rectas, paralelas y perpendiculares al eje de la barra antes de su deformación, luego de su deformación las distancias entre las rectas paralelas disminuyen y entre las rectas perpendiculares aumenta por lo que la pieza sufre un incremento en su longitud y un decremento del área de su sección transversal.

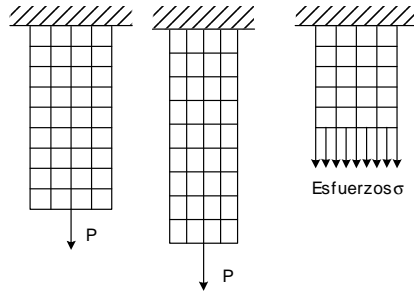


Fig. 2.2.- Esfuerzos en una sección transversal

Entonces en cualquier sección transversal actúan solamente esfuerzos normales, distribuidas uniformemente. Por lo que:

$$P = \int_A \sigma_n dA = \sigma_n \int_A dA = \sigma_n A \quad (2.1)$$

$$\sigma_n = \frac{P}{A} \quad (2.2)$$

$$\tau_n = 0 \quad (2.3)$$

Sin embargo en una sección inclinada un ángulo  $\rho$  respecto a la sección transversal,

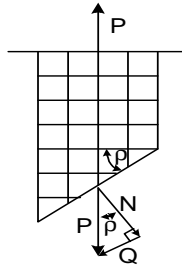


Fig. 2.3.- Esfuerzos en una sección inclinada

Para equilibrar a la fuerza externa en la sección aparece una fuerza interna de igual magnitud la que puede descomponerse en una fuerza N perpendicular a la sección que produce esfuerzos normales y en otra fuerza Q tangencial a la sección que produce esfuerzos cortantes.

$$N = P \cos \rho \quad (2.4)$$

$$Q = P \sin \rho \quad (2.5)$$

$$\sigma_\rho = N/A_\rho \quad (2.6)$$

$$\tau_\rho = Q/A_\rho \quad (2.7)$$

$$A_N = A_p \cos \rho \quad (2.8)$$

De 2.2, 2.3 y 2.6

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{N}{A_\rho} = \frac{P \cos \rho}{\frac{A_N}{\cos \rho}} = \frac{P \cos^2 \rho}{A_N} \\ \sigma_\rho &= \frac{P(1 + \cos 2\rho)}{2A_N} \end{aligned} \quad (2.9)$$

De 2.4, 2.5 y 2.6

$$\begin{aligned} \tau_\rho &= \frac{Q}{A_\rho} = \frac{P \sin \rho}{\frac{A_N}{\cos \rho}} = \frac{P \sin \rho \cos \rho}{A_N} \\ \tau_\rho &= \frac{P(\sin 2\rho)}{2A_N} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Reemplazando  $\rho = 0$  en 2.7 y 2.8, se verifican los resultados de 2.1

$$\text{Ya que} \quad (\sin 2\rho)^2 + (\cos 2\rho)^2 = 1 \quad (2.11)$$

$$\text{De 2.7} \quad \cos 2\rho = \frac{(\sigma_\rho - \frac{P}{2A_N})}{\frac{P}{2A_N}} \quad (2.12)$$

$$\text{De 2.8} \quad \sin 2\rho = \frac{\tau_\rho}{\frac{P}{2A_N}} \quad (2.13)$$

$$\text{Entonces} \quad (\sigma_\rho - \frac{P}{2A_N})^2 + \tau_\rho^2 = (\frac{P}{2A_N})^2 \quad (2.14)$$

Lo que demuestra que la relación entre  $\sigma_\rho$  y  $\tau_\rho$  es una circunferencia con radio de  $P/2A_N$  y centro en  $P/2A_N$ , conocido como el círculo de Mohr.

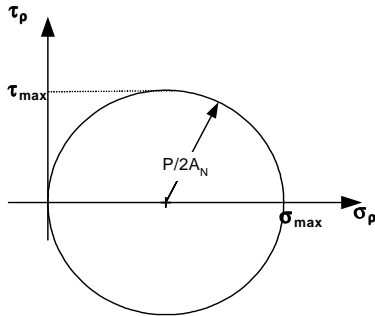


Fig. 2.4.- Circulo de Mohr

### 2.3.- ESFUERZOS PRINCIPALES

Se llaman esfuerzos principales a los valores máximos de los esfuerzos normales. De 2.7 y 2.8 y del gráfico

$$\text{Para } \rho = 0 \quad \sigma_{\max} = \sigma_N = P/A_N \quad \tau_{\min} = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{Para } \rho = 45 \quad \sigma_{45} = P/2A_N \quad \tau_{\max} = P/2A_N \quad (2.16)$$

Estos resultados indican que una barra sometida a carga axial de tracción y compresión presenta los esfuerzos normales máximos en una sección transversal a la carga  $\rho = 0$  y los esfuerzos cortantes máximos en una sección a  $\rho = 45^\circ$ . Para evitar la falla, ambos esfuerzos máximos no deben exceder de los límites de fluencias longitudinales y transversales respectivamente

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= P/A_N < S_y \\ \tau_{\max} &= P/2A_N < S'_y \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 2.4.- DEFORMACIONES

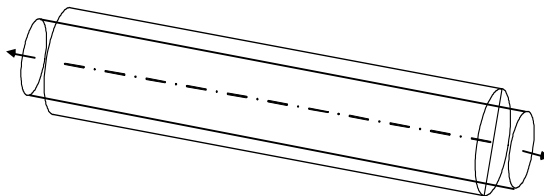


Fig. 2.5.- deformaciones



Una barra sometida a cargas axiales experimenta cambios en su longitud y en sus dimensiones transversales.

En la sección 1.8.1 se definieron las deformaciones longitudinales como:

$$\begin{aligned} \delta &= l_f - l_o && \text{Deformación longitudinal} \\ \epsilon &= \delta / l_o && \text{Deformación longitudinal unitaria} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ahora bien, en la dirección axial solo hay esfuerzos normales y si estos no sobrepasan el límite de fluencia (zona elástica) es válida la ecuación de Hooke 1.8

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.19)$$

$$\sigma = P/AN \quad (2.20)$$

**Entonces** 
$$\delta = \frac{Pl_o}{EA} \quad (2.21)$$

Ecuación que indica que la deformación es proporcional a la carga P y a la longitud  $l_o$  de la barra, pero inversamente proporcional al producto EA, el cual se denomina "Rigidez Axial". Efectivamente, este producto representa la oposición de la pieza a la deformación.

La ecuación es válida para solicitaciones de tracción como de compresión. Sin embargo, en cuerpos sujetos a compresión las ecuaciones pierden validez si los elementos son largos y delgados donde se presenta un fenómeno denominado "pandeo", cuyo estudio se realiza posteriormente.

La ecuación 2.17 solo es válida para barras de sección con área constante. En una barra con sección variable se puede aplicar esta ecuación a un elemento diferencial "dx" en la que el área se puede considerar constante.

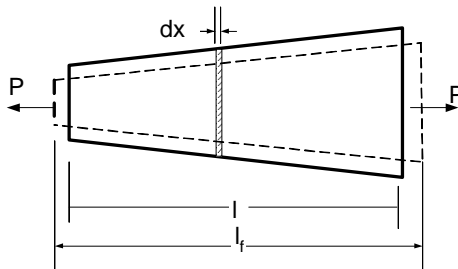


Fig. 2.6.- Barra de sección variable

Entonces 
$$d\delta = \frac{Pdx}{EA} \quad (2.22)$$

Y 
$$\delta = \int_0^l \frac{Pdx}{EA} \quad (2.23)$$

## 2.5.- CARGA BIAIXIAL

Se denomina carga biaxial en un cuerpo que soporta cargas en dos direcciones perpendiculares.

### 2.5.1.- Esfuerzos

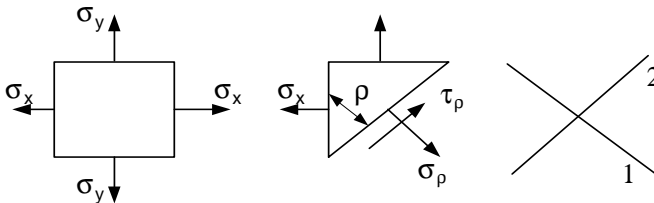


Fig. 2.7.- Esfuerzos bajo carga biaxial

Los esfuerzos normales  $\sigma_\rho$  y cortantes  $\tau_\rho$  en una sección cualquiera

$$l_\rho \cos \rho = dy \quad (2.24)$$

$$l_\rho \sin \rho = dx \quad (2.25)$$

$$\Sigma F_1 = 0 \quad \sigma_\rho l_\rho dz - \sigma_y dx dz \sin \rho - \sigma_x dy dz \cos \rho = 0 \quad (2.26)$$

$$\sigma_\rho - \sigma_y \sin^2 \rho - \sigma_x \cos^2 \rho = 0 \quad (2.27)$$

$$\sigma_\rho = \sigma_y \frac{(1 - \cos 2\rho)}{2} + \sigma_x \frac{(1 + \cos 2\rho)}{2} \quad (2.28)$$

$$\sigma_\rho = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\rho \quad (2.29)$$

$$\Sigma F_2 = 0 \quad \tau_\rho l_\rho dz + \sigma_y dx dz \cos \rho - \sigma_x dy dz \sin \rho = 0 \quad (2.30)$$

$$\tau_\rho + \sigma_y \sin \rho \cos \rho - \sigma_x \cos \rho \sin \rho = 0 \quad (2.31)$$

$$\tau_\rho = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\rho \quad (2.32)$$

Ya que 
$$(\sin 2\rho)^2 + (\cos 2\rho)^2 = 1 \quad (2.33)$$

$$\left(\sigma_{\rho} - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}\right)^2 + \tau_{\rho}^2 = \left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right)^2 \quad (2.34)$$

Las ecuaciones 2.26 y 2.29 dan los esfuerzos normales y cortantes para cualquier sección inclinada. Similar a una dimensión, las ecuaciones representan una circunferencia con desplazamiento solo en  $\sigma_{\rho}$  de  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ , y radio igual al  $(\sigma_x - \sigma_y)/2$ .

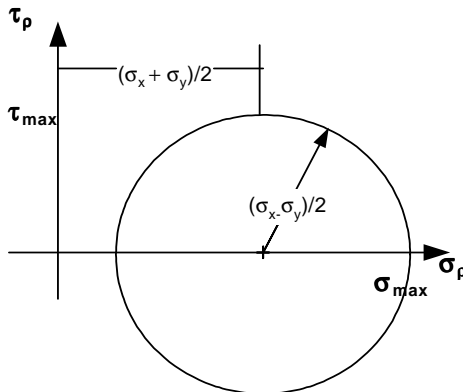


Fig. 2.8.- Círculo de Mohr para carga biaxial

Los valores máximos de los esfuerzos normales y cortantes son :

Para  $\rho = 0$        $\sigma_{\max} = \sigma_x$                        $\tau_{\min} = 0$     (2.35)

Para  $\rho = 90$        $\sigma_{\max} = \sigma_y$                        $\tau_{\min} = 0$     (2.36)

Para  $\rho = 45$        $\sigma_{\min} = 0$                                        $\tau_{\max} = (\sigma_x - \sigma_y)/2$     (2.37)

Los esfuerzos normales máximos ocurren en las direcciones "x" y "y" y los esfuerzos cortantes máximos en una dirección  $\rho = 45^\circ$ .

### 2.5.2.- Deformaciones

Consideremos una placa sometida a cargas tracción compresión biaxial :

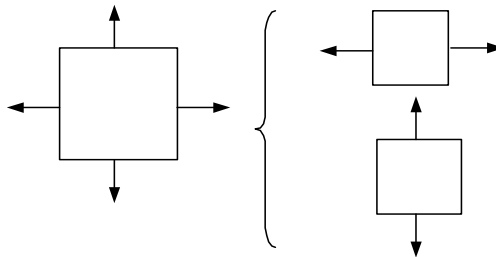


Fig. 2.9.- Superposición de deformaciones para carga biaxial

Por el principio de superposición, se puede superponer las deformaciones provocadas por las cargas horizontales con las provocadas por las cargas verticales.

Las deformaciones provocadas por las cargas horizontales

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E \quad (2.38)$$

$$\varepsilon_y = -\varepsilon_q = -\nu \sigma_x / E \quad (2.39)$$

Las deformaciones provocadas por las cargas verticales

$$\varepsilon_y = \sigma_y / E \quad (2.40)$$

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_q = -\nu \sigma_y / E \quad (2.41)$$

Superponiendo

$$\varepsilon_{xt} = \sigma_x / E - \nu \sigma_y / E = \varepsilon_x - \nu \varepsilon_y \quad (2.42)$$

$$\varepsilon_{yt} = \sigma_y / E - \nu \sigma_x / E = \varepsilon_y - \nu \varepsilon_x \quad (2.43)$$

### 2.5.3.- Recipientes de pared delgada

Un caso muy común de la carga biaxial son los recipientes de pared delgada sometidos a presión interna. Considérese un cilindro de radio interior "r" y espesor de pared delgado "e" sometido a una diferencia de presión, "p", entre el interior y el exterior.

$$r/e \geq 10$$

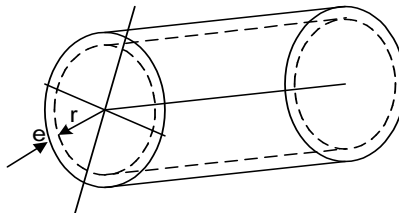


Fig. 2.10.- Recipiente cilíndrico

En un punto cualquiera del espesor de la pared se originan dos esfuerzos normales, uno axial  $\sigma_2$  y otra circunferencial  $\sigma_1$ .

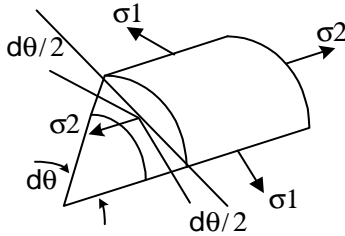


Fig. 2.11.- Esfuerzos en un recipiente cilíndrico

Debido a que el espesor es pequeño se pueden considerar estos esfuerzos constantes. Aplicando la estática en la dirección circunferencial

$$\sigma_1 \cos \frac{d\theta}{2} - \sigma_1 \cos \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (2.44)$$

Aplicando la estática en la dirección radial

Presión x área interior = Componente radial esfuerzo x área lateral

$$p(r d\theta dz) - 2\sigma_1 \sin \frac{d\theta}{2} (e dz) = 0 \quad (2.45)$$

$$\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} \quad (2.46)$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{e} \quad (2.47)$$

Aplicando la estática en la dirección axial

$$p(\pi r^2) = \sigma_2 2\pi r e = 0 \quad (2.48)$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2e} \quad (2.49)$$

Para recipientes esféricos los esfuerzos en cualquier dirección se calculan con 2.49

## 2.6.- PESO PROPIO

En cuerpos de gran altura como edificios, torres y otros, el peso propio del cuerpo origina considerables esfuerzos y deformaciones por lo que debe ser tomado en cuenta. Las secciones transversales soportan el peso de la porción del cuerpo que se encuentran encima de ellas. A modo de ilustración consideremos una torre de 3 personas. En ella la persona de arriba no soporta sobre sus hombros ninguna carga,

la del medio soporta sobre sus hombros el peso de una persona y la de abajo soporta sobre sus hombros el peso de dos personas.

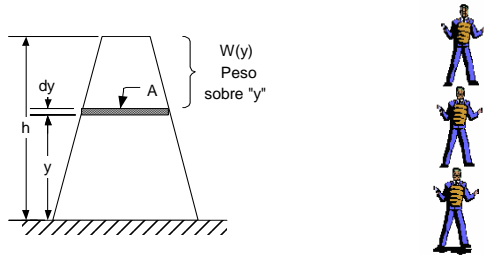


Fig. 2.12.- Peso propio

El peso de un elemento diferencial "dy" en la que el área de su sección puede tomarse constante es

$$dW = \gamma A(y) dy \quad (2.50)$$

El peso de la porción del cuerpo sobre una altura "y" es

$$W(y) = \int_y^h \gamma A(y) dy \quad (2.51)$$

Si se toma el límite inferior como cero la ecuación calcular el peso de todo el cuerpo. Los esfuerzos son :

$$\sigma = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}} = \frac{P + \int_y^h \gamma A(y) dy}{A} \quad (2.52)$$

La deformación se halla con 2.19

$$\delta = \int_0^h \frac{P dy}{EA} = \int_0^h \left( \frac{P + \int_y^h \gamma A(y) dy}{EA} \right) dy \quad (2.53)$$

Expresión que da la deformación producida por una carga exterior y el peso propio.

## 2.7.- DEFORMACIONES TÉRMICAS

Los cuerpos también se deforman por cambios de temperatura. En el caso de materiales homogéneos e isótropos, un cambio de temperatura origina una deformación lineal uniforme en todas las direcciones.

Las deformaciones térmicas lineales se calculan mediante:

$$\delta_l = l \alpha \Delta T \quad (2.54)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica lineal

Material	$\alpha$ (x 10-6/°C)
Aluminio	23.2
Fundición	10.4
Cobre	16.7
Acero	11.7
Hormigón	10.8

Entonces  $\epsilon_t = \alpha \Delta T$  (2.55)

La deformación se debe a la acción de cargas y a cambios de temperatura.

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_p + \epsilon_t = \sigma/E + \alpha \Delta T \quad (2.56)$$

Ésta ecuación deriva en la ley de Hooke extendida que también es llamada la ley de Duhamel – Neumann

$$\sigma = E (\epsilon_p - \alpha \Delta T) \quad (2.57)$$

Si la expansión térmica de un sistema se restringe por ejemplo anclando una pieza entre dos paredes rígidas, pequeños cambios de temperatura producen grandes esfuerzos térmicos. Esto se debe al modulo de Young que para la mayoría de los materiales usados en Ingeniería es grande

## 2.8.- PROBLEMAS HIPERESTATICOS

Desde el punto de vista estático, la condición de hiperestaticidad viene dada por el hecho de que la cantidad de ecuaciones que surgen de los planteos de equilibrio de la Estática es menor que la cantidad de incógnitas reactivas planteadas. Para poder resolver estas estructuras es necesario agregar ecuaciones de compatibilidad. Estas reciben este nombre precisamente porque tratan de expresar la compatibilidad entre las deformaciones y la vinculación existente, que como hemos dicho, resulta superabundante.

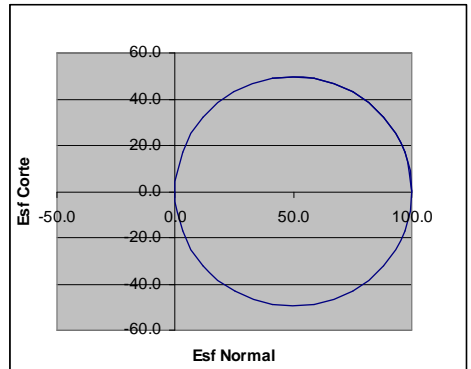
Una observación importante es que la ecuación de compatibilidad depende de las características mecánicas y geométricas de los cuerpos. Por esta razón el proceso de dimensionamiento suele ser iterativo.

## PROBLEMAS RESUELTOS

2.1. Una pieza con una sección de  $1 \text{ cm}^2$  está sometida a una fuerza de tracción en una dimensión de 100 Kg Hallar los esfuerzos en secciones con ángulos de  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$  con un intervalo de  $10^\circ$ .

Solución :

$\phi$ (Gr)	$\phi$ (Rad)	$\sigma_\phi = (P/2An)(1+\cos 2\phi)$	$\tau_\phi = (P/2An)(\sin 2\phi)$
0	0.0	100.0	0.0
10	0.2	97.0	17.1
20	0.3	88.3	32.1
30	0.5	75.0	43.3
40	0.7	58.7	49.2
50	0.9	41.3	49.2
60	1.0	25.0	43.3
70	1.2	11.7	32.1
80	1.4	3.0	17.1
90	1.6	0.0	0.0
100	1.7	3.0	-17.1
110	1.9	11.7	-32.1
120	2.1	25.0	-43.3
130	2.3	41.3	-49.2
140	2.4	58.7	-49.2
150	2.6	75.0	-43.3
160	2.8	88.3	-32.1
170	3.0	97.0	-17.1
180	3.1	100.0	0.0
190	3.3	97.0	17.1
200	3.5	88.3	32.1
210	3.7	75.0	43.3
220	3.8	58.7	49.2
230	4.0	41.3	49.2
240	4.2	25.0	43.3
250	4.4	11.7	32.1
260	4.5	3.0	17.1
270	4.7	0.0	0.0
280	4.9	3.0	-17.1
290	5.1	11.7	-32.1
300	5.2	25.0	-43.3
310	5.4	41.3	-49.2
320	5.6	58.7	-49.2
330	5.8	75.0	-43.3
340	5.9	88.3	-32.1
350	6.1	97.0	-17.1
360	6.3	100.0	0.0





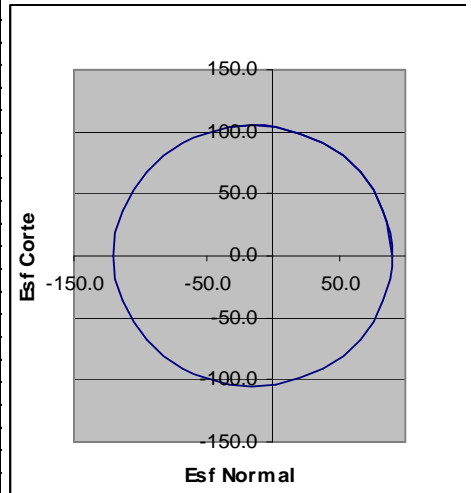
2.2. Hallar los esfuerzos máximos del 2.1.

Solución :  $\sigma_{\max} = P/A_N = 100/1 = 100 \text{ Kg/cm}^2$   
 $\tau_{\max} = P/2A_N = 100/2 = 50 \text{ Kg/cm}^2$

2.3. Una pieza está sometida a cargas de tracción compresión en dos dimensiones con  $\sigma_x = 90 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\sigma_y = -120 \text{ Kg/cm}^2$ . Hallar los esfuerzos para ángulos desde  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$  con un intervalo de  $10^\circ$ . Graficar los resultados.

Solución :

$\phi$ (Gr)	$\phi$ (Rad)	$\sigma_\phi = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + (\sigma_x - \sigma_y)(\cos 2\phi)/2$	$\tau_\phi = (\sigma_x - \sigma_y)(\sin 2\phi)/2$
0	0.0	90.0	0.0
10	0.2	83.7	35.9
20	0.3	65.4	67.5
30	0.5	37.5	90.9
40	0.7	3.2	103.4
50	0.9	-33.2	103.4
60	1.0	-67.5	90.9
70	1.2	-95.4	67.5
80	1.4	-113.7	35.9
90	1.6	-120.0	0.0
100	1.7	-113.7	-35.9
110	1.9	-95.4	-67.5
120	2.1	-67.5	-90.9
130	2.3	-33.2	-103.4
140	2.4	3.2	-103.4
150	2.6	37.5	-90.9
160	2.8	65.4	-67.5
170	3.0	83.7	-35.9
180	3.1	90.0	0.0
190	3.3	83.7	35.9
200	3.5	65.4	67.5
210	3.7	37.5	90.9
220	3.8	3.2	103.4
230	4.0	-33.2	103.4
240	4.2	-67.5	90.9
250	4.4	-95.4	67.5
260	4.5	-113.7	35.9
270	4.7	-120.0	0.0
280	4.9	-113.7	-35.9
290	5.1	-95.4	-67.5
300	5.2	-67.5	-90.9
310	5.4	-33.2	-103.4
320	5.6	3.2	-103.4
330	5.8	37.5	-90.9
340	5.9	65.4	-67.5
350	6.1	83.7	-35.9
360	6.3	90.0	0.0



2.4. Hallar los esfuerzos máximos del problema 2.3.

Solución :

$$\begin{aligned} \rho = 0 & \quad \sigma_{\max} = \sigma_x = 90 \text{ kg/cm}^2 \\ \rho = 90 & \quad \sigma_{\max} = \sigma_y = -120 \text{ Kg/cm}^2 \\ \rho = 45 & \quad \tau_{\max} = (\sigma_x - \sigma_y)/2 = 105 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

2.5. Una pieza cilíndrica de Acero tiene  $\varnothing = 3 \text{ cm}$  y largo  $L=100 \text{ cm}$  está sometida a una carga de  $1000 \text{ Kg}$  Se pide hallar :

Los esfuerzos máximos

Los esfuerzos a  $30^\circ$

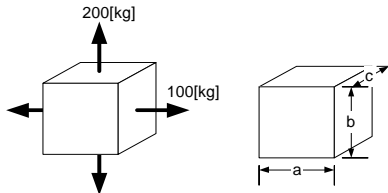
Las deformadas total y unitaria longitudinal y transversal

Los coeficientes de seguridad  $S_y = 1800 \text{ Kg/cm}^2$  y  $S_y' = 960 \text{ Kg/cm}^2$

Solucion:

- a)  $A = \pi\varnothing^2/4 = 7,07 \text{ cm}^2$   
 $\sigma_{\max} = \sigma_N = P/A_N = 141,47 \text{ Kg/cm}^2$  para  $\rho = 0^\circ$   
 $\tau_{\max} = P/2A_N = 70,73 \text{ Kg/cm}^2$  para  $\rho = 45^\circ$
- b)  $\sigma_\rho = (P/2A_N)(1 + \text{Cos } 2\rho)$   
 $\sigma_{30} = 106,10 \text{ Kg/cm}^2$   
 $\tau_\rho = (P/2AN) \text{ Sin } 2\rho$   
 $\tau_{30} = 61,25 \text{ Kg/cm}^2$
- c)  $\delta = P/E A = 6,73 \times 10^{-3} \text{ cm}$   
 $\epsilon = \delta/l = 67 \times 10^{-6} \text{ ( } 67 \times 10^{-4} \text{ \% )}$   
 $\epsilon_q = -\mu \epsilon = -20,20 \times 10^{-6} \text{ ( } -20,20 \times 10^{-4} \text{ \% )}$   
 $\delta_q = \epsilon_q d = -60,6 \times 10^{-6} \text{ cm}$
- d)  $\eta\sigma = S_y/\sigma_{\max} = 1800/141,47 = 12,72$   
 $\eta\tau = S_y'/\tau_{\max} = 960/70,73 = 13,57$

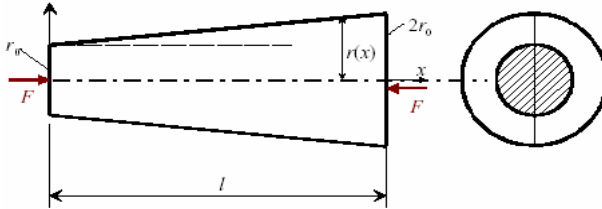
2.6. Una pieza de  $a = 2 \text{ cm}$  de ancho por  $b = 3 \text{ cm}$  de alto y  $c = 1 \text{ cm}$  de profundidad está sometida a una fuerza horizontal de  $100 \text{ Kg}$  y una vertical de  $200 \text{ Kg}$  Se pide hallar las dimensiones finales. Tomar  $\nu = 0.3$



Solución :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= F_x / (b c) = 33,33 \text{ Kg/cm}^2 \\ \sigma_y &= F_y / (a c) = 100,00 \text{ Kg/cm}^2 \\ \varepsilon_{xt} &= \sigma_x / E - \nu \sigma_y / E = 1,58 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_{yt} &= \sigma_y / E - \nu \sigma_x / E = 4,28 \times 10^{-5} \\ a_f &= a + a \varepsilon_{xt} = 2,000003 \text{ cm} \\ b_f &= b + b \varepsilon_{yt} = 3,00012 \text{ cm}\end{aligned}$$

2.7.- Halle la distribución de esfuerzos en una barra cónica con radios  $r_0$  y  $2r_0$  y longitud  $l$  sometida a cargas de compresión  $F$



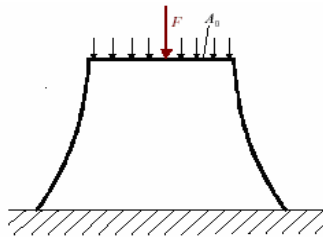
Solución: La ecuación del radio

$$r(x) = r_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

El esfuerzo

$$\sigma(x) = \frac{F}{\pi r_0^2 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2}$$

2.8.- Halle la forma de la sección de una barra que soporta una carga  $F$  para que los esfuerzos sean constantes



Solución:

De 2.50

$$\sigma = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}} = \frac{P + \int_y^h \gamma A(y) dy}{A(y)} = \text{cte}$$

$$P + \int_y^h \gamma A(y) dy = A(y) cte$$

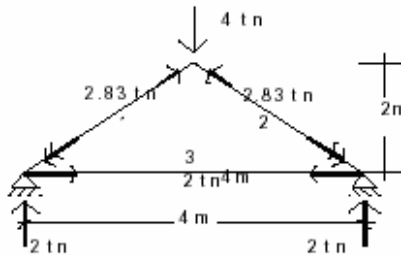
Derivando  $\gamma A(y) = \frac{dA(y)}{dy} cte$

$$dy = \frac{dA(y) cte}{A(y) \gamma} = \frac{\pi 2r dr cte}{\pi r^2 \gamma} = \frac{2dr cte}{r \gamma}$$

Integrando  $y = \frac{2cte}{\gamma} \ln(r) + cte1$

$$r = ke^{\frac{y\gamma}{2cte}}$$

2.9.- Dimensionar las barras del reticulado de la figura. Para las barras 1 y 2 debe emplearse madera con  $\sigma_{adm} = 80 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\rho_{adm} = L/300$  y  $E = 100 \text{ t/cm}^2$  y para la barra 3 debe emplearse acero con  $\sigma_{adm} = 2.400 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\rho_{adm} = L/500$  y  $E = 2.100 \text{ kg/cm}^2$



Solución:

Las barras de madera soportan  $P = 2830 \text{ Kg}$

$$A_{mad} = P_{mad} / S_{mad} = 35,4 \text{ cm}^2$$

Se adopta una escuadra de 3" x 2" con un área de  $A = 38,7 \text{ cm}^2$

$$\delta_{mad} = \frac{Pl}{EA} = 0,2 \text{ cm} < \frac{283}{3002} = 0,94 \text{ cm}$$

La barra de acero soporta  $P = 2000 \text{ Kg}$

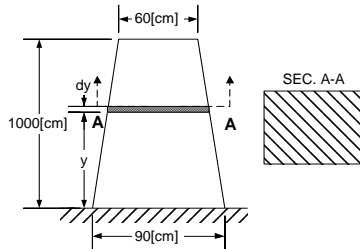
$$A_{ac} = P_{ac} / S_{ac} = 0,83 \text{ cm}^2$$

Se adopta una barra de 1 1/2" con un área de  $A = 1,13 \text{ cm}^2$

$$\delta_{ac} = \frac{Pl}{EA} = 0,34\text{cm} < \frac{400}{500} = 0,8\text{cm}$$

2.10. En la pirámide truncada de área transversal cuadrada de la figura. Se pide calcular:

- El peso parcial sobre cualquier altura "y"
- El esfuerzo normal máximo
- La deformada total



Solución :  $b(y) = (-30/1000)y + 90$

a) El peso sobre y es

$$W(y) = \int_y^h \gamma A(y) dy = \int_y^h \gamma \frac{\pi}{4} [(-30/1000)y + 90]^2 dy$$

$$W(y) = -\frac{\gamma\pi 250}{90} \left[ 60^3 - \left( -\frac{30y}{1000} + 90 \right)^3 \right]$$

b) El esfuerzo normal es máximo en la base ( y = 0)

$$\sigma_{\max} = \frac{-\gamma\pi 250(60^3 - 90^3)}{90^3}$$

$$\sigma_{\max} = 552.68 \gamma$$

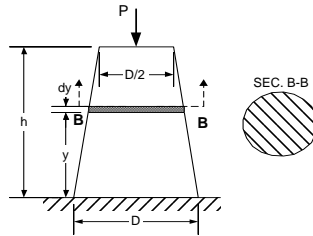
c) La deformada

$$\delta = \int_0^h \frac{W dy}{EA}$$

$$\delta = \int_0^h \frac{-\frac{\gamma\pi 250}{90} \left[ 60^3 - \left( -\frac{30}{1000}y + 90 \right)^3 \right] dy}{E \left( -\frac{30}{1000}y + 90 \right)^2}$$

$$\delta = 305441.34/\gamma E$$

2.11. En la pieza cónica truncada de la figura, se pide hallar la deformación debida a la acción de la fuerza P y del peso propio.



Solución :

$$\delta = \int_0^h \frac{[P + W(y)] dy}{EA}$$

$$d = \frac{D}{2} \left( -\frac{y}{h} + 2 \right)$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{D}{2} \left( -\frac{y}{h} + 2 \right) \right]^2$$

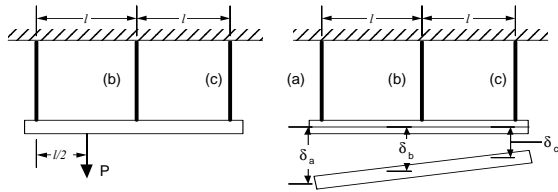
$$W(y) = \int_0^y \gamma A(y) dy = \int_0^y \gamma \frac{\pi D^2}{4} \left( 2 - \frac{y}{h} \right)^2 dy$$

$$W(y) = \frac{\gamma \pi D^2}{16} \left( 2 - \frac{y}{h} \right)^3 \left( -\frac{h}{3} \right)_0^y = -\frac{\gamma \pi D^2 h}{48} \left[ \left( 2 - \frac{y}{h} \right)^3 - 2^3 \right]$$

$$\delta = \int_0^h \frac{(P + W) dy}{EA} = \int_0^h \frac{\left\{ P - \frac{\gamma \pi D^2 h}{48} \left[ \left( 2 - \frac{y}{h} \right)^3 - 2^3 \right] \right\}}{E \frac{\pi}{4} \left[ \frac{D}{2} \left( 2 - \frac{y}{h} \right) \right]^2} dy$$

$$\delta = \frac{h(48P + \gamma \pi D^2 5)}{6E \pi D^2}$$

2.12. En el sistema de la figura se piden los esfuerzos en los cables.



Solución:

$$\Sigma F_y = 0 \quad T_a + T_b + T_c = P \quad (i)$$

$$\Sigma M_a = 0 \quad P l/2 - T_b l - T_c 2l = P/2 - T_b - T_c 2 = 0 \quad (ii)$$

El sistema es hiperestático con 3 incógnitas ( $T_a, T_b, T_c$ ) y 2 ecuaciones. La tercera ecuación se halla analizando las deformaciones

$$(\delta_a - \delta_c)/2l = (\delta_b - \delta_c)/l$$

$$\frac{T_a l}{EA_a} - \frac{T_c l}{EA_c} = 2 \left( \frac{T_b l}{EA_b} - \frac{T_c l}{EA_c} \right)$$

$$T_a - T_c = 2(T_b - T_c)$$

$$T_a - 2T_b + T_c = 0 \quad (iii)$$

De i, ii y iii

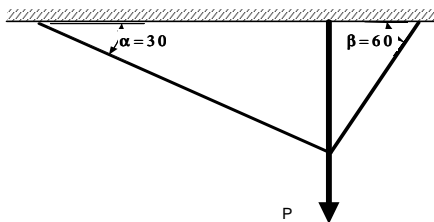
$$T_a = P - T_b - T_c = 2T_b - T_c$$

$$T_b = P/3$$

$$T_c = P/12$$

$$T_a = 7P/12$$

2.13. En el sistema de la figura se piden las esfuerzos en los cables



Solución :

$$l_b = l_a \sin \alpha = 0.5 l_a$$

$$l_b = l_c \sin \beta = 0.866 l_c$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad T_a \sin \alpha + T_b + T_c \sin \beta = P \quad (i)$$

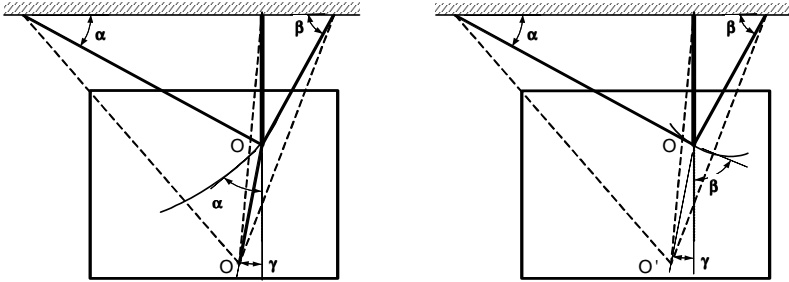
$$T_a 0.5 + T_b + T_c 0.866 = P$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad T_a \cos \alpha = T_c \cos \beta \quad (ii)$$

$$T_a 0.866 = T_c / 2$$

$\Sigma Ma = 0$  No existe ya que las fuerzas son concurrentes

Sistema hiperestático con 3 incógnitas ( $T_a, T_b, T_c$ ) y 2 ecuaciones. De las deformaciones



Del gráfico  $\delta_a = OO' \sin(\alpha - \gamma) = T_a l_a / EA$  (iii)  
 $\delta_b = OO' \sin(90 - \gamma) = T_b l_b / EA$  (iv)  
 $\delta_c = OO' \sin(\beta + \gamma) = T_c l_c / EA$  (v)

De iii y iv  $T_a l_a / \sin(\alpha - \gamma) = T_b l_b / \sin(90 - \gamma)$  (vi)  
 De iv y v  $T_b l_b / \sin(90 - \gamma) = T_c l_c / \sin(\beta + \gamma)$  (vii)  
 $l_a 0.5 = l_b$   
 $l_c 0.866 = l_b$

De vi  $T_a l_a / (\sin \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \cos \alpha) = T_b l_b / \cos \gamma$   
 $T_a (l_b / 0.5) / (\cos \gamma 0.5 - \sin \gamma 0.866) = T_b l_b / \cos \gamma$   
 $T_a = 0.5 T_b (0.5 - 0.866 \tan \gamma)$   
 $0.5 - (T_a / 0.5 T_b) = 0.866 \tan \gamma$

De vii  $\tan \gamma = [(0.52 T_b - T_a) / (0.5 T_b)] / 0.866$  (viii)  
 $T_b l_b / \cos \gamma = T_c l_c / \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta$   
 $T_b l_b / \cos \gamma = T_c (l_b / 0.866) / (0.866 \cos \gamma + \sin \gamma 0.5)$   
 $0.5 \tan \gamma = (T_c / 0.866 T_b) - 0.866$

De viii y ix  $\tan \gamma = [(T_c - 0.8662 T_b) / (0.866 T_b)] / 0.5$  (ix)  
 $[(0.52 T_b - T_a) / (0.5 T_b)] 0.5 = [(T_c - 0.8662 T_b) / (0.866 T_b)] 0.866$   
 $(0.52 T_b - T_a) = (T_c - 0.8662 T_b)$   
 $1.3862 T_b = T_a + T_c$  (x)

Esta es la ecuación de deformaciones. Con ella

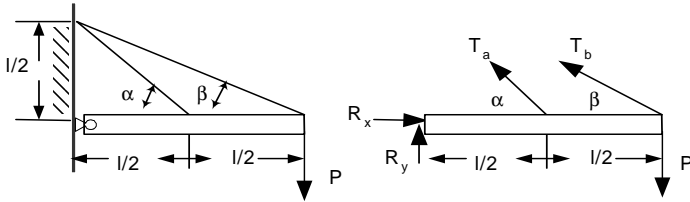
$$T_a = 0.211 P$$

$$T_c = 0.366 P$$

$$T_b = 0.577 P$$



2.14. En el sistema de la figura se piden hallar los esfuerzos en los cables a y b. La barra horizontal se supone rígida y articulada en la pared



Solución:

$$\tan \alpha = (l/2)/(l/2) = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\tan \beta = (l/2)/l = 0.5$$

$$\beta = 26,56^\circ$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_x - T_a \cos \alpha - T_b \cos \beta = 0 \quad (i)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

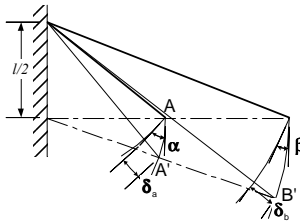
$$R_y + T_a \sin \alpha + T_b \sin \beta - P = 0 \quad (ii)$$

$$\Sigma M_o = 0$$

$$-T_a \sin \alpha \cdot l/2 - T_b \sin \beta \cdot l + P \cdot l = 0$$

$$T_a \cdot 0.3535 + T_b \cdot 0.4472 = P \quad (iii)$$

Son tres ecuaciones con cuatro incógnitas  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $T_a$  y  $T_b$



Del grafico

$$l_a \cos \alpha = l/2$$

$$l_b \cos \beta = l$$

$$\delta_a = AA' \sin \alpha$$

$$\delta_b = BB' \sin \beta$$

$$AA' = BB'/2$$

Entonces

$$AA' = \delta_a / \sin \alpha = BB'/2 = \delta_b / 2 \sin \beta$$

$$T_a l_a / (EA \sin \alpha) = T_b l_b / (2EA \sin \beta)$$

$$T_a / (2 \cos \alpha \sin \alpha) = T_b / (2 \cos \beta \sin \beta)$$

$$T_a / \sin (2 \alpha) = T_b / \sin (2 \beta)$$

$$T_a / 1 = T_b / 0.8$$

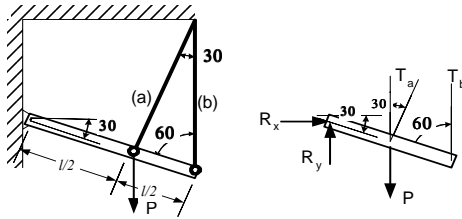
De donde

$$T_a = 1.405 P$$

$$T_b = 1.124 P$$

(iv)

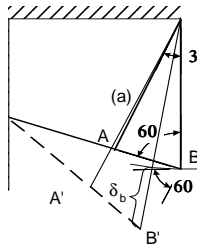
2.15. Hallar los esfuerzos en los cables a y b



Solución :

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad R_x + T_a \sin 30 = 0 & (i) \\ \Sigma F_y = 0 & \quad R_y + T_a \cos 30 + T_b - P = 0 & (ii) \\ \Sigma M_o = 0 & \quad -T_a l/2 - T_b \sin 60 l + P \sin 60 l/2 = 0 & (iii) \\ & \quad -T_a 0,5 - T_b 0,866 + P 0,433 = 0 \end{aligned}$$

El sistema es hiperestático con tres ecuaciones y cuatro incógnitas  $R_x$  ,  $R_y$  ,  $T_a$  y  $T_b$



$$\begin{aligned} l_b \cos 30 &= l_a \\ \delta_a &= AA' \sin 90 \\ \delta_b &= BB' \sin 60 \\ AA' &= BB'/2 \end{aligned}$$

Entonces

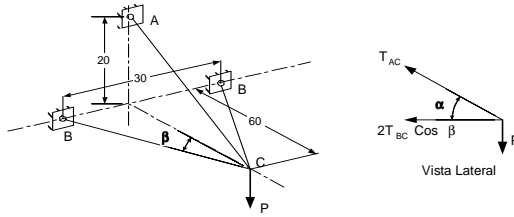
$$\begin{aligned} AA' = \delta_a / \sin 90 &= BB'/2 = \delta_b / (2 \sin 60) \\ T_a l_a / (EA) &= T_b l_b / (2EA \sin 60) \\ T_a l_b \cos 30 &= T_b l_b / (2 \sin 60) \\ T_a 1,5 &= T_b \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} T_a &= 0,2406 P \\ T_b &= 0,361 P \end{aligned}$$

(iv)

2.16. Se pide hallar el diámetro de la barra AC. Tomar  $S_y = 1800 \text{ Kg/cm}^2$



Solución :

$$\tan \alpha = 20/60 \quad \alpha = 18.43$$

$$\tan \beta = 15/60 \quad \beta = 14.03$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_{AC} \sin \alpha = P$$

$$T_{AC} = 3163.09 \text{ Kg}$$

Tracción

$$\Sigma F_x = 0$$

$$T_{AC} \cos \alpha + 2T_{BC} \cos \beta = 0$$

$$T_{BC} = -1546.56 \text{ kg}$$

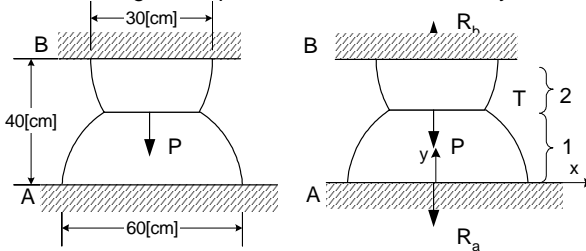
Compresión - Pandeo

Analizando solo la barra AC

$$\sigma_{AC} = T_{AC}/(\pi d_{AC}^2/4) < S_y$$

$$d_{AC} = 1.49 \text{ cm}$$

2.17. En el sistema de la figura se piden las reacciones en A y B



Solución :

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_b = R_a + P$$

(i)

Las ecuaciones de los círculos respecto del sistema x - y son

$$x^2 + y^2 = 30^2$$

$$x^2 + (y-40)^2 = 15^2$$

los diámetros  $\varnothing_1 = 2(30^2 - y^2)^{1/2}$

$$\varnothing_2 = 2 [15^2 - (y-40)^2]^{1/2}$$

éstos se igualan a un altura de

$$2(30^2 - y^2)^{1/2} = 2[15^2 - (y-40)^2]^{1/2}$$

$$30^2 - y^2 = 15^2 - y^2 + 80y - 1600$$

$$y = 28,43$$

La deformación total es nula

$$\delta_1 = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

$$\delta_1 = \int_0^{28,43} \frac{R_a dy^4}{E\pi [2(30^2 - y^2)^{1/2}]^3} = \frac{R_a}{E\pi 60} \int_0^{28,43} \left[ \frac{1}{(30+y)} + \frac{1}{(30-y)} \right] dy$$

$$\delta_1 = \frac{R_a}{E\pi 60} (3.6167)$$

$$\delta_2 = \int_{28,43}^{40} \frac{(R_a + P) dy^4}{E\pi [2(15^2 - (y-40)^2)^{1/2}]^3} = \frac{(R_a + P)}{E\pi 30} \int_{28,43}^{40} \left[ \frac{1}{15+(y-40)} + \frac{1}{15-(y-40)} \right] dy$$

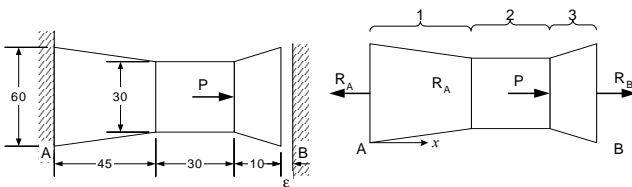
$$\delta_2 = \frac{(R_a + P)}{E\pi 30} (2.0472)$$

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{R_a}{E\pi 60} (3.6167) + \frac{(R_a + P)}{E\pi 30} (2.0472) = 0$$

$$R_a = - 0.259 P$$

$$R_b = 0.741 P$$

2.18. Se pide hallar las reacciones en las paredes del sistema de la figura



Solución :

$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_b + P = R_a$$

(i)

Los diámetros y deformadas

$$d_1 = -30 x/45 + 60$$

$$d_2 = 30$$

$$d_3 = 3 x - 195$$

$$\delta_1 = \int_0^{45} \frac{R_a 4}{E\pi(-30x/45 + 60)^2} dx = \frac{4R_a}{E\pi(-30x/45 + 60)} \frac{45}{30}$$

$$\delta_1 = \frac{4(45)R_a}{E\pi 30} \left( \frac{1}{30} - \frac{1}{60} \right) = R_a 9,09e^{-7}$$

$$\delta_2 = \frac{R_a 30(4)}{E\pi 30^2} = R_a 2,02e^{-8}$$

$$\delta_3 = \int_{75}^{85} \frac{(R_a - P)4}{E\pi(3x - 195)^2} dx = \frac{4(R_a - P)}{E\pi(3x - 195)(-3)}$$

$$\delta_3 = \frac{4(R_a - P)}{E\pi(-3)} \left( \frac{1}{60} - \frac{1}{30} \right) = (R_a - P)3,36e^{-9}$$

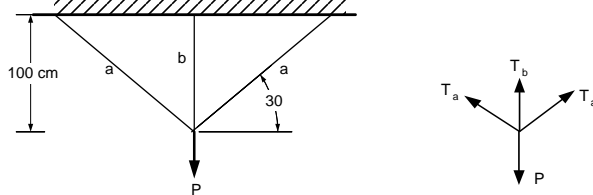
La ecuación de deformadas  $\delta_t = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \epsilon$

$$R_a 9,09e^{-7} + R_a 2,03e^{-8} + (R_a - P)3,36e^{-9} = 0,001$$

$$R_a = 0.75 P$$

$$R_b = 0.25 P$$

2.19. Hallar los esfuerzos en las barras del sistema de la figura



Solución

$$\Sigma F_x = 0$$

$$T_a \cos 30 = T_a \cos 30$$

No aporta

$$\Sigma F_y = 0$$

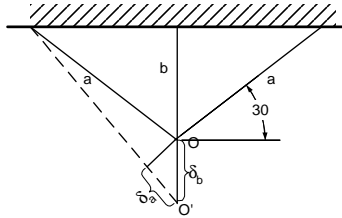
$$2 T_a \sin 30 + T_b = P$$

(i)

$$\Sigma M = 0$$

Las fuerzas son concurrentes

Se tiene una ecuación y dos incógnitas. De las deformaciones



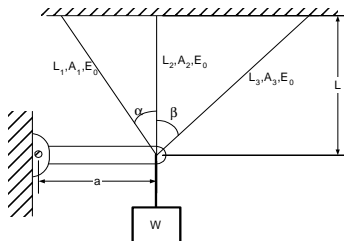
$$\begin{aligned} \delta_b &= OO' \\ \delta_a &= OO' \sin 30 \\ \delta_b &= \delta_a / \sin 30 \\ T_b l_b / EA &= T_a l_a / (EA \sin 30) \\ l_a \sin 30 &= l_b \\ T_b l_a \sin 30 &= T_a l_a / \sin 30 \\ T_b &= T_a / \sin^2 30 \\ T_b &= 4T_a \end{aligned}$$

(ii)

De i y ii  $2 T_a \sin 30 + 4T_a = P$

$$\begin{aligned} T_a &= 0.2 P \\ T_b &= 0.8 P \end{aligned}$$

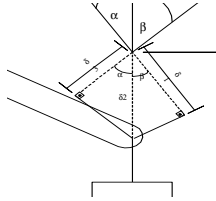
2.20. Una barra rígida horizontal esta articulada en su extremo izquierdo mientras que en su extremo derecho hay tres cables y un peso  $W$  como se indica en la figura. a) Determinar las expresiones para calcular los esfuerzos en cada una de las barras y la fuerza total sobre la barra AO. b) Utilizando las anteriores relaciones determinar los esfuerzos sí:  $A_1 = A_2 = A_3 = 2 \text{ cm}^2$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 45^\circ$ ;  $W = 2500 \text{ kg}$



Solución.

$$\begin{aligned} \Sigma M_o &= 0 \\ (T_1 \cos \alpha)a + T_2 a + (T_3 \cos \beta)a - Wa &= 0 \\ T_1 \cos \alpha + T_2 + T_3 \cos \beta - W &= 0 \end{aligned}$$

(i)



Además

$$\cos \alpha = \delta_1 / \delta_2$$

$$\cos \beta = \delta_3 / \delta_2$$

$$l_1 \cos \alpha = l_2 = l_3 \cos \beta$$

$$T_1 = \cos^2 \alpha \cdot \left( \frac{A_1}{A_2} \right) \cdot T_2$$

$$T_3 = \cos^2 \beta \cdot \left( \frac{A_3}{A_2} \right) \cdot T_2$$

$$T_1 = \frac{\cos^2 \alpha A_1 W}{A_2 + \cos^3 \beta A_3 + \cos^3 \alpha A_1}$$

$$T_2 = \frac{A_2 W}{A_2 + \cos^3 \beta A_3 + \cos^3 \alpha A_1}$$

$$T_3 = \frac{\cos^2 \beta A_3 W}{A_2 + \cos^3 \beta A_3 + \cos^3 \alpha A_1}$$

(ii)

(iv)

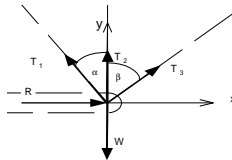
(v)

(vi)

(vii)

(viii)

Además



$$T_3 \sin \beta - T_1 \sin \alpha - R = 0$$

$$R = \frac{W (\cos^2 \beta \sin \beta A_3 - \cos^2 \alpha \sin \alpha A_1)}{A_2 + \cos^3 \beta A_3 + \cos^3 \alpha A_1}$$

(ix)

De donde

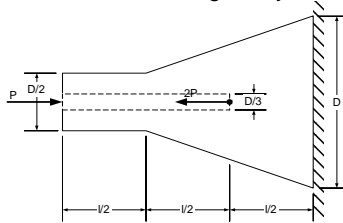
$$T_1 = 936.062 \text{ Kg}$$

$$T_2 = 1248 \text{ Kg}$$

$$T_3 = 624.041 \text{ Kg}$$

$$R = -26.768 \text{ Kg}$$

2.21. Hallar la deformación total de la barra de la figura, considerando el material Acero con  $D = 10 \text{ cm}$ ,  $l = 50 \text{ cm}$ ,  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  y  $P = 2000 \text{ Kg}$



Solución :

$$\delta_T = \int_0^{l/2} \frac{P_1 dx}{EA_1} + \int_{l/2}^l \frac{P_2 dx}{EA_2} + \int_l^{3l/2} \frac{P_3 dx}{EA_3}$$

$$P_1 = -P \text{ (compresión)} \quad P_2 = -P \text{ (compresión)} \quad P_3 = P \text{ (tracción)}$$

$$D_1 = \frac{D}{2}$$

$$d_1 = \frac{D}{3}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} (D_1^2 - d_1^2) = \frac{5\pi D^2}{144}$$

$$D_2 = \frac{Dx}{2l} + \frac{D}{4} = D \left( \frac{2x+l}{4l} \right)$$

$$d_2 = \frac{D}{3}$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} (D_2^2 - d_2^2) = \frac{\pi D^2}{4} \left[ \left( \frac{2x+l}{4l} \right)^2 - \frac{1}{9} \right]$$

$$D_3 = \frac{Dx}{2l} + \frac{D}{4} = D \left( \frac{2x+l}{4l} \right)$$

$$d_3 = 0$$

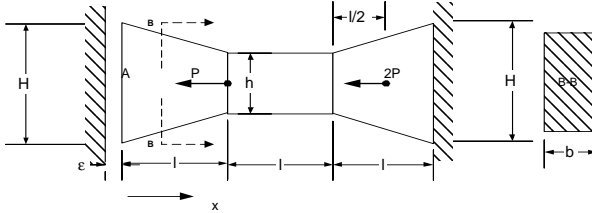
$$A_3 = \frac{\pi}{4} (D_3^2 - d_3^2) = \frac{\pi D^2}{4} \left[ \left( \frac{2x+l}{4l} \right)^2 \right]$$

$$\delta_T = \int_0^{l/2} \frac{P_1 dx}{EA_1} + \int_{l/2}^l \frac{P_2 dx}{EA_2} + \int_l^{3l/2} \frac{P_3 dx}{EA_3} = -\frac{72Pl}{5\pi ED^2} - \frac{12Pl}{\pi ED^2} \ln \frac{25}{13} + \frac{8Pl}{3\pi ED^2}$$

Reemplazando  $\delta_T = -0,00296 \text{ cm}$



2.22. Para el sistema de la figura, se pide determinar las reacciones que soportan las paredes rígidas por efecto de las cargas que se indican. El espesor de la barra es "b" y L = 30 cm; H = 10 cm; h = H/3; E = 2.1x10<sup>6</sup> kg/cm<sup>2</sup> ; P = 5000 kg; b = 5 cm



Solución :

$$\delta_r = \int_0^l \frac{P_1 dx}{EA_1} + \int_l^{2l} \frac{P_2 dx}{EA_2} + \int_{2l}^{5l/2} \frac{P_3 dx}{EA_3} + \int_{5l/2}^{3l} \frac{P_4 dx}{EA_3}$$

$$A_1 = b \left( 1 - \frac{2x}{3l} \right) H$$

$$A_2 = bH/3$$

$$A_3 = A_4 = b \left( \frac{H-h}{l} \right) x' + h = \frac{bH(l+2x')}{3l}$$

Asumiendo que el bloque no llega a chocar en el extremo izquierdo

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = P$$

$$P_3 = P$$

$$P_4 = 3P$$

Reemplazando

$$\delta_r = \int_0^l \frac{0 dx}{Eb \left( 1 - \frac{2x}{3l} \right) H} + \int_l^{2l} \frac{P dx}{E \frac{bH}{3}} + \int_0^{l/2} \frac{P dx}{E \frac{bH(l+2x')}{3l}} + \int_{l/2}^l \frac{3P dx}{E \frac{bH(l+2x')}{3l}}$$

$$\delta_r = \int_0^l \frac{0 dx}{Eb \left( 1 - \frac{2x}{3l} \right) H} + \int_l^{2l} \frac{P dx}{E \frac{bH}{3}} + \int_0^{l/2} \frac{P dx}{E \frac{bH(l+2x')}{3l}} + \int_{l/2}^l \frac{3P dx}{E \frac{bH(l+2x')}{3l}}$$

$$\delta_r = \frac{PL}{EbH} \left( 3 - 3 \ln 2 + \frac{9}{2} \ln 3 \right) = 0.00837 cm$$

ya que éste valor es mayor a la tolerancia indicada, hay contacto en la pared izquierda por lo que se debe tomar en cuenta la reacción R<sub>1</sub> sobre la pared izquierda del apoyo. Recalculamos la deformada con

$$P_1 = - R_1$$

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P - R_1 \\
 P_3 &= P - R_1 \\
 P_4 &= 3P - R_1
 \end{aligned}$$

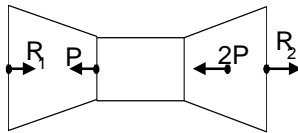
Y la deformación iguala a la tolerancia dada ( $\epsilon=0.001$ )

$$\delta_t = \int_0^l \frac{-R_1 dx}{Eb \left(1 - \frac{2x}{3l}\right) H} + \int_l^{2l} \frac{(P - R_1) dx}{E \frac{bH}{3}} + \int_0^{l/2} \frac{(P - R_1) dx}{E \frac{bH(l + 2x')}{3l}} + \int_{l/2}^l \frac{(3P - R_1) dx}{E \frac{bH(l + 2x')}{3l}} = 0.001$$

$$\delta_t = \frac{3Pl}{2EbH} (2 - 2 \ln 2 + 3 \ln 3) - \frac{3R_1 l}{EbH} (\ln 3 + 1) = 0.001$$

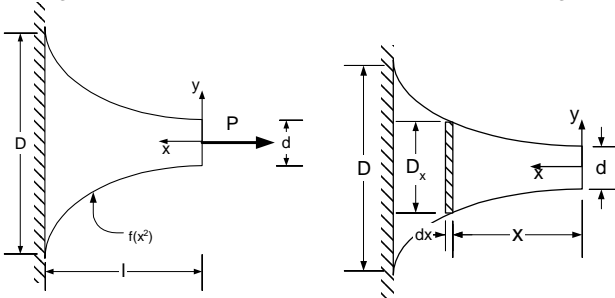
De donde  $R_1 = 4657.03 \text{ Kg}$

Además  $R_2 = P + 2P - R_1$



De donde  $R_2 = 10342.97 \text{ Kg}$

2.23. Hallar una expresión para determinar la deformación que sufre una barra con sección variable según una función cuadrática, como se ve en la figura.



Solución :

$$\delta_t = \int_0^l \frac{P dx}{EA_x}$$

la variación del diámetro en función de x es cuadrática

$$D_x = Ax^2 + B$$

para  $x = 0$   $D_x = d$   
 para  $x = l$   $D_x = D$

Resolviendo 
$$D_x = \left(\frac{D-d}{l^2}\right)x^2 + d$$

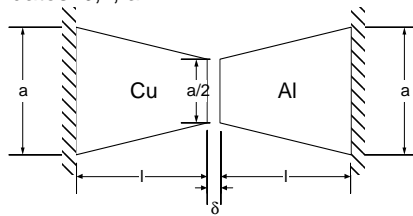
$$A_x = \frac{\pi}{4} \left( \left( \frac{D-d}{l^2} \right) x^2 + d \right)^2$$

$$\delta_l = \int_0^l \frac{P \cdot dx}{E \cdot \frac{\pi}{4} \left( \left( \frac{D-d}{l^2} \right) x^2 + d \right)^2}$$

$$\delta_l = \frac{2Pl}{E \cdot \pi \cdot d \cdot D} \left( 1 + \frac{D}{D-d} \operatorname{arctg} \left( \frac{D-d}{\sqrt{d(D-d)}} \right) \right)$$

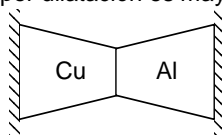
De donde

2.24. Hallar una expresión para determinar la reacción en cada uno de los apoyos, de los elementos mostrados en la figura, originados por un aumento de la temperatura  $\Delta T$ , considerando como datos:  $\delta$ ,  $l$ ,  $a$ .



Solución :

Suponiendo que la deformación por dilatación es mayor a la holgura



La deformada en la pieza de cobre por esfuerzos es

$$\delta_{cu} = \int_0^l \frac{R \cdot dx}{E_{cu} A_x}$$

$$D_x = \frac{a}{2} \left( \frac{x}{l} + 1 \right)$$

$$\delta_{cu} = \int_0^l \frac{R \cdot dx}{E_{cu} \frac{\pi}{4} \left[ \frac{a}{2} \left( \frac{x}{l} + 1 \right) \right]^2}$$

$$\delta_{cu} = \frac{8Rl}{E_{cu} \pi a^2}$$

En el aluminio la deformación es similar:

$$\delta_{al} = \int_0^l \frac{R \cdot dx}{E_{al} A_x}$$

$$D_x = \frac{a}{2} \left( \frac{x}{l} + 1 \right)$$

$$\delta_{al} = \int_0^l \frac{R \cdot dx}{E_{al} \frac{\pi}{4} \left[ \frac{a}{2} \left( \frac{x}{l} + 1 \right) \right]^2}$$

$$\delta_{al} = \frac{8Rl}{E_{al} \pi a^2}$$

La deformación por la variación de temperatura:

$$\delta_{\Delta T} = l \alpha_{cu} \Delta T + l \alpha_{al} \Delta T = l (\alpha_{cu} + \alpha_{al}) \Delta T$$

Además

$$\delta_{cu} + \delta_{al} = \delta_{\Delta T} - \delta$$

reemplazando, obtenemos:

$$\frac{8Rl}{E_{cu} \pi a^2} + \frac{8Rl}{E_{al} \pi a^2} = l (\alpha_{cu} + \alpha_{al}) \Delta T - \delta$$

$$\frac{8R * l}{E_{cu} * \pi * a^2} + \frac{8R * l}{E_{al} * \pi * a^2} = l * \Delta T (\alpha_{cu} + \alpha_{al}) - \delta$$

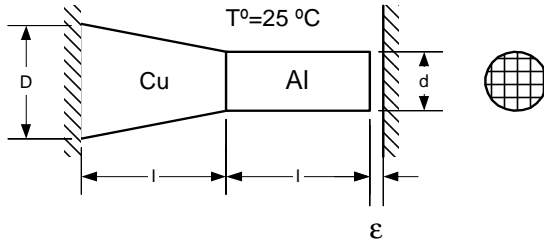
De donde:

$$\frac{8Rl}{E_{cu} \pi a^2} + \frac{8Rl}{E_{al} \pi a^2} = l (\alpha_{cu} + \alpha_{al}) \Delta T - \delta$$

$$R = \frac{E_{cu} E_{al} \pi a^2}{E_{cu} + E_{al}} [l (\alpha_{cu} + \alpha_{al}) \Delta T - \delta]$$

2.25. Para el sistema de la figura se pide calcular las reacciones en los extremos por efectos de dilatación cuando la temperatura aumenta de 25 a 120°C, tomar : l = 20 cm,

$D = 5 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $\alpha_{cu} = 17 \times 10^{-6} [1/^\circ\text{C}]$ ;  $\alpha_{al} = 22.2 \times 10^{-5} [1/^\circ\text{C}]$ ;  $E_{cu} = 1.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $E_{al} = 7 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$



Solución :

La deformación debido a la dilatación es:

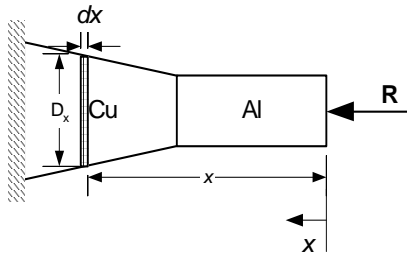
$$\delta_{\Delta T} = l\alpha_{cu}\Delta T + l\alpha_{al}\Delta T = l(\alpha_{cu} + \alpha_{al})\Delta T$$

$$\delta_{\Delta T} = 20(17 \times 10^{-6} + 22.2 \times 10^{-5})(120 - 25)$$

$$\delta_{\Delta T} = 0.4541 \text{ cm}$$

Ya que la deformada es mayor a la holgura, hay contacto en la pared derecha.

$$\delta_R = \delta_{\Delta T} - \varepsilon$$



$$\delta_R = \int_0^l \frac{P_1 dx}{E_{al} A_{al}} + \int_l^{2l} \frac{P_2 dx}{E_{cu} A_{cu}}$$

$$P_1 = R$$

$$A_1 = \pi d^2/4$$

$$P_2 = R$$

$$A_2 = \pi D_x^2/4$$

El diámetro es lineal

$$D_x = A x + B$$

de las condiciones de borde se obtiene que:

$$D_x = \frac{D-d}{l} x + 2d - D$$

reemplazando:

$$\delta_R = \int_0^l \frac{R dx}{E_{al} \frac{\pi d^2}{4}} + \int_l^{2l} \frac{R dx}{E_{cu} \frac{\pi}{4} \left( \frac{D-d}{l} x + 2d - D \right)^2}$$

resolviendo:

$$\delta_R = \frac{4R(DE_{al} + dE_{cu})}{Dd^2 \pi E_{al} E_{cu}}$$

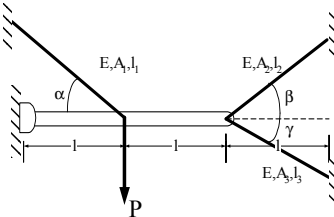
Reemplazando

$$\frac{4R(DE_{al} + dE_{cu})}{Dd^2 \pi E_{al} E_{cu}} = \delta_{\Delta T} - \varepsilon$$

con los datos

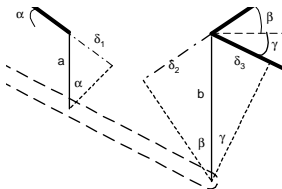
$$R = 2599.39 \text{ Kg}$$

2.26. Para el sistema de la figura se piden las fuerzas que soportan los cables que soportan a la barra rígida, articulada en uno de sus extremos.



Solución :

Las deformaciones



por semejanza  $a / l = b / (2l)$

$$\delta_1 = a \text{ Sin } \alpha$$

$$\delta_2 = b \text{ Sin } \beta$$

$$\delta_3 = b \text{ Sin } \gamma$$

además  $l = l_1 \cos \alpha$   
 $l = l_2 \cos \beta$   
 $l = l_3 \cos \gamma$

reemplazando:

$$\frac{\delta_2}{\text{sen}\beta} = 2 \frac{\delta_1}{\text{sen}\alpha}$$

$$\delta_2 = 2 \frac{\delta_1 \text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha}$$

$$\delta_3 = 2 \frac{\delta_1 \text{sen}\gamma}{\text{sen}\alpha}$$

Las deformadas:

$$\delta_1 = \frac{T_1 l_1}{EA_1}$$

$$\delta_2 = \frac{T_2 l_2}{EA_2}$$

$$\delta_3 = \frac{T_3 l_3}{EA_3}$$

$$\frac{T_2 \frac{l}{\cos \beta}}{EA_2} = 2 \frac{T_1 \frac{l}{\cos \alpha \text{sen}\beta}}{EA_1 \text{sen}\alpha}$$

$$T_2 = \frac{2 \text{sen}\beta \cos \beta A_2 T_1}{\text{sen}\alpha \cos \alpha A_1}$$

$$\frac{T_3 \frac{l}{\cos \gamma}}{EA_3} = 2 \frac{T_1 \frac{l}{\cos \alpha \text{sen}\gamma}}{EA_1 \text{sen}\alpha}$$

$$T_3 = \frac{2 \text{sen}\gamma \cos \gamma A_3 T_1}{\text{sen}\alpha \cos \alpha A_1}$$

De la estática

$$T_1 \text{sen}\alpha l - Pl + T_2 \text{sen}\beta 2l + T_3 \text{sen}\gamma 2l = 0$$

$$T_1 = \frac{\text{sen}\alpha \cos \alpha A_1 P}{K}$$

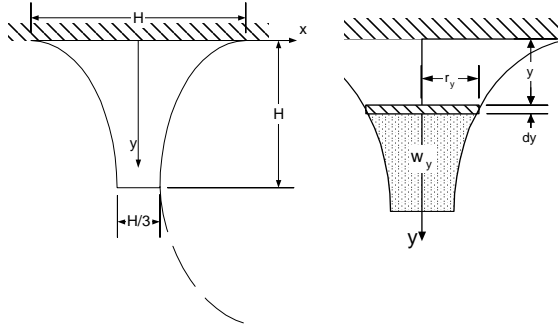
$$T_2 = \frac{\text{sen}\beta \cos \beta A_2 2P}{K}$$

$$T_3 = \frac{\text{sen}\gamma \cos \gamma A_3 2P}{K}$$

donde

$$K = A_1 \text{sen}^2 \alpha \cos \alpha + 4A_2 \text{sen}^2 \beta \cos \beta + 4A_3 \text{sen}^2 \gamma \cos \gamma$$

2.27. Determinar la deformación debido al peso propio del bloque mostrado en la figura. La sección transversal es circular y con variación parabólica



Solución :

$$\delta_r = \int_0^H \frac{w(y)}{EA_y} dy$$

la ec. de la parábola es

$$x - x_o = P(y - y_o)^2$$

$$(x_o, y_o) = \left(\frac{H}{6}, H\right)$$

para  $x = H/2$   $y = 0$

$$x = r_r = \frac{(y - H)^2}{3H} + \frac{H}{6}$$

El área a cualquier altura "y" es:

$$A(y) = \pi r_r^2 = \pi \left[ \frac{(y - H)^2}{3H} + \frac{H}{6} \right]^2$$

El peso por debajo de "y" es:

$$w(y) = \int \gamma \pi r_y^2 dy$$

Reemplazando y simplificando:

$$w(y) = \frac{\gamma \pi}{H^2 540} (47H^5 - 135H^4 y + 180H^3 y^2 - 140H^2 y^3 + 60Hy^4 - 12y^5)$$

La deformada :



$$\delta_r = \int_0^H \left[ \frac{\frac{\gamma\pi}{H^2 540} (47H^5 - 135H^4 y + 180H^3 y^2 - 140H^2 y^3 + 60Hy^4 - 12y^5)}{E\pi \left[ \frac{(y-H)^2}{3H} + \frac{H}{6} \right]^2} \right] dy$$

simplificando:

$$\delta_r = \frac{\gamma H^2}{90E} (17 + 6 \ln 3)$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

2.28. Hallar el esfuerzo normal en una barra de sección circular sujeta a una carga de tracción de 100 Kg si su diámetro es de 1 cm.

2.29. Hallar los esfuerzos normal y cortante para una sección a  $30^\circ$  en el anterior problema

2.30. Una pieza esta sometida a esfuerzos de tracción compresión en dos dimensiones con  $\sigma_x = -120 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\sigma_y = -150 \text{ Kg/cm}^2$ . Hallar los esfuerzos para una sección que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal

2.31. Hallar el círculo de Mohr y los esfuerzos máximos en el anterior problema.

2.32. Una pieza de acero tiene sección cuadrada de  $3 \times 4 \text{ cm}$  y un largo de 900 cm y esta sometida a una carga de 1500 Kg Se pide hallar :

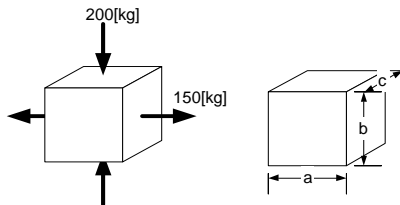
Los esfuerzos máximos

Los esfuerzos a  $30^\circ$

Las deformadas total y unitaria longitudinal y transversal

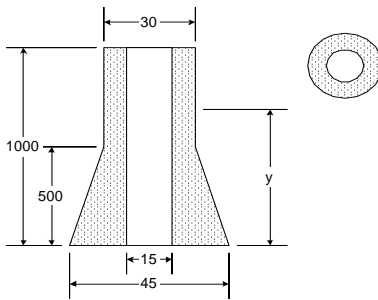
Los coeficientes de seguridad  $S_y = 1800 \text{ Kg/cm}^2$  y  $S_y' = 960 \text{ Kg/cm}^2$

2.33. Una pieza de  $a = 3 \text{ cm}$  de ancho por  $b = 4 \text{ cm}$  de alto y  $c = 2 \text{ cm}$  de profundidad esta sometida a una fuerza horizontal de 150 Kg y una vertical de -200 Kg Se pide hallar las dimensiones finales. Tomar  $\nu = 0.3$

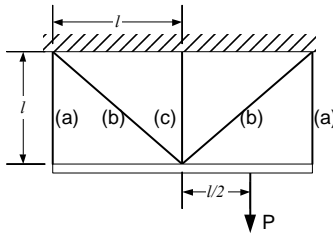


2.34. En el sistema de la figura la sección transversal es circular y las dimensiones están en centímetros. Se pide hallar :

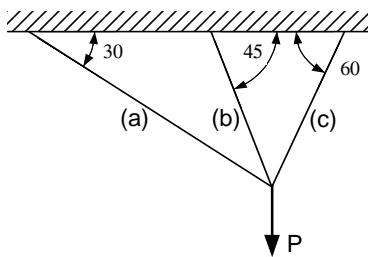
- a) El peso parcial sobre cualquier altura "y"
- b) El esfuerzo normal máximo
- c) La deformada total



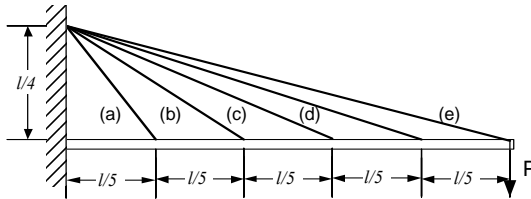
2.35. En el sistema de la figura se piden los esfuerzos en los cables.



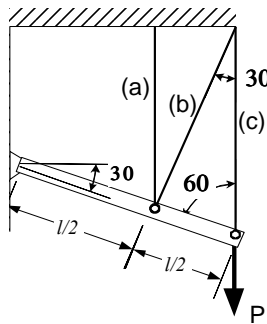
2.36. En el sistema de la figura se piden los esfuerzos en los cables



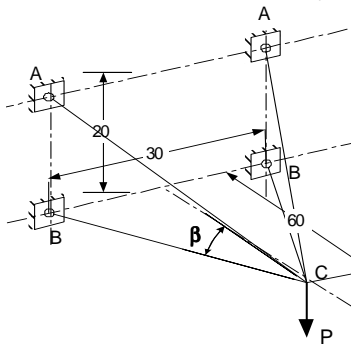
2.37. En el sistema de la figura se pide hallar las fuerzas que soportan los cables



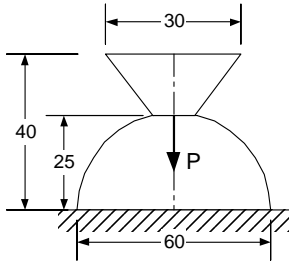
2.38. En el sistema de la figura se pide hallar las fuerzas que soportan los cables



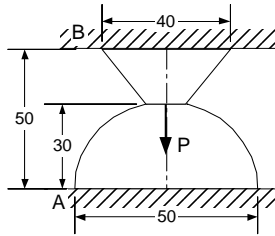
2.39. Se pide hallar el diámetro de la barra AC. Tomar  $S_y = 1800 \text{ Kg/cm}^2$



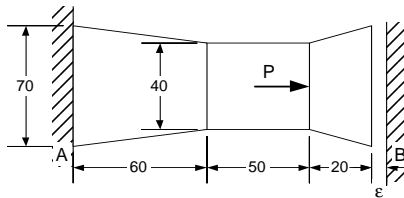
2.40. En el sistema de la figura se pide hallar la deformación total debido al peso propio.



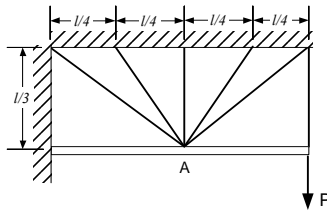
2.41. Las unidades en el sistema de la figura son centímetros. Se pide las reacciones en A y B



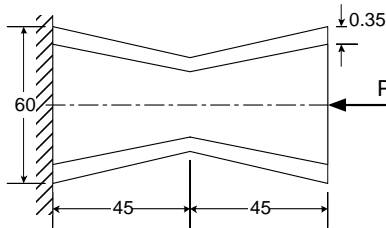
2.42. Se pide hallar las reacciones en las paredes. Tomar  $\epsilon = 0.01$  cm



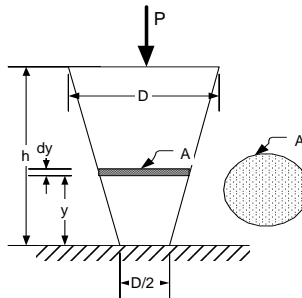
2.43. Tres barras se encuentran articuladas en A para soportar juntas, un peso  $W$  como se indica en la figura. El desplazamiento horizontal del punto A esta impedido por una varilla corta horizontal AO que se supone infinitamente rígida, a) Determinar las expresiones para calcular los esfuerzos en cada una de las barras y la fuerza total sobre la barra AO. b) Utilizando las anteriores relaciones determinar los esfuerzos si:  $A_1=A_2=A_3=2 \text{ cm}^2$   $\alpha=30^\circ$ ;  $\beta=45^\circ$ ;  $W=2500[\text{kg}]$ .



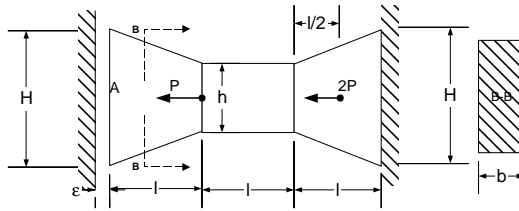
2.44. Determinar la deformación total del sistema de la figura. Tomar  $E = 2.1 \times 10^6$  Kg/cm<sup>2</sup> y  $P = 2000$  Kg



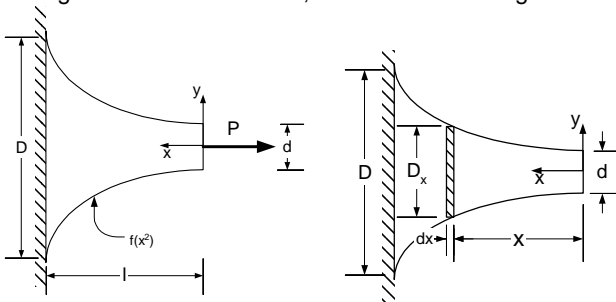
2.45. Hallar la deformada debido a la fuerza P y el peso propio



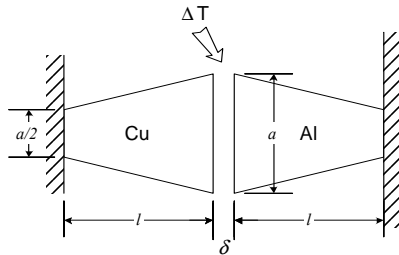
2.46. En el sistema mostrado en la figura determinar las reacciones que soportan las paredes rígidas por efecto de las cargas y un incremento de la temperatura . Considerar una sección rectangular de espesor constante "b" y los siguientes datos:  $L=30$  cm;  $H=10$  cm;  $h=H/3$ ;  $E=2.1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> ;  $P=5000$  kg;  $b=5$  cm  $\Delta T = 90^\circ\text{C}$



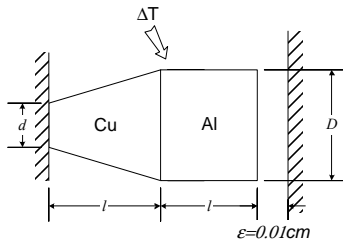
2.47 Hallar una expresión para determinar la deformación que sufre una barra con sección variable según una función cúbica, como se ve en la figura.



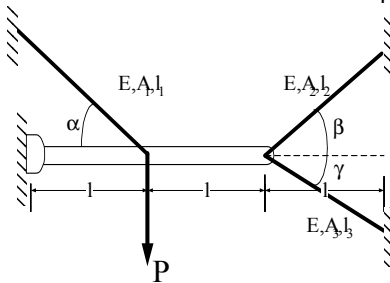
2.48. Hallar una expresión para determinar la reacción en cada uno de los apoyos, de los elementos mostrados en la figura, debido a la variación de temperatura  $\Delta T$ , considerando como datos:  $\delta$ ,  $l$ ,  $a$ .



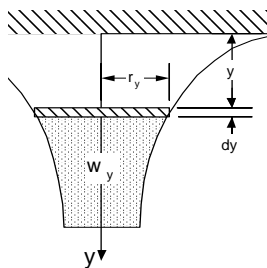
2.49. Si la temperatura aumenta a  $120^\circ \text{C}$ , determinar las reacciones que soportan los apoyos luego de la dilatación, tomando:  $l = 20 \text{ [cm]}$ ;  $D = 5 \text{ [cm]}$ ;  $d = 2 \text{ [cm]}$ ;  $\alpha_{cu} = 17 \times 10^{-6} [1/^\circ\text{C}]$ ;  $\alpha_{al} = 22.2 \times 10^{-5} [1/^\circ\text{C}]$ ;  $E_{cu} = 1.1 \times 10^6 [\text{Kg/cm}^2]$ ;  $E_{al} = 7 \times 10^5 [\text{Kg/cm}^2]$



2.50. Hallar los esfuerzos en el sistema de la figura. Cuando las deformaciones además de la carga  $P$  provienen de un incremento de la temperatura  $\Delta T$

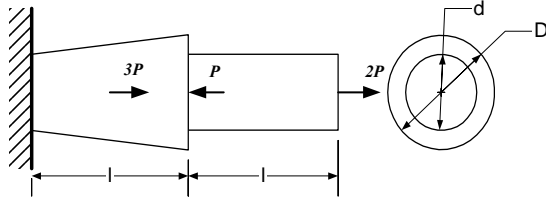


2.51. Determinar la variación que debe tener la sección circular del elemento de la figura, de modo que los esfuerzos debido al peso propio sean constantes.

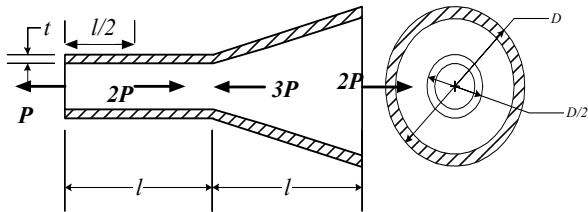




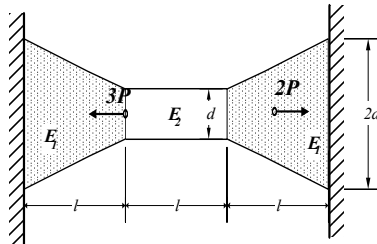
2.52. La barra maciza mostrada en la figura, consta de un tramo troncocónico y otro cilíndrico, determinar la deformación total del sistema siendo el material el mismo para ambos tramos.



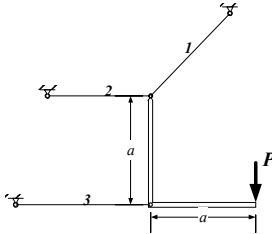
2.53. Determinar la expresión para calcular la deformación total de la barra, que tiene una perforación que produce una pared de espesor constante  $t$ , como se muestra en la figura, la barra se encuentra sometida a la acción de las respectivas cargas. La sección de la barra varía según se ve en dicha figura.



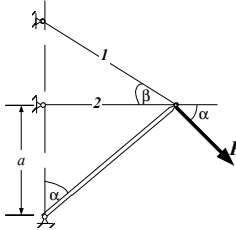
2.54. La barra mostrada en la figura se encuentra sometida a la acción de las fuerzas mostradas que produce una reacción interna de la barra, debido a los apoyos que se muestran, determinar las reacciones que se producen en dichos apoyos, considerando además que los materiales tienen diferente módulo de elasticidad, y su sección transversal es circular y varía en cada tramo.



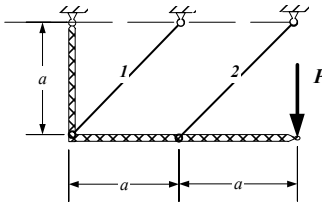
2.55. Determinar la ecuación para determinar el Área de las secciones transversales de los elementos elásticos que se muestran en la figura. Considerar conocidas las longitudes de cada una de éstas.



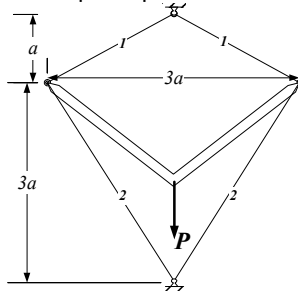
2.56. Hallar los esfuerzos de los elementos mostrados en la figura.



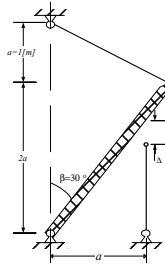
2.57. Hallar los esfuerzos en las barras de la armadura mostrada en la figura cuando se aplica la fuerza indicada. Considerar  $E, A$  igual para todas las barras.



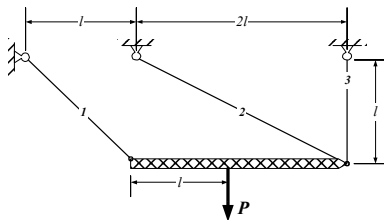
2.58. Una armadura simétrica experimenta las cargas mostradas en la figura. Determinar los esfuerzos normales que experimentan cada una de ellas.



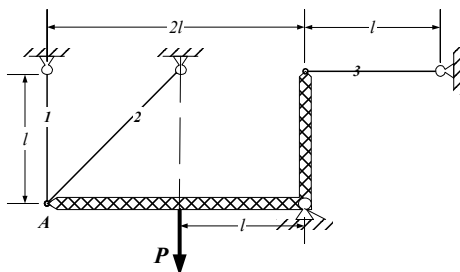
2.59. Calcular las esfuerzos de montaje de los elementos flexibles mostrados en la figura, si uno de ellos fue fabricado con una falla en su longitud  $\Delta=0.5\text{cm}$ .



2.60. Determinar los desplazamientos, horizontal y vertical, del punto de aplicación de la fuerza P, además determinar todas las esfuerzos en las diferentes barras. Considerar, el módulo de rigidez a la esfuerzo E-A, constante.



2.61. Determinar el desplazamiento del punto A debido a las cargas aplicadas sobre la armadura mostrada en la figura.



### 3.- CORTE PURO

#### 3.1.- INTRODUCCIÓN

Como se vio en el capítulo 1 en cualquier sección de un cuerpo que soporta cargas externas, se origina una fuerza interna que puede descomponerse dos fuerzas la primera con dirección normal y la segunda con dirección tangencial a la sección. Cuando la fuerza interna solo tiene un componente tangencial a la sección se originan esfuerzos cortantes y la carga se conoce como de corte.

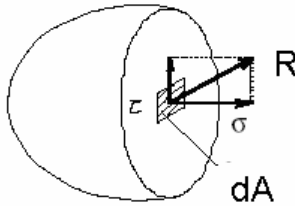


Fig. 3.1.- Esfuerzos normales y cortantes

Una pieza está sometida a cargas y esfuerzos de corte, cuando sobre ella se aplican fuerzas externas dirigidas perpendicularmente a su eje centroidal.

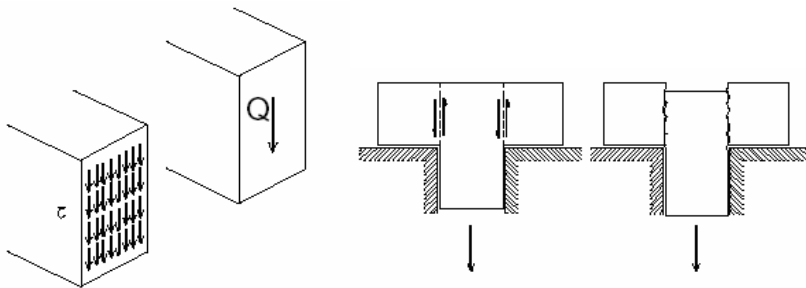


Fig. 3.2.- Corte Puro

En los siguientes casos se puede admitir esfuerzos de corte puro:

- Vigas de muy pequeña luz donde el efecto de flexión es despreciable
- El corte de planchas metálica mediante el empleo de una cizalla.
- Punzonamiento, por ejemplo, la perforación de hojas.
- Uniones con remaches, bulones, soldadura, pernos, etc.

### 3.2.- ESFUERZOS

Si no hay presencia de esfuerzos normales (corte puro), del equilibrio

$$Q = \int_A \tau_n dA = \tau_n \int_A dA = \tau_n A$$

$$\tau_n = Q/A$$

$$\sigma_n = 0 \tag{3.1}$$

Analizando un elemento diferencial y para que en él se verifique el equilibrio

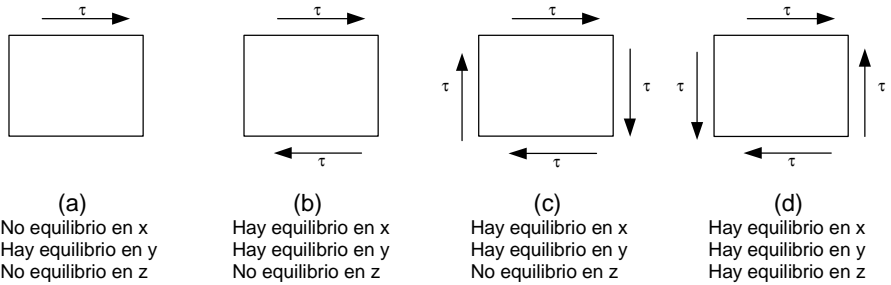


Fig. 3.3.- Condiciones de Equilibrio

Solo se verifica equilibrio en el caso (d). Se puede concluir que:

- Los esfuerzos de corte aparecen en las cuatro caras del elemento diferencial.
- Los esfuerzos son concurrentes o divergentes en las aristas y tienen igual valor.

Ahora bien, analizando una sección inclinada a un ángulo  $\rho$

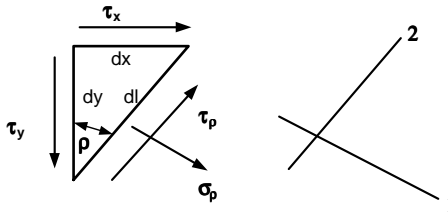


Fig. 3.4.- Esfuerzos en secciones inclinadas

Geoméricamente

$$dl \cos \rho = dy$$

$$dl \sin \rho = dx \tag{3.2}$$

De la estática

$$\Sigma F_1 = 0 \quad \sigma \rho \, dl \, dz + \tau y \, dy \, dz \, \text{Sin } \rho + \tau x \, dx \, dz \, \text{Cos } \rho = 0 \quad (3.3)$$

$$\sigma \rho + \tau y \, \text{Cos } \rho \, \text{Sin } \rho + \tau x \, \text{Sin } \rho \, \text{Cos } \rho = 0$$

$$\sigma \rho = -\tau \, \text{Sin } 2\rho \quad (3.4)$$

$$\Sigma F_2 = 0 \quad \tau \rho \, dl \, dz - \tau y \, dy \, dz \, \text{Cos } \rho + \tau x \, dx \, dz \, \text{Sin } \rho = 0 \quad (3.5)$$

$$\tau \rho - \tau y \, \text{Cos } \rho \, \text{Cos } \rho + \tau x \, \text{Sin } \rho \, \text{Sin } \rho = 0$$

$$\tau \rho = \tau \, \text{Cos } 2\rho \quad (3.6)$$

Cuando  $\rho = 0$  se verifica que

$$\sigma_0 = \sigma_{90} = 0$$

$$\tau_0 = \tau_{90} = \tau$$

Ya que  $(\text{Sin } 2\rho)^2 + (\text{Cos } 2\rho)^2 = 1$

De 3.3 y 3.5  $\sigma_\rho^2 + \tau_\rho^2 = \tau^2 \quad (3.6)$

Que es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen.

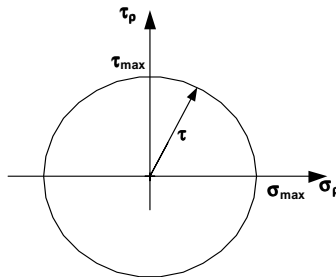


Fig. 3.5.- Círculo de Mohr

### 3.3.- ESFUERZOS PRINCIPALES

Los valores máximos de los esfuerzos normales y cortantes son :

Para  $\rho = 0 \quad \sigma_{\min} = 0 \quad \tau_{\max} = P/A_N \quad (3.7)$

Para  $\rho = 45 \quad \sigma_{\max} = P/A_N \quad \tau_{\min} = 0 \quad (3.8)$

Para evitar la falla, ambos esfuerzos máximos no deben exceder de los límites de fluencias longitudinales y transversales respectivamente

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= P/A_N < S_y \\ \tau_{\max} &= P/A_N < S'_y \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.4.- DEFORMACIÓN

Una pieza sometida a esfuerzos de corte puro se distorsiona

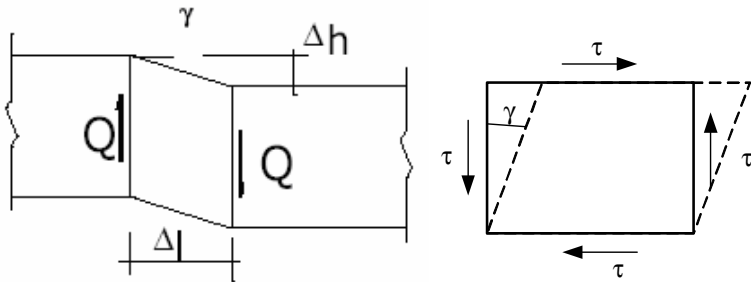


Fig. 3.6.- Deformación bajo esfuerzos de corte

$$\gamma \cong \text{tg}(\gamma) = \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (3.10)$$

### 3.5...- ECUACIÓN DE HOOKE

Mientras los esfuerzos no sobrepasen el límite de fluencia, ellos son proporcionales a las deformaciones

$$\tau = G\gamma \quad (3.11)$$

Ecuación conocida como la ley de Hooke, dónde G recibe el nombre de módulo de elasticidad transversal.

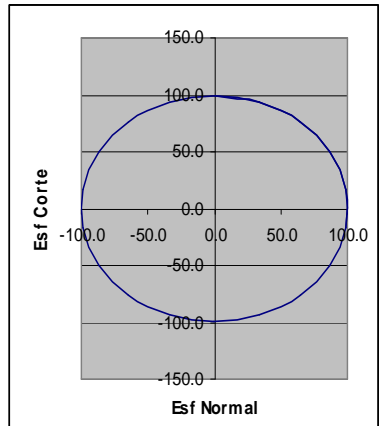


## PROBLEMAS RESUELTOS

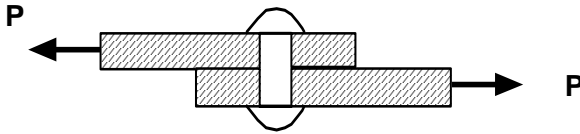
3.1. Una pieza con un área de  $1 \text{ cm}^2$  soporta una fuerza cortante de 100 Kg Se pide hallar: a) Los esfuerzos en ángulos de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  con intervalos de  $10^\circ$  y b) Graficar  $\sigma$  vs.  $\tau$

Solución:

$\phi$ (Gr)	$\phi$ (Rad)	$\sigma_\phi = (Q/An)\text{Sin } 2\phi$	$\tau_\phi = (Q/An)\text{Cos } 2\phi$
0	0.0	0.0	100.0
10	0.2	34.2	94.0
20	0.3	64.3	76.6
30	0.5	86.6	50.0
40	0.7	98.5	17.4
50	0.9	98.5	-17.4
60	1.0	86.6	-50.0
70	1.2	64.3	-76.6
80	1.4	34.2	-94.0
90	1.6	0.0	-100.0
100	1.7	-34.2	-94.0
110	1.9	-64.3	-76.6
120	2.1	-86.6	-50.0
130	2.3	-98.5	-17.4
140	2.4	-98.5	17.4
150	2.6	-86.6	50.0
160	2.8	-64.3	76.6
170	3.0	-34.2	94.0
180	3.1	0.0	100.0
190	3.3	34.2	94.0
200	3.5	64.3	76.6
210	3.7	86.6	50.0
220	3.8	98.5	17.4
230	4.0	98.5	-17.4
240	4.2	86.6	-50.0
250	4.4	64.3	-76.6
260	4.5	34.2	-94.0
270	4.7	0.0	-100.0
280	4.9	-34.2	-94.0
290	5.1	-64.3	-76.6
300	5.2	-86.6	-50.0
310	5.4	-98.5	-17.4
320	5.6	-98.5	17.4
330	5.8	-86.6	50.0
340	5.9	-64.3	76.6
350	6.1	-34.2	94.0
360	6.3	0.0	100.0



3.2. Cuantos remaches de 1 cm. de diámetro se necesitan para unir dos placas y soportar una fuerza de 1000 Kg Tomar  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$

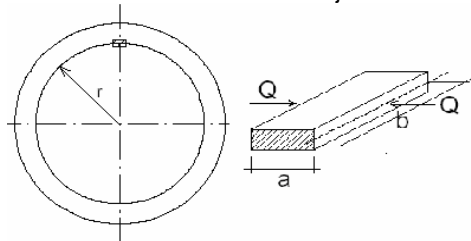


Solución:

$$\tau_{\max} < P/A_N = 1000/[n(\pi 1^2)/4] < 900$$

$$n = 1.41 \text{ Se adoptan 2 remaches}$$

3.3.- Hallar el área que necesita una chaveta en el eje de un motor y una polea



Solución :

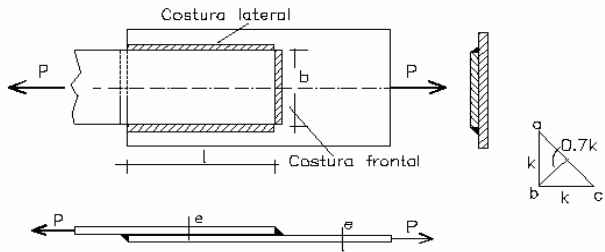
$$Pot = M_t \omega$$

$$M_t = Q r$$

$$\tau = \frac{Q}{ab} \leq S_y'$$

De donde 
$$ab \geq \frac{Pot}{\omega S_y'}$$

3.4.- Hallar la carga que soportan los dos cordones laterales y dos frontales de soldadura que unen dos planchas.



Solución :

Asumiendo que las soldaduras fallan en su sección menor

$$Area = \frac{Diagonal}{2} LongCordon = \frac{\sqrt{2e^2}}{2} LongCordon$$

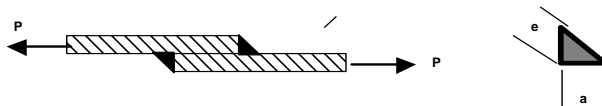
$$\text{área costura frontal} = b \times 0.7 e$$

$$\text{área costura lateral} = l \times 0.7 e$$

$$\tau = \frac{Q}{AreaTotal} = \frac{Q}{2(b+l)0.7e} \leq Sy'$$

$$Q \geq Sy'2(b+l)0.7e$$

3.5. Dos placas unidas por dos cordones de soldadura a 45° soportan una carga de corte de 6000 Kg Si el ancho de las placas es de  $b = 3$  cm, se pide hallar las dimensiones de la garganta y de la base de la soldadura. Tomar  $Sy' = 900$  Kg/cm<sup>2</sup>.



Solución :

El área mínima es

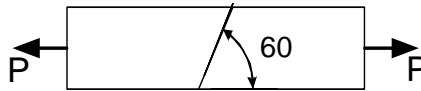
$$A_N = 2 e b = 2 e 3$$

$$\tau_{max} = P/A_N = 6000/[2 e 3] < 900$$

De donde  $e = 1.11$  cm

Y  $a = 2 e \text{ Cos } 45 = 1.57$  cm

3.6. Una pieza de madera con una sección transversal de 3 x 3 cm. está colada como se ve en la figura. Hallar la fuerza máxima que puede soportar. Tomar  $Sy' = 200 \text{ Kg/cm}^2$



Solución :

De 2.7 y 2.8

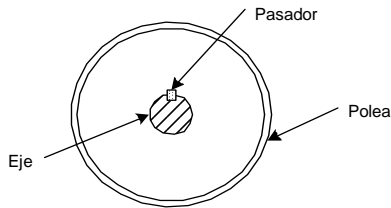
$$\sigma_p = (P/2A_N) (1 + \text{Cos } 2 \rho)$$

$$\tau_p = (P/2A_N) \text{Sin } 2 \rho$$

$$\tau_{60} = (P/2A_N) \text{Sin } 2 \rho = P/[2(3)(3)] \text{Sin } (120) < 200$$

$$P = 4156.92 \text{ Kg}$$

3.7. Una patea está fijada a su eje por medio de un pasador cilíndrico. Los ejes del eje y del pasador son perpendiculares. Si el momento torsor soportado es de 150 Kg cm. y el diámetro del eje de 3 cm. Se pide hallar el coeficiente de seguridad en el pasador. Tomar diámetro pasador 0,5 cm. y  $Sy' = 900 \text{ Kg/cm}^2$



Solución :

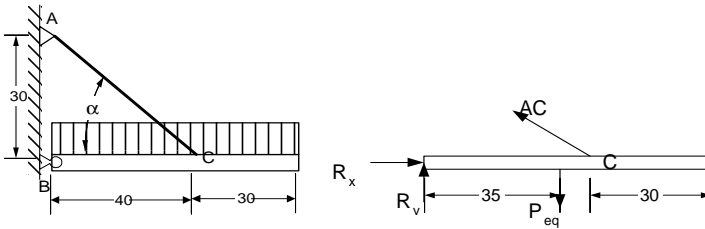
$$Q = M_t / r = 150 \text{ Kg cm} / (3/2) \text{ cm} = 100 \text{ Kg}$$

$$\tau_{\text{max}} = P/A_N = 100 / (\pi \varnothing^2 / 4) = 509.29 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\eta = Sy' / \tau_{\text{max}} = 900 / 509.29$$

$$\eta = 1.76$$

3.8. Hallar la intensidad máxima H de la carga que puede soportar la plataforma rígida de la figura. Los pasadores en A, B y C tienen un diámetro de 1 cm y  $Sy' = 900 \text{ Kg/cm}^2$



Solución:

$$\alpha = \text{Arctan}(30/40) = 36.86$$

La carga equivalente

$$P_{eq} = H \cdot 70$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad R_x - AC \cos \alpha = 0 & \text{(i)} \\ \Sigma F_y = 0 & \quad R_y + AC \sin \alpha = P_{eq} & \text{(ii)} \\ \Sigma M_B = 0 & \quad AC \sin \alpha \cdot 40 = P_{eq} \cdot 35 & \text{(iii)} \end{aligned}$$

$$AC = H(70)35 / (\sin \alpha \cdot 40) = 102,08 H$$

$$R_x = AC \cos \alpha = 81.66 H$$

$$R_y = H \cdot 70 - AC \sin \alpha = 8.75 H$$

$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} = 82.12 H$$

$$\tau_{AC} = AC/A_N = 102,08H / (\pi \cdot 1^2/4) < 900 \text{ Kg/cm}^2$$

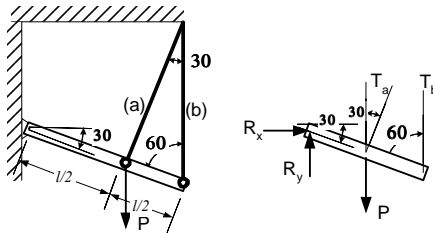
$$HAC = 6.92 \text{ Kg/cm}$$

$$\tau_O = R/A_N = 82,12H / (\pi \cdot 1^2/4) < 900 \text{ Kg/cm}^2$$

$$HO = 8.6 \text{ Kg/cm}$$

Entonces  $H = 6.92 \text{ Kg/cm}$ .

3.9. La plataforma rígida de la figura está soportada por dos cables a y b. Hallar el diámetro del pasador en O si  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$  y  $P = 100 \text{ Kg}$



Solución :

$$\text{De } 2.12T_a = 0.24 P = 24 \text{ Kg}$$

$$T_b = 0.36 P = 36.1 \text{ Kg}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_x + T_a \sin 30 = 0 \quad (i)$$

$$R_x = -12.04 \text{ Kg}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_y + T_a \cos 30 + T_b - P = 0 \quad (ii)$$

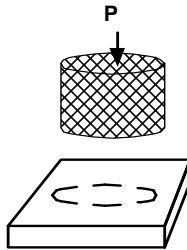
$$R_y = 43.2 \text{ Kg}$$

$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} = 44.64 \text{ Kg}$$

$$\tau_o = R/A_N = 44.64 / (\pi \varnothing_{pas}^2 / 4) < 900 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\varnothing_{pas} = 0.25 \text{ cm}$$

3.10. Hallar la fuerza que se necesita para troquelar un disco de 3 cm de diámetro y 0,2 cm de alto . Tomar  $S'_{ut} = 1500 \text{ Kg/cm}^2$ .



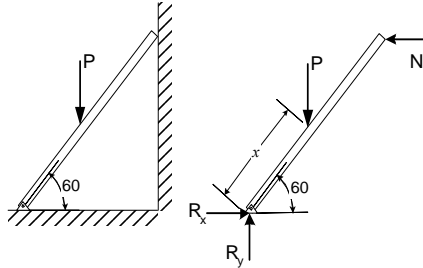
Solución :

$$\tau_{max} = P/A_N > S'_{ut}$$

$$A = \pi \varnothing t = \pi 3 \cdot 0,2 = 1,88 \text{ cm}^2$$

$$P > S'_{ut} A = 1500 \text{ Kg/cm}^2 \cdot 1.88 \text{ cm}^2 = 2827.4 \text{ Kg}$$

3.11. Una escalera esta diseñada para soportar una persona de 500 Kg y esta fijada al piso por dos pasadores que evitan su deslizamiento. Se pide hallar el diámetro de los pasadores: Tomar  $S_y' = 900 \text{ Kg/cm}^2$ .



Solución :

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad R_x = N & \text{(i)} \\ \Sigma F_y = 0 & \quad R_y = P & \text{(ii)} \\ \Sigma M_A = 0 & \quad P \times \text{Cos } 60 - N \text{ l Sin } 60 = 0 & \text{(iii)} \\ & \quad N = P \times \text{Cot } 60 / \text{l} \\ & \quad R_x = N = P \times \text{Cot } 60 / \text{l} \\ & \quad R_y = P \end{aligned}$$

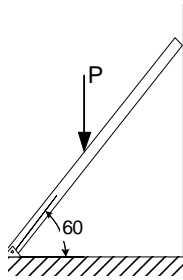
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = P \sqrt{1 + \left(\frac{x}{l} \text{Cot } 60\right)^2}$$

Máx con  $x = l$

$$\begin{aligned} R &= 1.15 P \\ \tau_{\text{max}} = R/A_N &= 1.15 (500)/(2\pi \varnothing_{\text{pas}}^2/4) < 900 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\varnothing_{\text{pas}} = 0.6377 \text{ cm}$$

3.12. Una escalera soporta una persona de 500 Kg fijada al piso por dos pasadores que evitan su deslizamiento. Se pide hallar el diámetro de los pasadores: Tomar  $S_y' = 900 \text{ Kg/cm}^2$ .



Solución : Del anterior problema

$$R = P \sqrt{1 + \left(\frac{x}{l} \cot 60^\circ\right)^2}$$

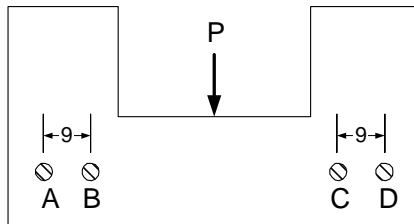
para  $x = l/2$

$$R = 1,04 P$$

$$\tau_{\max} = R/A_N = 1,04 (500)/(2\pi \varnothing_{\text{pas}}^2/4) < 900 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\varnothing_{\text{pas}} = 0.606 \text{ cm}$$

3.13. La pieza de la figura esta fijada por cuatro pasadores y soporta una carga de  $P = 3000 \text{ Kg}$  Se pide hallar el diámetro mínimo de los pasadores. Tomar  $S_y' = 1100 \text{ Kg/cm}^2$ .



Solución :

Por simetría, la carga  $P$  se reparte equitativamente entre los cuatro pernos

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_a = F_b = F_c = F_d = P/4 = 750 \text{ Kg}$$

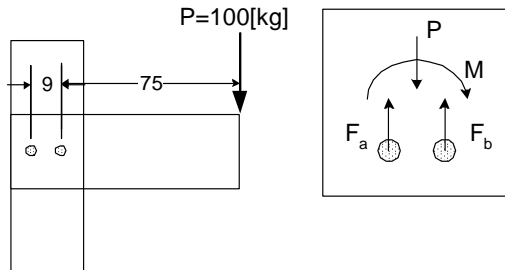
$$\tau = F/A < S_y'$$

$$750 \text{ Kg}/(\pi d^2/4) < 1100 \text{ Kg/cm}^2$$

$$d > 0.9317 \text{ cm}$$



3.14. La plataforma de la figura soporta una carga de 100 Kg y esta soportada por 2 pasadores de 1 cm de diámetro. Se pide el coeficiente de seguridad en los pasadores. Tomar  $S_y = 1100 \text{ Kg/cm}^2$ .



Solución :

Los pasadores además de soportar la carga vertical deben soportar el momento que se origina respecto del centro de los mismos.

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 & \quad F_a + F_b = P & \text{(i)} \\ \Sigma M_A = 0 & \quad P(75+9) = F_b \cdot 9 & \text{(ii)} \\ \text{De i y ii} & \quad F_b = 933.33 \text{ Kg} \end{aligned}$$

$$F_a = -833.33 \text{ Kg}$$

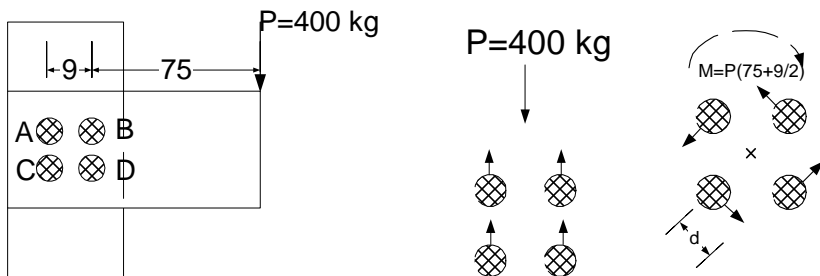
$$\tau_a = F_a / A = 833.33 / (\pi \cdot 1^2 / 4) = 1061.02 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_b = F_b / A = 933.33 / (\pi \cdot 1^2 / 4) = 1188.34 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\eta_a = S_y / \tau_a = 1.036 \text{ (No hay falla)}$$

$$\eta_b = S_y / \tau_b = 0.925 \text{ (Hay falla)}$$

3.15. La plataforma de la figura soporta una carga de 400 Kg y esta soportada por 4 pasadores de 1 cm de diámetro. Se pide el coeficiente de seguridad en los pasadores. Tomar  $S_y = 1100 \text{ Kg/cm}^2$ .



Solución :

$$d = (9) \sqrt{2}/2 = 6,36$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_a = F_b = F_c = F_d = P/4 = 100 \text{ Kg}$$

$$\Sigma M_o = 0 \quad F_a = F_b = F_c = F_d = M/(d4)$$

$$F_a = F_b = F_c = F_d = [400(75+9/2)]/[4(6.36)] = 1250 \text{ Kg}$$

(i)  
(ii)

La composición da

$$F_{ax} = -1250 \cos 45 = - 883.88 \text{ Kg}$$

$$F_{ay} = 100 - 1250 \sin 45 = -783.88 \text{ Kg}$$

$$F_{atot} = 1181.40 \text{ Kg}$$

$$F_{bx} = -1250 \cos 45 = - 883.88 \text{ Kg}$$

$$F_{by} = 100 + 1250 \sin 45 = 983.88 \text{ Kg}$$

$$F_{btot} = 1322.60 \text{ Kg}$$

$$F_{cx} = 1250 \cos 45 = 883.88 \text{ Kg}$$

$$F_{cy} = 100 - 1250 \sin 45 = -783.88 \text{ Kg}$$

$$F_{ctot} = 1181.40 \text{ Kg}$$

$$F_{dx} = 1250 \cos 45 = 883.88 \text{ Kg}$$

$$F_{dy} = 100 + 1250 \sin 45 = 983.88 \text{ Kg}$$

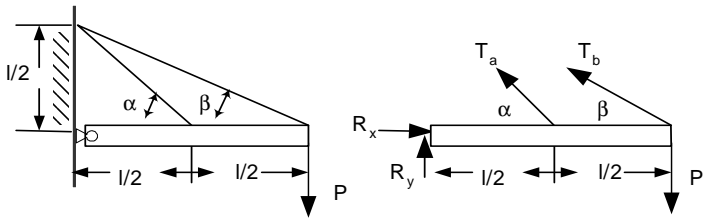
$$F_{dtot} = 1322.60 \text{ Kg}$$

Los pasadores más solicitados son los "b" y "d", es decir los de la derecha

$$\tau_b = \tau_d = F/A = 1322.60/(\pi \cdot 1^2/4) = 1683.98 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\eta = S_y/\tau = 0.653 \text{ (Hay Falla)}$$

3.16. La plataforma de la figura soporta una carga de 1000 Kg y esta soportada por un pasador en su extremo izquierdo y dos cables. Se pide el diámetro del pasador O. Tomar  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$ .



Solución :

$$\text{De } 2.11T_a = 1.405 P = 1405 \text{ Kg}$$

$$T_b = 1.124 P = 1124 \text{ Kg}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_x - T_a \cos \alpha - T_b \cos \beta = 0 \quad \text{(i)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_y + T_a \sin \alpha + T_b \sin \beta - P = 0 \quad \text{(ii)}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 26,56$$

$$R_x = 1998.9 \text{ Kg}$$

$$R_y = -1496.9 \text{ Kg}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = 2497.21 \text{ Kg}$$

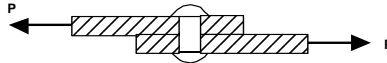
$$\tau_{\max} = R/A_N = 1577.21/(\pi \varnothing_{\text{pas}}^2/4) < 900 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\varnothing_{\text{pas}} = 1.88 \text{ cm}$$

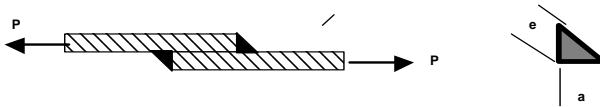
### PROBLEMAS PROPUESTOS

3.17. Una pieza circular con un diámetro de 1 cm soporta una fuerza cortante de 150 Kg. Se piden a) Los esfuerzos para ángulos de 0 a 360 con intervalos de 10. y b) Graficar  $\sigma$  vs.  $\tau$

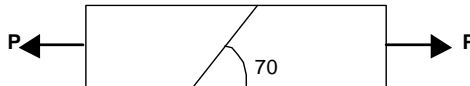
3.18. Cuantos remaches de 2 cm. de diámetro se necesitan para unir dos placas que deben soportar una fuerza de corte de 1500 Kg. Tomar  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$



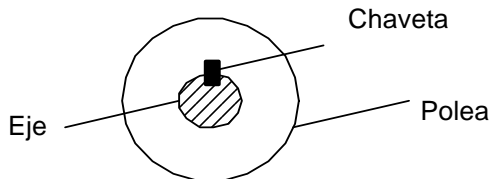
3.19. Dos placas con un ancho de  $b = 3 \text{ cm}$  y un espesor de  $e = 0,5 \text{ cm}$ . están unidas por cordones de soldadura a  $45^\circ$ : Se pide hallar la carga máxima que la unión soportan. Tomar  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$



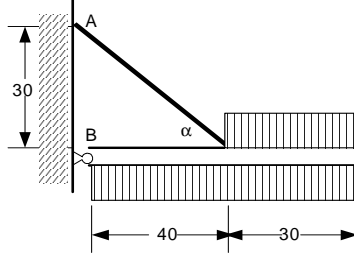
3.20. Una pieza de madera con sección cuadrada soporta una carga de 1000 Kg y esta unida a  $70^\circ$ . Se piden las dimensiones. Tomar  $S_y = 200 \text{ Kg/cm}^2$



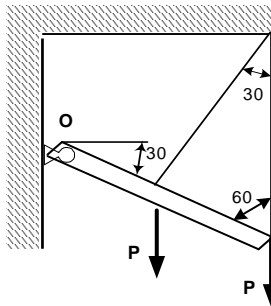
3.21. Una polea esta fijada a su eje por medio de un pasador rectangular. El momento torsor soportado es de 150 Kg cm y el diámetro del eje de 3 cm. Hallar el área que debe tener la chaveta. Tomar  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$



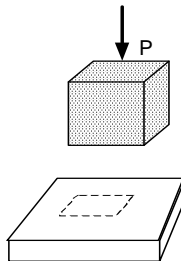
3.22. La plataforma de la figura esta soportada por un pasador en su extremo izquierdo y un cable. Para una intensidad de la carga distribuida de  $H = 10 \text{ Kg/cm}$ . Se pide hallar los diámetros de los pasadores en A, B y C. Tomar  $S_y' = 900 \text{ Kg/cm}^2$



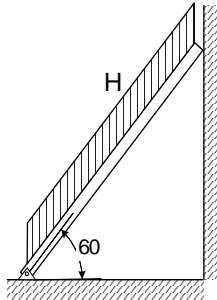
3.23. La plataforma de la figura esta soportada por un pasador en su extremo izquierdo y dos cables. Para una carga horizontal en su extremo derecho de  $P = 100 \text{ Kg}$ , se pide hallar el diámetro del pasador en O. Tomar  $S_y' = 900 \text{ Kg/cm}^2$



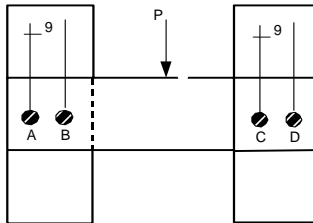
3.24. Que fuerza se necesita para troquelar una pieza de sección cuadrada de 6 cm de lado y 0,3 cm de alto. Tomar  $S_y' = 1500 \text{ Kg/cm}^2$



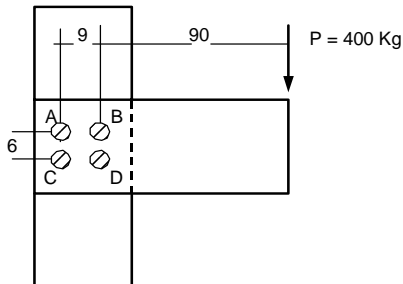
3.25. Una escalera soporta una carga distribuida de  $H = 10 \text{ Kg/cm}$  y se fija al piso por dos pasadores para evitar su deslizamiento. Se pide hallar el diámetro de los pasadores. Tomar  $S_y' = 900 \text{ Kg/cm}^2$ .



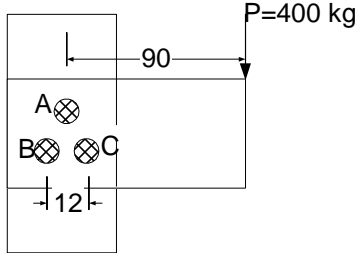
3.26. La plataforma de la figura esta soportada por 4 pasadores de diámetro de 1,5 cm y en ella actúa una fuerza P. Se pide hallar el valor máximo de P que pueden soportar los pasadores. Tomar  $S_y' = 900 \text{ Kg/cm}^2$ .



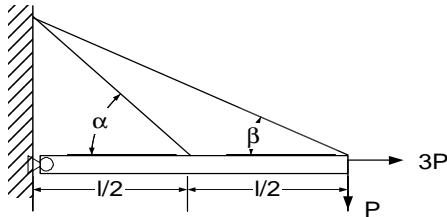
3.27. La plataforma de la figura esta soportada por 4 pasadores con un diámetro de 1 cm y en ella actúa una fuerza  $P = 2000 \text{ Kg}$  Se pide el factor de seguridad en los pasadores. Tomar  $S_y' = 1100 \text{ Kg/cm}^2$



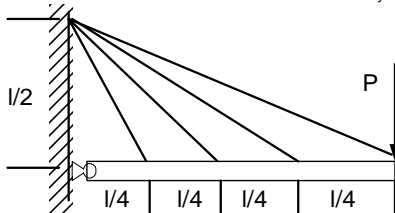
3.28. La plataforma de la figura esta soportada por 3 pasadores con un diámetro de 1 cm y en ella actúa una fuerza  $P = 400 \text{ Kg}$  Se pide el factor de seguridad en los pasadores. Tomar  $S_y = 1100 \text{ Kg/cm}^2$ .



3.29. La plataforma de la figura esta soportada por un pasador en su extremo izquierdo y dos cables. Para las cargas en su extremo derecho de  $P$  y  $3P$ , se pide hallar el diámetro del pasador en O. Tomar  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$  y  $P = 1000 \text{ Kg}$



3.30. La plataforma de la figura esta soportada por un pasador en su extremo izquierdo y cuatro cables. Para una carga vertical en su extremo derecho de  $P = 1000 \text{ Kg}$ , se pide hallar el diámetro del pasador en O. Tomar  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$ .



## 4.- TORSIÓN

### 4.1.- INTRODUCCIÓN

Una pieza está sometida a cargas de torsión cuando sobre ella están aplicadas Pares o Momentos dirigidos a lo largo de su eje centroidal y perpendicularmente a la sección transversal (a-a).

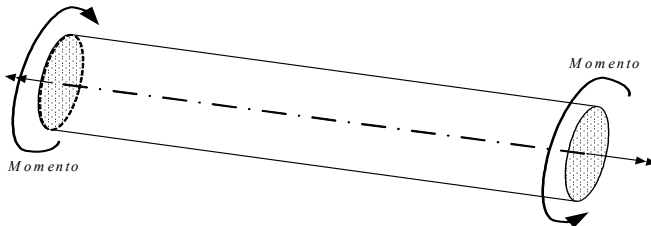


Fig. 4.1 Barra sometida a Cargas de Torsión

Ejemplos reales de elementos sometidos a este tipo de carga son los árboles y ejes que por lo general tienen movimiento giratorio

Para la validez de las ecuaciones y resultados de este capítulo se asume la veracidad de las siguientes condiciones :

- 1.- Los elementos son rectos
- 2.- Los elementos tienen secciones transversales uniformes
- 3.- Las dimensiones de la sección transversal son pequeñas respecto a la longitud
- 4.- Las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje axial
- 5.- Las deformaciones son pequeñas comparadas con las dimensiones de la barra
- 6.- Los esfuerzos no sobrepasan los límites de fluencia.
- 7.- Las cargas se aplican en el eje de simetría de la sección transversal de la viga
- 8.- Las vigas son relativamente largas y angostas respecto a su peralte

### 4.2.- ESFUERZOS

Considérese una pieza cilíndrica sometida a momentos de torsión en sus extremos. Las generatrices rectilíneas de la superficie lateral del cilindro (ab) se transforman en hélices (ab') debido a la rotación entre secciones.



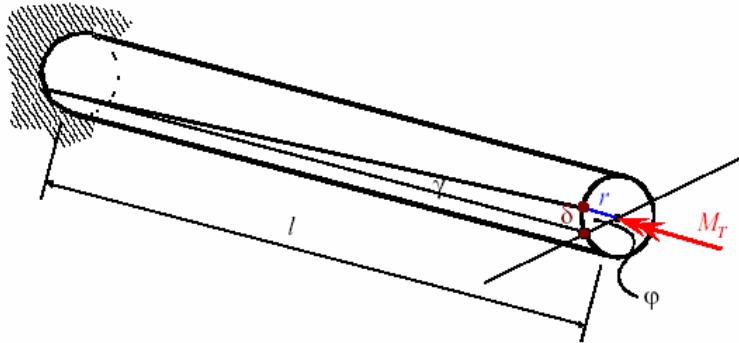


Fig. 4.2 Rotación entre secciones

Por la ausencia de cargas axiales se concluye que en torsión no aparecen esfuerzos normales sino únicamente tangenciales.

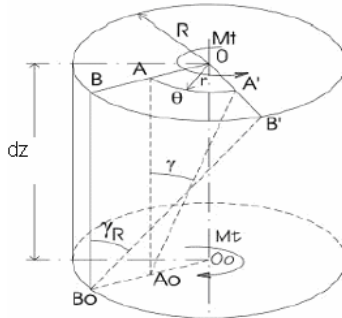


Fig. 4.3 Elemento Diferencial

Considérese un elemento diferencial de una barra torsionada. El ángulo que giran sus extremos es  $d\theta$ . Además

$$AA' = rd\theta \approx \gamma dy \quad (4.1)$$

$$BB' = Rd\theta \approx \gamma_R dy \quad (4.2)$$

$$\gamma = \gamma_R \frac{r}{R} \quad (4.3)$$

De acuerdo a la ley de Hooke

$$\tau = G\gamma = G\gamma_R \frac{r}{R} = Gr \frac{d\theta}{dy} \quad (4.4)$$

Expresión que muestra que los esfuerzos tangenciales varían linealmente con el radio, alcanzando su valor máximo en el borde de la sección:

De la estática

$$Mt = \int_A \tau(r) dA = \int_A Gr \frac{d\theta}{dy} (r) dA = G \frac{d\theta}{dy} \int_A r^2 dA = G \frac{d\theta}{dy} I_o \quad (4.5)$$

De 4.4 y 4.5

$$\tau = \frac{M_t r}{I_o} \quad (4.6)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t R}{I_o} \quad (4.7)$$

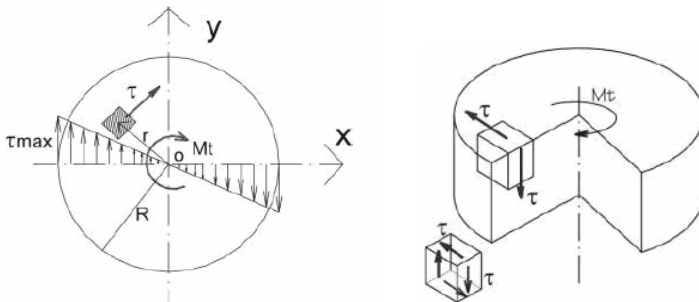


Fig. 4.4 Esfuerzos provocados por Torsión

Para evitar la falla

$$\tau_{\max} = \frac{M_t R}{I_o} = \frac{M_t \left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{\pi d^4}{32}} \leq S_y' \quad (4.8)$$

De donde

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi S_y'}} \quad (4.9)$$

### 4.3.- DEFORMACIONES

El Angulo de la rotación relativa de las secciones extremas de una barra circular sujeta a torsión se calcula con 4.5

$$\theta = \int \frac{M_t}{GI_o} dy \quad (4.10)$$

#### 4.4 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES PARA BARRAS CIRCULARES HUECAS

Las ecuaciones 4.7 y 4.10 son validas para barras circulares huecas con la inercia igual a :

$$I_o = \frac{\pi(d_2^4 - d_1^4)}{32} = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{2} \quad (4.11)$$

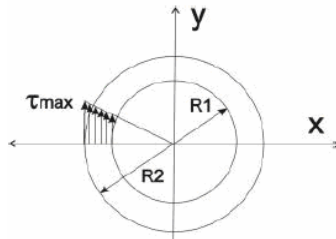


Fig. 4.5 Barras Huecas

La sección hueca es más conveniente que la sección llena ya que siempre se requiere menor área para resistir el mismo esfuerzo. No debemos confundir área con diámetro, ya que para igual resistencia el diámetro de la sección maciza será menor que el exterior de la hueca. Lo que importa es que aún con menor diámetro, la sección maciza es siempre más pesada y por ende más cara. Lo que concluimos recientemente se debe a que los esfuerzos desarrollados en la parte central de la sección maciza son muy pequeños y no tienen un aporte muy significativo, por lo que para resistir a la torsión las secciones más convenientes son las huecas.

#### 4.5 SECCIÓN TUBULAR CERRADA DE PEQUEÑO ESPESOR

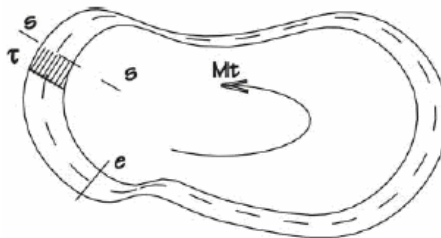


Fig. 4.5 Tubo de Pequeño Espesor

Considérese una barra tubular de forma arbitraria. Si su espesor es muy delgado, en cualquier punto se puede suponer que los esfuerzos cortantes son constantes y que su dirección es tangente al contorno medio de la sección. La fuerza en un pequeño elemento tubular es

$$dF = \tau dA = \tau e ds \tag{4.12}$$

Si elegimos un punto cualquiera del plano de la sección y llamamos  $r$  a la distancia al mismo de la fuerza  $dF$ , el momento

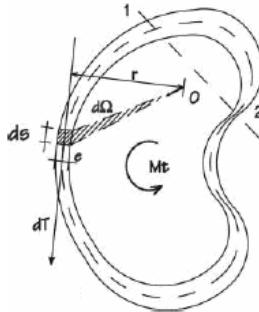


Fig. 4.6 Momento y Esfuerzos

$$M_t = \int_A (\tau e dS) r \tag{4.13}$$

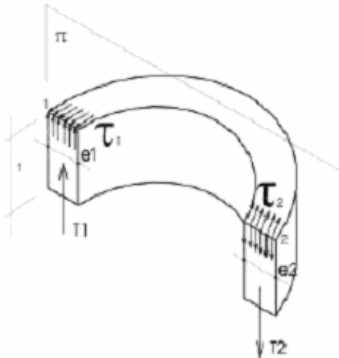


Fig. 4.7 Fuerzas Axiales

Si se aísla una porción tubular, en sus extremos se tienen esfuerzos cortantes tangenciales que originan a su vez esfuerzos cortantes axiales que por razones de equilibrio deben dar fuerzas axiales de igual magnitud

$$T_1 = \tau_1 e dz = \tau_1 e dz = T_2$$

$$\tau = cte \tag{4.14}$$

$$Mt = \tau \int_A r dS \tag{4.15}$$

$$r dS = 2 dA \tag{4.16}$$

$$Mt = 2\tau \int_A dA = 2\tau eA \tag{4.17}$$

$$\tau = \frac{M_t}{2eA} \tag{4.18}$$

A Área que encierra la línea media de la sección

#### 4.6 SECCIÓN RECTANGULAR

La solución exacta pertenece a la Teoría de la Elasticidad. En la figura se muestran los esfuerzos tangenciales donde los máximos tienen lugar en el centro del lado mayor.

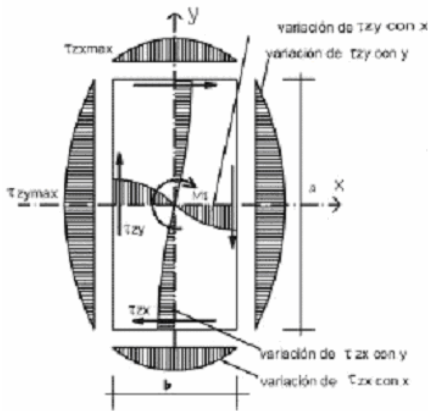


Fig. 4.7 Distribución de Esfuerzos en una Barra de sección Rectangular

Los esfuerzos cortantes máximos y el ángulo específico de torsión pueden calcularse mediante las fórmulas 4.17, 4.18 y 4.19 respectivamente. Los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son funciones de la relación de lados a/b y se obtienen de la tabla 4.1.

$$\tau_{zy \max} = \frac{M_t}{\alpha ab^2} \quad (4.19)$$

$$\tau_{zx \max} = \gamma \tau_{zy \max} \quad (4.20)$$

$$\theta = \frac{M_t}{\beta ab^3 G} \quad (4.21)$$

a/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
$\gamma$	1.00	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

Tabla 4.1 Coeficientes de torsión rectangular

#### 4.7 PROBLEMAS HIPERESTATICOS

Al igual que en la tracción, en torsión hay problemas que no pueden ser resueltos con las ecuaciones de equilibrio ya que el número de incógnitas es superior al de las ecuaciones. Estos se conocen como problemas hiperestaticos y para su solución se deben incluir ecuaciones adicionales de deformaciones.

## PROBLEMAS RESUELTOS

- 4.1. Una pieza cilíndrica de Acero de diámetro  $\varnothing = 3 \text{ cm}$  y largo  $L=100 \text{ cm}$  esta sometida en sus extremos a una carga de torsión de  $1000 \text{ Kg cm}$ . Se pide hallar :
- Los esfuerzos máximos
  - El coeficiente de seguridad si la fluencia es  $S_y = 960 \text{ Kg/cm}^2$
  - Las deformadas total y unitaria longitudinal y transversal

Solución :

La inercia es  $I = \pi \varnothing^4/32 = 7,95 \text{ cm}^4$

- a) Esfuerzo máximo

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= M_t R / I_o = 1000(1,5) / 7,95 \\ \tau_{\max} &= 188,62 \text{ Kg/cm}^2\end{aligned}$$

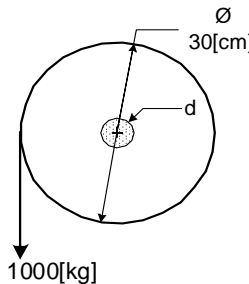
- b) Coeficiente de seguridad

$$\begin{aligned}\eta &= S_y / \tau_{\max} = 960 / 188,62 = 5,08 \\ \eta &= 5,08\end{aligned}$$

- c) Deformada  $\theta = M_t l / (G I_o) = 1000(100) / (6,67 \times 10^5 \cdot 7,95)$

$$\theta = 0,0188 \text{ rad}$$

- 4.2. Un tambor cuyo diámetro es  $30 \text{ cm}$  esta montado sobre un eje y debe levantar una carga de  $1000 \text{ Kg}$  Calcular el diámetro del eje. Tomar  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$



Solución :

El momento  $M_t = 1000(30)/2 = 15000 \text{ Kg cm}$

De 4.9

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi S_y}}$$

$$d = 4,39 \text{ cm}$$

4.3. Un motor de 5 Hp esta acoplado por medio de una transmisión a un eje que gira a 30 rpm. Tomando un limite de fluencia de  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\eta = 1,5$  se pide calcular el diámetro del eje.

Solución:

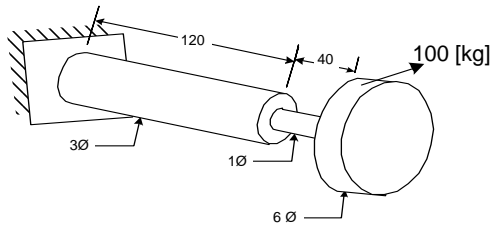
La potencia  $Pot \text{ (CV)} = M_t \text{ (Kg m)} \omega \text{ (rad/seg)} / 75$   
 $\omega \text{ (rad/seg)} = (30 \text{ rpm}) (2\pi \text{ rad / rev}) (1 \text{ min}/60 \text{ s}) = 3,14 \text{ rad/seg}$   
 El momento  $M_t = 5 (75) / 3,14 = 119,36 \text{ Kg m} = 11942,59 \text{ Kg cm}$

De 4.9

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi S_y}} = 4,66 \text{ cm}$$

Se adopta  $d = 5 \text{ cm}$

4.4. En el sistema de la figura, se pide el ángulo de deformación del extremo libre respecto al empotramiento. El material es acero y las dimensiones están en cm



Solución:

$$M_t = F r = 100(3) = 300 \text{ Kg cm}$$

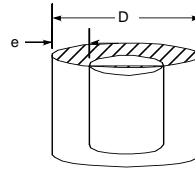
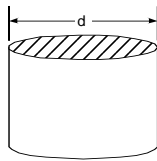
$$\theta_1 = M_t L / (G I_o) = 300(120) / (6.67 \times 10^5 \pi 3^4 / 32) = 0.00678 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = M_t L / (G I_o) = 300(40) / (6.67 \times 10^5 \pi 6^4 / 32) = 0.182 \text{ rad}$$

$$\theta_{tot} = \theta_1 + \theta_2 = 0.189 \text{ rad}$$

4.5. Halla el diámetro "d" y la masa "m" de un cilindro sólido que tenga la misma resistencia que otro cilindro del mismo material pero hueco con un diámetro externo "D" y un espesor "e"





Solución:

a) Los esfuerzos de corte deben ser menores a la fluencia

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{I_o} \leq S_y'$$

$$\frac{T}{S_y'} \leq \frac{I_o}{R}$$

En el cilindro sólido

$$\frac{T}{S_y'} \leq \frac{\pi d^4}{32} \frac{2}{d} \tag{i}$$

En el cilindro hueco

$$\frac{T}{S_y'} \leq \frac{\pi [D^4 - (D - 2e)^4]}{32} \frac{2}{D} \tag{ii}$$

Ya que ambos tienen la misma carga y el mismo material. Igualando i y ii

$$\frac{d^4}{d} = \frac{[D^4 - (D - 2e)^4]}{D}$$

$$d = \left[ \frac{[D^4 - (D - 2e)^4]}{D} \right]^{1/3} \tag{iii}$$

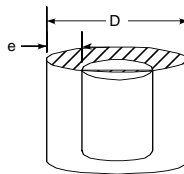
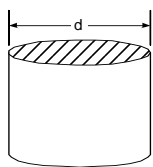
La masa del cilindro hueco es

$$M_h = \rho \frac{\pi}{4} [D^2 - (D - 2e)^2] \tag{iv}$$

La masa del cilindro sólido

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} = \rho \frac{\pi}{4} \left[ \frac{[D^4 - (D - 2e)^4]}{D} \right]^{2/3} \tag{v}$$

4.6. Halla el diámetro “d” y la masa “m” de un cilindro sólido que tenga la misma resistencia que otro cilindro del mismo material pero hueco con un diámetro externo D = 5 cm y un espesor e = 0,3 cm.



Solución:

$$d = \left[ \frac{D^4 - (D - 2e)^4}{D} \right]^{1/3}$$

a)

$$d = 3.6849 \text{ cm}$$

$$\frac{M_h}{M_s} = \frac{D^2 - (D - 2e)^2}{d^2}$$

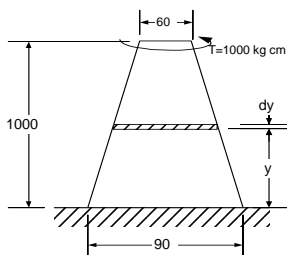
b)

$$(M_h/M_s) = 0.41536$$

Este resultado indica que el diámetro del cilindro sólido es menor que el del hueco pero que la pieza hueca solo pesa el 41,64 % de la pieza sólida.

4.7. En el sistema de la figura se calcular

- El esfuerzo cortante máximo
- La deformada total



Solución:

El diámetro  $d(y) = - (30/1000) y + 90$

$$y = 0 \quad d = 90$$

$$y = 1000 \quad d = 60$$

a) El esfuerzo máximo se presenta en la sección con menor área ( $y=1000$ )

$$\tau_{\max} = 16 M_t / (\pi d^3) = 16(1000) / [\pi (60)^3]$$

$$\tau_{\max} = 0,0235 \text{ Kg/cm}^2$$

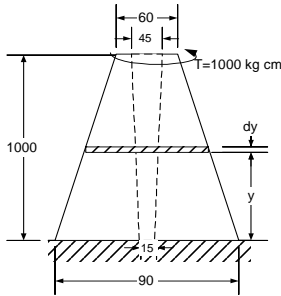
b) La deformada

$$\theta = \int_0^h \frac{M_t}{GI_o} dy = \int_0^{1000} \frac{1000(32)}{G\pi(-0,03y + 90)^4} dy$$

$$\theta = 0.368717 / G$$

4.8. En el sistema de la figura se pide calcular

- El esfuerzo cortante máximo
- La deformada total



Solución :

Las ecuaciones de los diámetros externo e interno son :

$$D(y) = - (30/1000) y + 90$$

$$d(y) = (30/1000) y + 15$$

La inercia

$$I_o = \int_0^h \left[ \left( -\frac{30}{1000} y + 90 \right)^4 - \left( \frac{30}{1000} y + 15 \right)^4 \right] \frac{\pi}{32} dy$$

a) El esfuerzo máximo se presenta en la menor inercia  $y = 1000$

$$I_{o \min} = \pi (60^4 - 45^4)/32 = 869767.09 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{\max} = M_t R / I_o = (1000)(30) / 869767.09$$

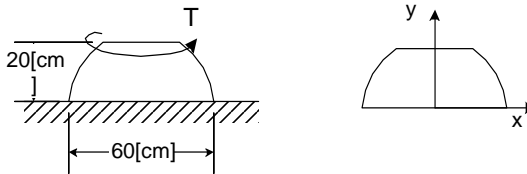
$$\tau_{\max} = 0,0344 \text{ Kg/cm}^2$$

b) La deformada

$$\theta = \int_0^h \frac{M_t}{GI_o} dy = \int_0^{1000} \frac{1000(32)}{G\pi[(-0,03y + 90)^4 - (0,03y + 15)^4]} dy$$

$$\theta = 0,4145 / G$$

4.9. La pieza de la figura tiene una forma semiesférica truncada, con un diámetro en la base de 60 cm y una altura de 20 cm. Para un momento torsor T aplicado en su parte superior, se pide la deformación angular.



Solución:

Definiendo un sistema de coordenadas en la base. La ecuación del círculo es:

$$x^2 + y^2 = 30^2$$

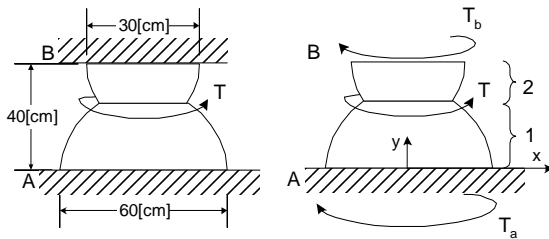
El diámetro  $d = 2x = 2\sqrt{(30^2 - y^2)}$

$$\theta = \int_0^{20} \frac{T 32 dy}{G \pi [2(30^2 - y^2)^{1/2}]^4} = \frac{T 2}{G \pi} \int_0^{20} \frac{dy}{(30^2 - y^2)^2}$$

$$\theta = \int_0^h \frac{M_t}{G I_o} dy = \int_0^{20} \frac{M_t(32)}{G \pi [2\sqrt{(30^2 - y^2)}]^4} dy$$

$$\theta = 2,3634 \cdot 10^{-5} M_t / G$$

4.10. La pieza de la figura esta formada por dos semiesferas truncadas con diámetros de 60 y 30 cm en sus bases. Para un momento torsor T aplicado en la sección común, se pide hallar los momentos de reacción en A y B



Solución:

$$\Sigma M = 0 T_a + T_b = T \quad (i)$$

Sistema hiperestático con una ecuación y dos incógnitas. La ec de deformadas

$$\theta_t = \theta_1 + \theta_2 = 0$$

Con el sistema de coordenadas en la base, las ec de los círculos y diámetros son:

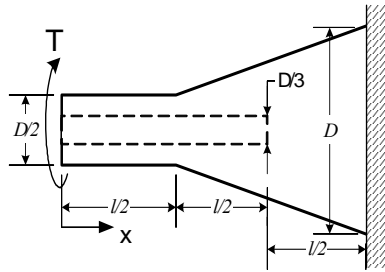
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 30^2 \\ x^2 + (y - 40)^2 &= 15^2 \\ d_1 = 2x &= 2(30^2 - y^2)^{1/2} \\ d_2 = 2x &= 2[15^2 - (y - 40)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Los diámetros se igualan cuando

$$\begin{aligned} d_1 = 2(30^2 - y^2)^{1/2} &= d_2 = 2[15^2 - (y - 40)^2]^{1/2} \\ y &= 28,43 \\ \theta_1 &= \int_0^{28,43} \frac{T_a 32 dy}{G \pi [2(30^2 - y^2)^{1/2}]^4} = \frac{T_a (1.309) 10^{-4}}{G} \\ \theta_2 &= \int_{28,43}^{40} \frac{(T_a - T) 32 dy}{G \pi [2(15^2 - (y - 40)^2)^{1/2}]^4} = \frac{(T_a - T)(2.761) 10^{-4}}{G} \\ \theta_T &= \frac{T_a (1.309) 10^{-4}}{G} + \frac{(T_a - T)(2.761) 10^{-4}}{G} = 0 \end{aligned}$$

De donde  $T_a = 0,678 T$   
 $T_b = 0,322 T$

4.11. Determinar la deformación total que se produce en la barra de la figura que consta de dos tramos, una cilíndrica y otra cónica, sometida a la acción de un momento torsor T en su extremo libre. Tomar D = 10 cm y l = 50 cm.



Solución:

$$\theta = \int_0^{1/2} \frac{Tdx}{GI_{o1}} + \int_{1/2}^l \frac{Tdx}{GI_{o2}} + \int_l^{3/2} \frac{Tdx}{GI_{o3}} \quad (i)$$

$0 < x < l/2$

$$\varnothing_{\text{ext}} = D/2$$

$$\varnothing_{\text{int}} = D/3$$

$$I_{o1} = \frac{\pi \left[ (D/2)^4 - (D/3)^4 \right]}{32} \quad (ii)$$

$l/2 < x < l$

$$\varnothing_{\text{ext}} = (D/2)(x/l) + D/4$$

$$\varnothing_{\text{int}} = D/3$$

$$I_{o2} = \frac{\pi \left\{ \left[ \frac{Dx}{2l} + \frac{D}{4} \right]^4 - \left( \frac{D}{3} \right)^4 \right\}}{32} \quad (iii)$$

$l < x < 3l/2$

$$\varnothing_{\text{ext}} = (D/2)(x/l) + D/4$$

$$\varnothing_{\text{int}} = 0$$

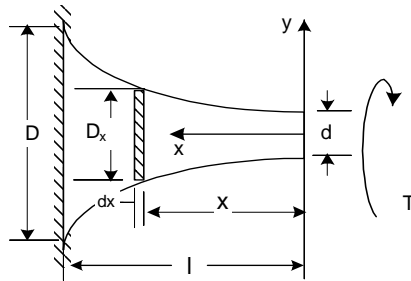
$$I_{o3} = \frac{\pi \left[ \frac{Dx}{2l} + \frac{D}{4} \right]^4}{32} \quad (IV)$$

$$\theta = \frac{T32}{G\pi D^4} \int_0^{l/2} \frac{dx}{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^4} + \int_{1/2}^l \frac{dx}{\left(\frac{x}{2l} + \frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^4} + \int_l^{3/2} \frac{dx}{\left(\frac{x}{2l} + \frac{1}{4}\right)^4} \quad (V)$$

Reemplazando

$$\theta = 0.51 T/G$$

4.12. Hallar una expresión para determinar la deformación que sufre una barra con sección variable según una función cuadrática, como se ve en la figura.



Solución:

La variación del diámetro en función de x es cuadrática

$$D = Ax^2 + B$$

para

$$x = 0 \quad D = d$$

$$x = l \quad D = D$$

resolviendo

$$D_x = \left( \frac{D-d}{l^2} \right) x^2 + d$$

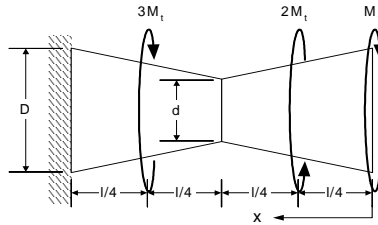
$$\theta = \int_0^l \frac{T \cdot dx}{G \cdot I_o}$$

$$\theta = \int_0^l \frac{T 32 dx}{G \pi \left[ \left( \frac{D-d}{l^2} \right) x^2 + d \right]^4}$$

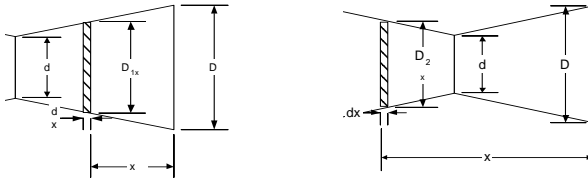
$$\theta = \frac{Tl}{G\pi} \left\{ \frac{10.4 \tan \left[ \frac{(D-d)}{\sqrt{d(D-d)}} \right]}{d^3 \sqrt{d(D-d)}} + \frac{10}{d^3 D} + \frac{20}{3d^2 D^2} + \frac{16}{3dD^3} \right\}$$

$$\theta = \int_0^l \frac{T \cdot dx}{G \cdot I_o} = \int_0^l \frac{T 32 dx}{G \pi \left[ \left( \frac{D-d}{l^m} \right) x^m + d \right]^4}$$

4.13. Determinar la deformación angular de la pieza de sección circular, sometida a las cargas de torsión mostradas en la figura. Tomar  $D = 10 \text{ cm}$ ;  $d = 3 \text{ cm}$ ;  $l = 150 \text{ cm}$ ;  $Mt = 7000 \text{ kg}\cdot\text{m}$ ;  $G = 7.648 \times 10^5 \text{ kg}/\text{cm}^2$



Solución:



$$D_1 = \frac{2(d-D)x}{l} + D$$

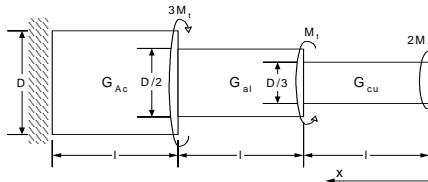
$$D_2 = \frac{2(D-d)x}{l} - D + 2d$$

$$\theta = \int_0^{l/4} \frac{M_t \cdot 32}{G\pi D_1^4} dx + \int_{l/4}^{l/2} -\frac{M_t \cdot 32}{G\pi D_1^4} dx + \int_{l/2}^{3l/4} -\frac{M_t \cdot 32}{G\pi D_2^4} dx + \int_0^{l/4} \frac{2M_t \cdot 32}{G\pi D_2^4} dx$$

$$\theta = \frac{M_t l}{G\pi} \left[ \frac{16(7D^2 + 4Dd + d^2)}{3D^3(D+d)^3} - \frac{16(7D^2 - 32Dd + 37d^2)}{3(D-2d)^3(D-3d)^3} - \frac{16(D^2 + 4Dd + 7d^2)}{3d^3(D+d)^3} + \frac{32(7D^2 + 4Dd + d^2)}{3D^3(D+d)^3} \right]$$

$$\theta = -4.283 \text{ Mt/G}$$

4.14. Calcular la deformación angular del eje circular de la figura. Tomar  $D = 20 \text{ cm}$ ;  $l = 50 \text{ cm}$   $G_{ac} = 7.64 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ;  $G_{al} = 2.65 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ;  $G_{cu} = 4.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ;  $M_t = 2000 \text{ Kg-cm}$



Solución:

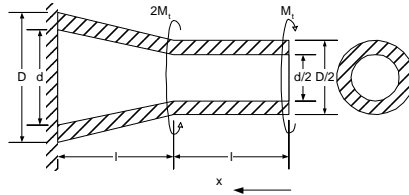
$$\theta = \int_0^l \frac{2M_t \cdot 32}{G_{cu} \pi (D/3)^4} dx + \int_l^{2l} \frac{(2M_t - M_t) \cdot 32}{G_{al} \pi (D/2)^4} dx + \int_{2l}^{3l} \frac{(2M_t - M_t + 3M_t) \cdot 32}{G_{ac} \pi (D)^4} dx$$



$$\theta = \frac{M_t l}{\pi D^4} \left[ \frac{2(32)(81)}{G_{cu}} + \frac{1(32)(16)}{G_{al}} + \frac{4(32)(1)}{G_{ac}} \right]$$

$$\theta = 5.866 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

4.15. Hallar la deformación de la pieza troncocónica y cilíndrica hueca mostrada en la figura. Tomar  $D = 20\text{cm}$ ,  $d = 5\text{ cm}$ ,  $M_t = 8000\text{ Kg}\cdot\text{cm}$ ,  $G = 7.6 \times 10^5\text{ Kg}/\text{cm}^2$ .



Solución:

$$0 < x < l$$

$$D_{\text{ext}} = D/2$$

$$d_{\text{int}} = d/2$$

$$l < x < 2l$$

$$D_{\text{ext}} = (Dx)/(2l)$$

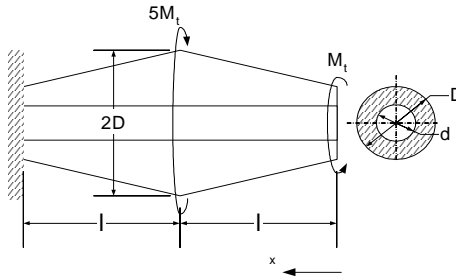
$$d_{\text{int}} = (dx)/(2l)$$

$$\theta = \int_0^l \frac{M_t 32}{G\pi \left[ \left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4 \right]} dx - \int_l^{2l} \frac{M_t 32}{G\pi \left[ \left(\frac{Dx}{2l}\right)^4 - \left(\frac{dx}{2l}\right)^4 \right]} dx$$

Integrando

$$\theta = 7.243 \times 10^{-4} M_t/G$$

4.16. Hallar la deformación angular del extremo derecho de la pieza mostrada en la figura. Evaluar el resultado cuando  $d = D/2$  ;



Solución :

$$\Sigma M = 0M_a + 2M_t - M_t - 5M_t + M_b = 0$$

(i)

$$0 < x < l$$

$$D_1 = D (l + x)/l$$

$$M_{t1} = M_t$$

$$l < x < 2l$$

$$D_2 = D (3l - x)/l$$

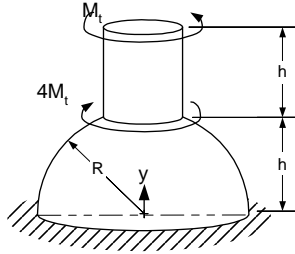
$$M_{t2} = -4M_t$$

$$\theta = \int_0^l \frac{M_{t1} 32}{G\pi(D_1^4 - d^4)} dx + \int_l^{2l} \frac{M_{t2} 32}{G\pi(D_2^4 - d^4)} dx$$

$$\theta = \frac{-9.195 M_t l}{G\pi D^4}$$

simplificando

4.17. Hallar la deformación angular del sistema. Tomar  $H=3R/4$  y  $R=5$  cm



Solución :

Definiendo un sistema de coordenadas en la base de la esfera

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$D_1(y) = 2x = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

Cuando  $y = h = 3R/4$   $D_1 = D_2$

$$D_2 = 2\sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{7}R/2$$

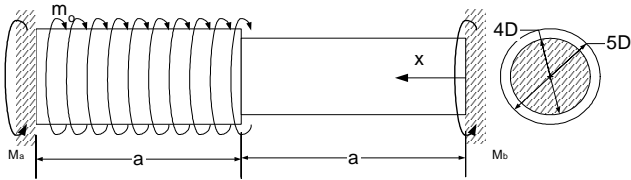
$$\theta = \int_0^{3R/4} \frac{3M_t 32}{G\pi D_1(y)^4} dy + \int_{3R/4}^{3R/2} \frac{-M_t 32}{G\pi D_2(y)^4} dy$$

$$\theta = \int_0^{3R/4} \frac{3M_t 32}{G\pi 2^4 (R^2 - y^2)^2} dy + \int_{3R/4}^{3R/2} \frac{-M_t 32(16)}{G\pi 49R^4} dy$$

$$\theta = \frac{M_t}{G\pi} \left( \frac{3 \ln 7}{2R^3} + \frac{36}{7R^3} \right) - \frac{M_t}{G\pi} \left( \frac{512}{49R^3} \frac{3}{4} \right)$$

evaluando

4.18. Hallar las reacciones en los extremos empotrados del eje de sección circular mostrado en la figura. Tomar  $m_0=10$  kg-cm/cm,  $a = 100$  cm y  $D = 2$  cm.



Solución :

$$\Sigma M = 0 \quad M_a + M_b = m_o a$$

El sistema es hiperestático con una ecuación y dos incógnitas. De las deformadas

$$\theta_{\text{total}} = \theta_1 + \theta_2 = 0$$

$$\theta = \int_0^a \frac{(M_a - m_o x)32}{G\pi(5D)^4} dx + \int_a^{2a} \frac{(M_a - m_o a)32}{G\pi(4D)^4} dx = 0$$

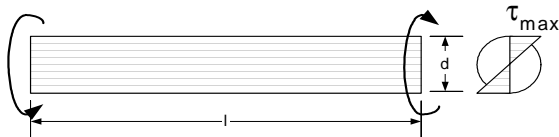
$$\frac{(M_a - m_o \frac{a}{2})}{(5)^4} + \frac{(M_a - m_o a)}{(4)^4} = 0$$

Entonces

$$M_a = 0.8547 m_o a$$

$$M_b = 0.1452 m_o a$$

4.19. Hallar la longitud que debe tener un eje macizo de acero de  $d=13$  mm de diámetro para que sus extremos giren  $90^\circ$  uno respecto del otro. No se debe rebasar un esfuerzo cortante permisible de  $S_y' = 713.8$  kg/cm<sup>2</sup>, y  $G = 8.1573 \times 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>.



Solución :

Las ecuaciones de deformación y esfuerzo

$$\theta = \frac{M_l l}{G I_o}$$

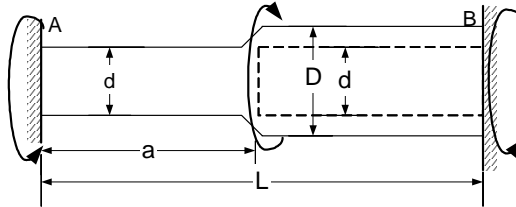
$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_l r}{I_o}$$

$$l = \frac{rG\theta}{\tau_{\max}}$$

De ambas

$$l = 116.68 \text{ m}$$

4.20. La barra de la figura tiene sección transversal circular sólida en el tramo AB, y sección transversal circular hueca en el tramo BC. Obtener la expresión de la relación a/L tal que los momentos de reacción en los apoyos sean iguales.



Solución :

$$\Sigma M = 0 \quad M_a + M_b = 2M_a = 2M_b = M_t \quad (i)$$

El sistema es hiperestático. La ecuación de deformación es :

$$\theta_{\text{tot}} = \theta_1 + \theta_2 = 0$$

$$\theta = \frac{M_a a 32}{G \pi d^4} + \frac{(M_a - M_t)(l - a) 32}{G \pi (D^4 - d^4)} = 0$$

$$M_a = \frac{d^4 M_t (l - a)}{(a D^4 - 2 a d^4 + d^4 l)}$$

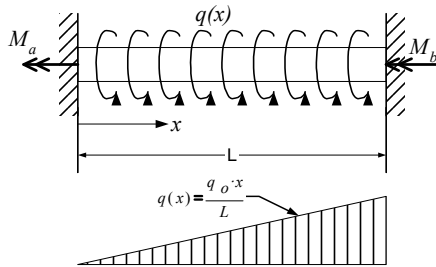
resolviendo

$$\frac{2 d^4 M_t (l - a)}{(a D^4 - 2 a d^4 + d^4 l)} = M_t \quad (ii)$$

De i y ii

$$(a / l) = (d / D)^4$$

4.21. La barra circular de la figura está empotrada en sus extremos. Sobre ella actúa un Par de Torsión distribuido  $q(x)$  en toda su longitud con intensidad cero en A y  $q_0$  en B. Se piden los momentos de reacción  $M_a$  y  $M_b$ .



Solución :

$$\Sigma M = 0 \quad M_a + M_b = M_t$$

El sistema es hiperestático. La ecuación de deformación es :

(i)

$$\theta_{\text{tot}} = 0$$

$$\theta = \int_0^l \frac{[M_a - q(x)x]}{GI_0} dx = 0$$

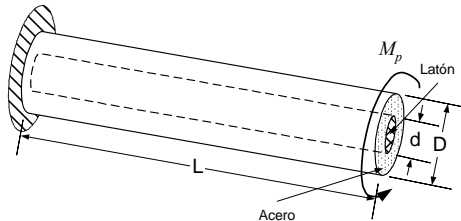
resolviendo con

$$q(x) = q_0 x / l$$

$$M_a = q_0 l / 3$$

$$M_b = q_0 l / 6$$

4.22. Una pieza está conformada por dos materiales, la exterior de acero y la interior de latón. Si los diámetros externo e interno son 75 y 60 mm respectivamente y asumiendo los esfuerzos permisibles como  $\tau_a = 82 \text{ Mpa}$  y  $\tau_l = 50 \text{ Mpa}$  en el acero y latón respectivamente, se pide hallar el momento máximo de torsión que puede aplicarse a la pieza. ( $G_a = 80 \text{ Gpa}$   $G_l = 36 \text{ Gpa}$ )



Solución :

$$\theta_{\text{laton}} = \theta_{\text{acero}}$$

$$\frac{M_{\text{laton}}/32}{G\pi d^4} = \frac{M_{\text{acero}}/32}{G\pi(D^4 - d^4)}$$

(i)  
(ii)

$$M_{\text{tot}} = M_{\text{laton}} + M_{\text{acero}}$$

$$M_{\text{laton}} = \frac{M_t G_{\text{laton}} d^4}{G_{\text{acero}} D^4 + G_{\text{laton}} d^4}$$

$$M_{\text{acero}} = \frac{M_t G_{\text{acero}} D^4}{G_{\text{acero}} D^4 + G_{\text{laton}} d^4}$$

Los esfuerzos permisibles par cada barra son:

$$\tau_{\text{laton}} = \frac{M_{\text{laton}}(d/2)32}{\pi d^4}$$

$$\tau_{\text{acero}} = \frac{M_{\text{acero}}(D/2)32}{\pi(D^4 - d^4)}$$

$$M_t = \frac{\tau_{\text{acero}}(G_{\text{acero}} D^4 + G_{\text{laton}} d^4)\pi(D^4 - d^4)}{16G_{\text{acero}} D^5}$$

$$M_t = \frac{\tau_{\text{laton}}(G_{\text{acero}} D^4 + G_{\text{laton}} d^4)\pi}{16G_{\text{laton}} d}$$

reemplazando  $M_t = 4.749 \times 10^3 \text{ Nm}$  para el acero

$M_t = 1.363 \times 10^4 \text{ Nm}$  para el latón

Luego  $M_t = 4.749 \times 10^3 \text{ Nm}$

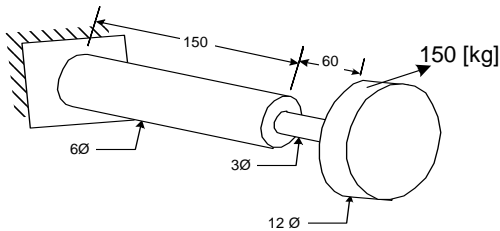
### PROBLEMAS PROPUESTOS

4.23. Hallar el diámetro de una pieza cilíndrica de Acero con un largo de 100 cm para que pueda soportar un momento de 1000 Kg cm. Tomar  $S_y = 960 \text{ Kg/cm}^2$ , y  $\eta = 2$ . Hallar además la deformación.

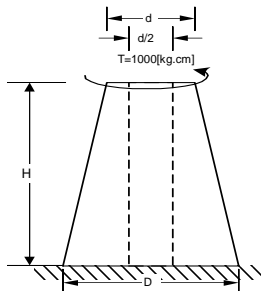
4.24. Un tambor de una maquina de elevación tiene un diámetro de 30 cm y se encuentra montado sobre un eje con un diámetro de 3 cm con  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$ . Se pide hallar el peso máximo que puede levantar.

4.25. Un eje gira a 120 rpm y esta acoplado a un motor de 9 Hp por medio de una transmisión. Si el material tiene una fluencia de  $S_y = 900 \text{ Kg/cm}^2$ . Para  $\eta = 2$  se pide calcular el diámetro del eje.

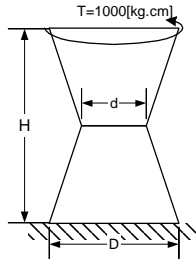
4.26. Hallar el ángulo de torsión del extremo libre respecto al extremo fijo del sistema de la figura. El material es acero y las dimensiones están en cm.



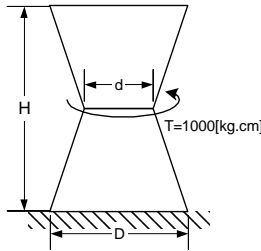
4.27. La pieza de la figura tiene forma cónica truncada. Se pide hallar la deformada total y el esfuerzo máximo



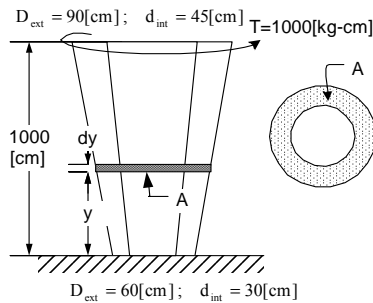
4.28. Hallar la deformada total y el esfuerzo máximo en el sistema de la figura



4.29. Hallar la deformada total y el esfuerzo máximo en el sistema de la figura

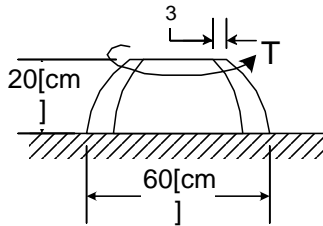


4.30. Hallar la deformada total y el esfuerzo máximo en el sistema de la figura

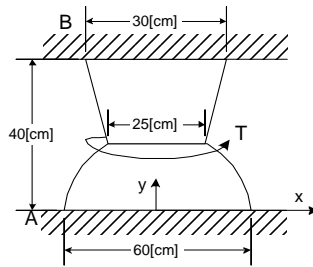


4.31. Una pieza tiene la forma de cascaron semiesférica truncada de diámetro 60 cm, altura 20 cm y espesor 3 cm. Hallar la deformada angular para un momento torsor aplicado en su parte superior de T.

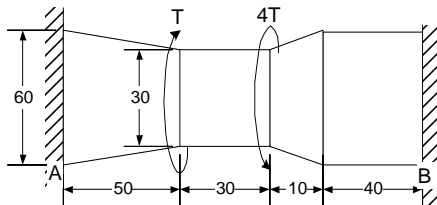




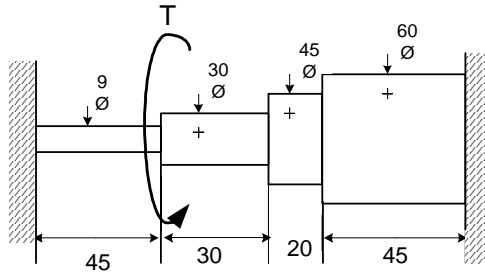
4.32. Hallar las reacciones en A y B en el sistema de la figura



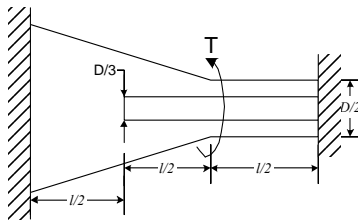
4.33. Se pide hallar las reacciones en las paredes para el sistema de la figura



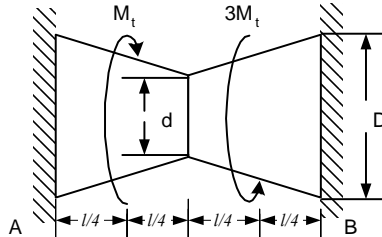
4.34. En el sistema de la figura se pide hallar las reacciones en las paredes. Las dimensiones están en cm



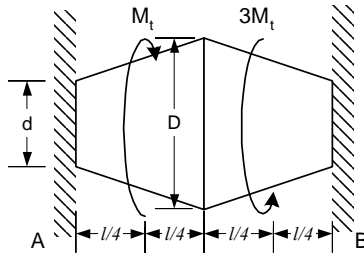
4.35. Para el sistema de la figura, se pide determinar las reacciones en los apoyos. Tomar  $D = 10 \text{ cm}$ ,  $l = 50 \text{ cm}$ ,  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  y  $P = 2000 \text{ Kg}$



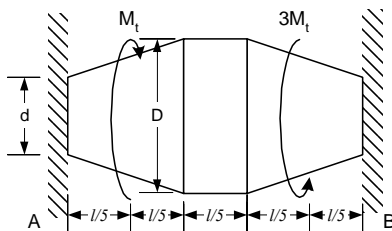
4.36. Para el sistema de la figura se pide hallar las reacciones. Tomar  $D = 10 \text{ cm}$ ;  $d = 3 \text{ cm}$ ;  $l = 150 \text{ cm}$ ;  $M_t = 7000 \text{ kg}\cdot\text{m}$ ;  $G = 7.648 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



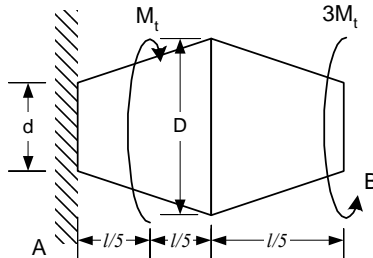
4.37. Hallar las reacciones del sistema de la figura, considerar para cada caso los valores indicados a continuación.  $D = 10 \text{ cm}$ ;  $d = 3 \text{ cm}$ ;  $l = 150 \text{ cm}$ ;  $M_t = 7000 \text{ kg}\cdot\text{m}$ ;  $G = 7.648 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



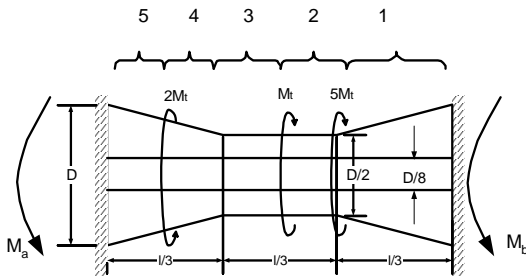
4.38. Hallar las reacciones del sistema de la figura, considerar para cada caso los valores indicados a continuación.  $D = 10 \text{ cm}$ ;  $d = 3 \text{ cm}$ ;  $l = 150 \text{ cm}$ ;  $M_t = 7000 \text{ kg}\cdot\text{m}$ ;  $G = 7.648 \times 10^5 \text{ kg}/\text{cm}^2$



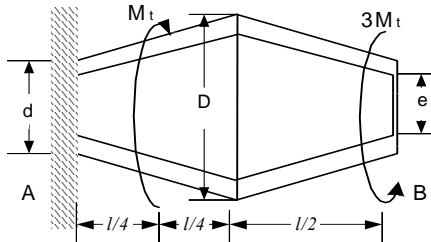
4.39. Hallar la deformación de la pieza troncocónica hueca mostrada en la figura. Tomar  $D = 20 \text{ cm}$ ,  $d = 5 \text{ cm}$ ,  $M_t = 8000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$  y  $G = 7.6 \times 10^5 \text{ kg}/\text{cm}^2$



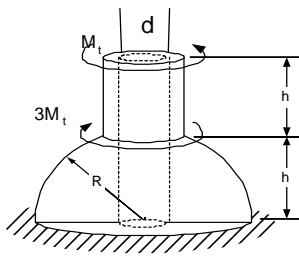
4.40. Hallar las reacciones en los extremos del sistema de la figura.



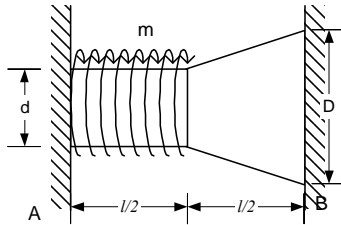
4.41. Hallar la deformación angular del extremo derecho de la pieza mostrada en la figura. Evaluar el resultado cuando  $d = D/2$  y  $e = D/9$



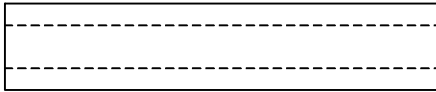
4.42. Hallar la deformación angular de la figura. Tomar  $H = 3/4R$ ,  $R = 15$  cm y  $d = 3$



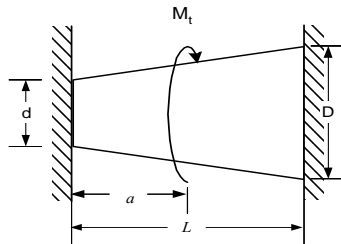
4.43. Hallar las reacciones en los extremos empotrados del bloque de sección circular mostrado en la figura. Tomar  $m_0 = 10$  kg-cm / cm,  $a = 100$  cm y  $D = 2$  cm.



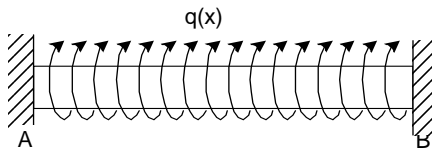
4.44. Hallar la longitud que debe tener una barra hueca de acero de  $D=1.5$  cm y  $d=0.5$  cm de diámetros para que sus extremos giren  $30^\circ$  uno respecto del otro. No se debe rebasar un esfuerzo cortante permisible de  $713.8 \text{ kg/cm}^2$ , y  $G = 8.1573 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ .

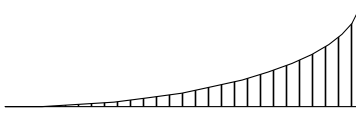


4.45. La barra cónica de la figura tiene sección transversal circular. Obtener la expresión de la relación  $a/L$  tal que los momentos de reacción en los apoyos sean iguales.

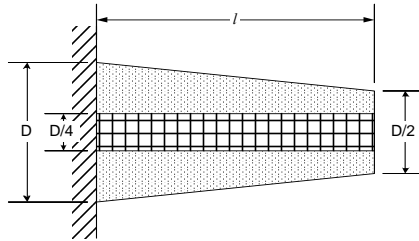


4.46. La barra circular de la figura, está empotrada en ambos extremos. Sobre ella actúa un par de Torsión distribuido  $q(x)$  que actúa a lo largo de su longitud, y varía de intensidad desde cero en A hasta  $q_0$  en B parabolicamente. Calcular los momentos de reacción  $M_a$  y  $M_b$ .





4.47. Un cono macizo está constituida por dos materiales, uno exterior, de acero y otro interior cilíndrico de latón, como se muestra en la figura. Si se supone que los esfuerzos permisibles son  $\tau_a = 82 \text{ Mpa}$  y  $\tau_l = 50 \text{ Mpa}$  en el acero y latón respectivamente, determinar el momento máximo de torsión permisible que puede aplicarse a la barra. ( $G_a = 80 \text{ Gpa}$   $G_l = 36 \text{ Gpa}$ )  $D = 15 \text{ cm}$



## 5.- FLEXIÓN

### Fuerza Cortante y Momento Flector

#### 5.1.- INTRODUCCIÓN

Un elemento está sometido a cargas de flexión cuando soporta fuerzas y momentos externos con dirección perpendicular a la de su eje centroidal

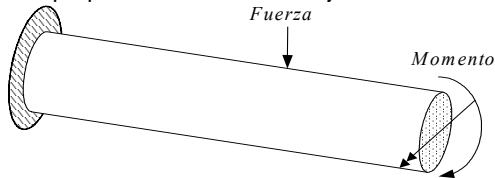


Fig. 5.1 Viga sometida a cargas de flexión

Los elementos sometidos a flexión se denominan vigas y los puentes, pasarelas y losas son ejemplos reales de este tipo de sollicitación

Para la validez de las ecuaciones y resultados de este capítulo se asume la veracidad de las siguientes condiciones:

- 1.- Los elementos son rectos
- 2.- Los elementos tienen secciones transversales uniformes
- 3.- Las dimensiones de la sección transversal son pequeños respecto a la longitud
- 4.- Las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje axial
- 5.- Las deformaciones son pequeñas comparadas con las dimensiones de la viga
- 6.- Los esfuerzos no sobrepasan los límites de fluencia.
- 7.- El módulo de Young es el mismo para tracción y compresión.
- 8.- Las cargas se aplican en el eje de simetría de la sección transversal de la viga
- 9.- Las cargas y las reacciones en los apoyos actúan perpendicularmente al eje de la viga.
- 10.- Las vigas son relativamente largas y angostas respecto a su peralte

#### 5.2.- CARGAS PUNTUALES Y DISTRIBUIDAS

Las cargas pueden clasificarse como puntuales y distribuidas

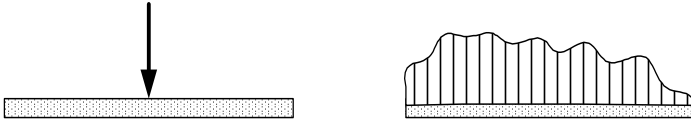


Fig. 5.2 Cargas Puntuales y Distribuidas

### 5.2.1.- Cargas Puntuales

Una carga es puntual cuando actúan en un punto. Estas cargas son ideales sin embargo las cargas aplicadas en áreas pequeñas pueden suponerse como puntuales. Así, las reacciones en las llantas de los vehículos automotores; las fuerzas que soportan los miembros de las estructuras metálicas, las fuerzas que soportan los cables se pueden idealizar como puntuales

### 5.2.2.- Cargas Distribuidas

Una carga es distribuida cuando actúan en áreas no muy pequeñas. La fuerza del viento, el peso, la presión que los líquidos ejercen sobre superficies sumergidas, etc., son ejemplos de cargas distribuidas.

### 5.2.3.- Cargas equivalentes

Las cargas distribuidas que soportan las vigas, frecuentemente deben ser reemplazadas por otras puntuales denominadas equivalentes de modo que produzcan idénticos efectos en los extremos de la viga.

Considérese una viga que soporta el “peso” de un material distribuido

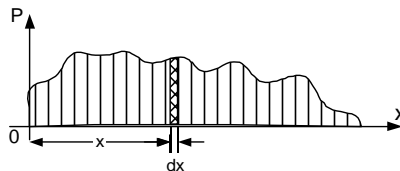


Fig. 5.3 Carga sobre un elemento diferencial

En un elemento infinitesimal se puede suponer la altura constante  $h(x)$  y su peso es :

$$dw = \gamma dV = \gamma h(x) dx dz \quad (5.1)$$

donde

$\gamma$	es el peso específico del material
$h(x)$	es la altura de la carga en la posición $x$
$dx$	es el ancho del elemento diferencial



$dz$  es la profundidad de la viga

Llamando  $p(x) = \gamma h(x) dz$

**Integrando** 
$$P_{eq} = \int_0^l p(x) dx = Area \quad (5.2)$$

El momento en el extremo izquierdo originado por la carga distribuida sobre un elemento diferencial es :

$$dM_o = dw(x) \quad (5.3)$$

Integrando 
$$M_o = \int_0^l p(x)x dx = P_{eq} X_{eq} \quad (5.4)$$

Ya que los momentos en los extremos de la viga originados por la carga puntual equivalente y por la carga distribuida deben ser iguales.

$$X_{eq} = \frac{\int_0^l p(x)x dx}{\int_0^l p(x) dx} = \bar{X} \quad (5.5)$$

De 5.2 y 5.5 se concluye que :

- La magnitud de la carga puntual equivalente es el área de la carga distribuida
- La ubicación de la carga puntual equivalente es el centro de gravedad de la carga distribuida

### 5.3.- REACCIONES EN APOYOS

#### 5.3.1.- Tipos de Apoyos

Los apoyos sobre los que se apoyan las vigas se clasifican en : a) Apoyo móvil, b) Apoyo fijo y c) Empotramiento

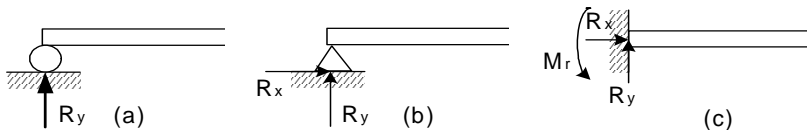


Fig. 5.4 Tipos de Apoyos

a) Apoyo Móvil.- Es un apoyo que restringe el movimiento vertical pero no el horizontal ni el de rotación. Este tipo de apoyo ejerce solo reacciones verticales. Un rodillo es un ejemplo de este tipo de apoyo.

b) Apoyo Fijo.- Es un apoyo que restringe los movimientos vertical y horizontal pero no el de rotación. Este tipo de apoyo ejerce reacciones verticales y horizontales. Una bisagra es un ejemplo de un apoyo fijo.

c) Empotramiento.- Es un apoyo que restringe los movimientos vertical, horizontal y de rotación. El apoyo ejerce reacciones verticales, horizontales y momentos.

### 5.3.2.- Tipos de Vigas

Las vigas pueden clasificarse en función a sus apoyos en:

- a) Simplemente apoyada.- Cuando la viga descansa sobre un apoyo móvil y otro fijo.
- b) Simplemente empotrada.- Es aquella que tiene uno de sus extremos empotrado.
- c) Con apoyos múltiples.- Las vigas que tenga mas de un apoyo fijo y otro móvil o un empotramiento, tiene apoyos múltiples y su cálculo es hiperestático.

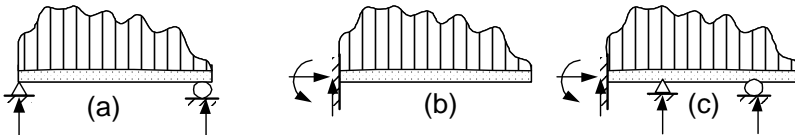


Fig. 5.5 Tipos de Vigas

### 5.3.3.- Cálculo de reacciones

Las reacciones (fuerzas y momentos) que aparecen en los apoyos sobre los que descansa una viga, se calculan con las ecuaciones de la estática.

$$\sum \vec{M} = 0 \quad \sum \vec{F} = 0 \tag{5.6}$$

Para el cálculo de las reacciones las cargas distribuidas previamente deben ser reemplazadas por sus cargas puntuales equivalentes. Las vigas con múltiples apoyos son hiperestáticas y serán analizadas posteriormente.

### 5.4.- MOMENTO FLECTOR Y FUERZA DE CORTE

Como se vio en el capítulo 1, en cualquier sección interna de un cuerpo en equilibrio sometido a la acción de fuerzas y momentos externos, aparecen internamente una fuerza y un momento que equilibran las cargas externas.

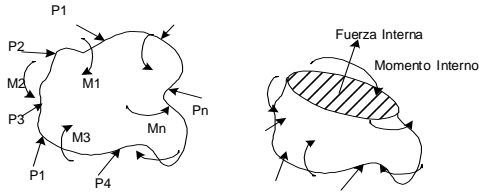


Fig. 5.6 Fuerza y Momento Internos

La fuerza y el momento internos pueden descomponerse en una componente tangencial o paralela a la sección y en otra normal o perpendicular a ella. Las componentes tangenciales de la fuerza y del momento, son respectivamente la fuerza cortante y el momento flector.



Fig. 5.7 Fuerza Cortante y Momento Flector

### 5.5.- RELACIÓN ENTRE EL MOMENTO FLECTOR Y LA FUERZA CORTANTE

En un elemento diferencial de viga la carga puede ser considerada constante. Adoptando las direcciones de la figura para el momento flector y la fuerza cortante.

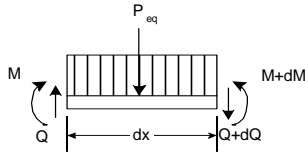


Fig. 5.8 Cargas sobre un elemento diferencial

$$\Sigma F_y = 0 \quad P_{eq} = p(x) \, dx \quad (5.7)$$

$$Q = (q+dQ) + p(x)dx$$

$$dQ/dx = -p(x) \quad (5.8)$$

$$\Sigma M_{der} = 0 \quad M - P_{eq} dx/2 + Q dx - (M+dM) = 0 \quad (5.9)$$

$$M - (p dx)dx/2 + Q dx - M - dM=0 \quad (5.10)$$

$$dM/dx= Q \quad (5.11)$$

$$\text{De 5.8 y 5.11} \quad d^2M /dx^2 = -p \quad (5.12)$$

Resumiendo, la función de la fuerza cortante es igual a la derivada de la función del momento flector y la función de la carga es igual a la derivada de la función de la fuerza cortante.

### 5.6.- CALCULO DEL MOMENTO FLECTOR Y LA FUERZA CORTANTE

Para el cálculo del Momento Flector y la Fuerza Cortante se emplean generalmente dos métodos: El cálculo estático y el cálculo por integración.

#### 5.6.1.- Cálculo estático

Con este método se realizan cortes imaginarios en la viga. El momento flector y la fuerza de corte se hallan aplicando las ecuaciones de la estática

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M} = 0 \quad (5.13)$$

#### 5.6.2.- Cálculo por integración

Con este método el momento flector y la fuerza cortante se calculan aplicando las ecuaciones 5.8, 5.11 y 5.12., Así integrando una vez la función de la carga se obtiene la función de la Fuerza Cortante e integrando dos veces la función de la carga se obtiene la función del Momento Flector.

Las integraciones originan constantes que deben hallarse con las condiciones de borde, mismas que se describen a continuación

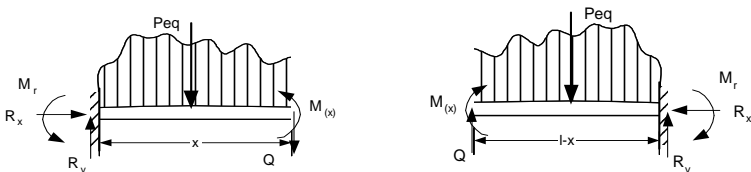


Fig. 5.8 Valores de Q y M en los extremos

En la figura izquierda si  $x \rightarrow 0$ ,  $P_{eq} \rightarrow 0$  y de la estática  $Q = R_v$  y  $M = - M_r$

En la figura derecha si  $x \rightarrow l$ ,  $P_{eq} \rightarrow 0$  y de la estática  $Q = -R_v$  y  $M = -M_r$

a) Extremo izquierdo empotrado  $Q = R_y$  y  $M = -M_r$  (5.15)

b) Extremo derecho libre  $Q = 0$  y  $M = 0$  (5.16)

c) Extremo derecho empotrado  $Q = -R_y$  y  $M = -M_r$  (5.17)

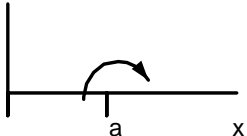
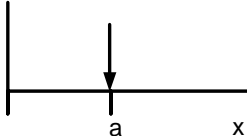
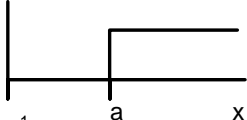
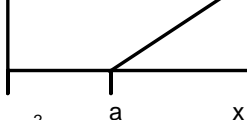
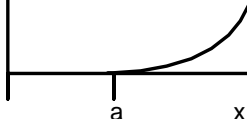
d) Extremo izquierdo libre  $Q = 0$  y  $M = 0$  (5.18)

e) Extremo izquierdo con apoyo fijo o móvil  $Q = R_y$  y  $M = 0$  (5.19)

f) Extremo derecho con apoyo fijo o móvil  $Q = -R_y$  y  $M = 0$  (5.20)

### 5.6.3.- Funciones de Singularidad

Las funciones de singularidad se emplean para integrar cargas puntuales

Funcion	Forma	Valor
Momento Puntual	$\langle x-a \rangle^{-2}$ 	$\langle x-a \rangle^{-2} = 1$ si $x=a$ $\langle x-a \rangle^{-2} = 0$ si $x \neq a$ $\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^{-2} dx = \langle x-a \rangle^{-1}$
Fuerza Puntual	$\langle x-a \rangle^{-1}$ 	$\langle x-a \rangle^{-1} = 1$ si $x=a$ $\langle x-a \rangle^{-1} = 0$ si $x \neq a$ $\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^{-1} dx = \langle x-a \rangle^0$
Carga Constante	$\langle x-a \rangle^0$ 	$\langle x-a \rangle^0 = 0$ si $x < a$ $\langle x-a \rangle^0 = 1$ si $x \geq a$ $\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^0 dx = \langle x-a \rangle^1$
Carga Lineal	$\langle x-a \rangle^1$ 	$\langle x-a \rangle^1 = 0$ si $x < a$ $\langle x-a \rangle^1 = (x-a)$ si $x \geq a$ $\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^1 dx = \langle x-a \rangle^2 / 2$
Parabola de Grado 2	$\langle x-a \rangle^2$ 	$\langle x-a \rangle^2 = 0$ si $x < a$ $\langle x-a \rangle^2 = (x-a)^2$ si $x \geq a$ $\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^2 dx = \langle x-a \rangle^3 / 3$

## PROBLEMAS RESUELTOS

5.1. Hallar la fuerza puntual equivalente y su ubicación de la carga distribuida cuya función es  $p(x) = H(x/l)^n$ .

$$P_{eq} = W = \int_0^l H \left( \frac{x}{l} \right)^n dx = H \frac{l^{(n+1)}}{(n+1)l^n} = H \frac{l}{(n+1)}$$

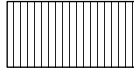
Solución:

$$X_{eq} = \frac{\int_0^l H \left( \frac{x}{l} \right)^n x dx}{H \frac{l}{(n+1)}} = \frac{H \frac{l^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{H \frac{l}{(n+1)}} = \frac{(n+1)l}{(n+2)}$$

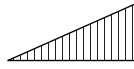
5.2. Analizar los resultados del 5.1, para diferentes valores de n

Solución :

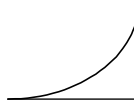
Cuando  $n = 0$  carga constante



Cuando  $n = 1$  carga triangular



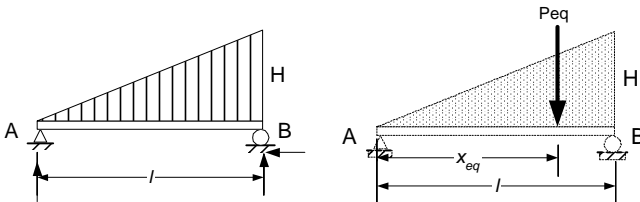
Cuando  $n = 2$  carga parabolica



Cuando  $0 < n < 1$  carga parabolica inv



5.3. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una carga triangular en una viga simplemente apoyada.



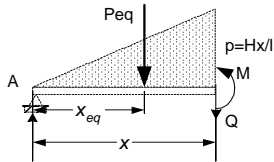
Solución :

$$P_{eq} = \text{Área} = Hl/2$$

$$x_{eq} = CG = 2l/3$$

$$\begin{aligned} \Sigma MA = 0 & \quad P_{eq} x_{eq} - R_B l = 0 \\ & \quad R_B = Hl/3 \\ \Sigma MB = 0 & \quad R_A l - P_{eq} (l - x_{eq}) = 0 \\ & \quad R_A = Hl/6 \end{aligned}$$

método de cortes



La carga equivalente

$$\begin{aligned} P_{eq} &= \text{Área} = Hx^2/2l \\ x_{eq} &= CG = 2x/3 \\ \Sigma M_{corte} = 0 & \quad R_A x - P_{eq} (x - x_{eq}) - M = 0 \\ & \quad M = (Hl/6)x - (Hx^2/2l)(x/3) \\ & \quad M = Hlx(1 - x^2/l^2)/6 \quad (i) \\ \Sigma F_y = 0 & \quad R_A - P_{eq} - Q = 0 \\ & \quad Q = Hl/6 - Hx^2/2l \\ & \quad Q = H(l/6 - x^2/2l) \quad (ii) \end{aligned}$$

b) método de la doble integración

$$\begin{aligned} \text{Integrando} \quad p &= Hx/l \\ Q &= -Hx^2/2l + c_1 \\ M &= -Hx^3/6l + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Las condiciones de borde

$$\begin{aligned} x = 0 \quad M = 0 & \quad c_2 = 0 \\ x = l \quad M = 0 & \quad 0 = -Hl^2/6 + c_1 l \\ & \quad c_1 = Hl/6 \\ \text{de donde} & \quad Q = -Hx^2/2l + Hl/6 \quad (iii) \\ & \quad M = -Hx^3/6l + Hlx/6 \quad (iv) \end{aligned}$$

c) método de la doble integración de funciones singulares

$$\begin{aligned} p(x) &= R^a \langle x \rangle^{-1} - (H/l) \langle x \rangle^1 + Rb \langle x-l \rangle^{-1} \\ p(x) &= (Hl/6) \langle x \rangle^{-1} - (H/l) \langle x \rangle^1 + (Hl/3) \langle x-l \rangle^{-1} \end{aligned}$$



Integrando y aplicando las propiedades de las funciones de singularidad

$$Q = Hl/6 \langle x \rangle^0 - (H/2l) \langle x \rangle^2 + (Hl/3) \langle x-l \rangle^0$$

$$M = (Hl/6) \langle x \rangle^1 - (H/6l) \langle x \rangle^3 + (Hl/3) \langle x-l \rangle^1$$

Cuando  $0 < x < l$

$$\langle x \rangle^1 = x$$

$$\langle x \rangle^3 = x^3$$

$$\langle x-l \rangle^1 = 0$$

$$Q = Hl/6 - (Hx^2/2l)$$

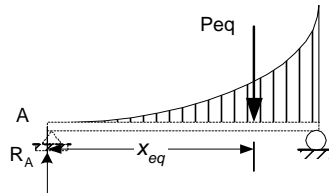
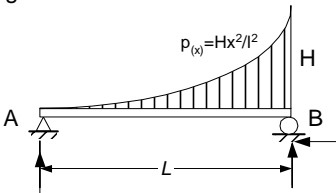
(v)

$$M = Hlx/6 - Hx^3/6l$$

(vi)

Los resultados son idénticos por todos los métodos

5.4. Hallar las funciones de Momento Flector y Fuerza Cortante del sistema de la figura



Solución :

De 2

$$P_{eq} = Hl/3$$

$$x_{eq} = 3l/4$$

$\Sigma M_a = 0$

$$P_{eq} x_{eq} - R_b l = 0$$

$$R_b = (Hl/3)(3l/4)/l$$

$$R_b = Hl/4$$

$\Sigma M_b = 0$

$$R_a l - P_{eq} (l - x_{eq}) = 0$$

$$R_a = (Hl/3)(l - 3l/4)/l$$

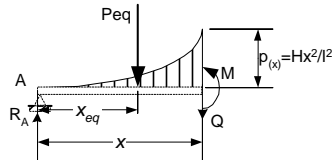
$$R_a = Hl/12$$

Prueba

$$R_a + R_b = Hl/4 + Hl/12 = 4HL/12 = Hl/3 = P_{eq}$$

OK

a) método de cortes



La carga equivalente

$$P_{eq} = W = \int_0^x H \left( \frac{x}{l} \right)^2 dx = H \frac{x^3}{3l^2}$$

$$X_{eq} = \frac{\int_0^x H \left( \frac{x}{l} \right)^2 x dx}{H \frac{x^3}{3l^2}} = \frac{H \frac{x^4}{4l^2}}{H \frac{x^3}{3l^2}} = \frac{3x}{4}$$

$$\Sigma Fy = 0 \quad R_a - P_{eq} - Q = 0 \quad (i)$$

$$Q = R_a - P_{eq} = Hl/12 - Hx^3/3l^2$$

$$\Sigma M_{corte} = 0 \quad R_a x - P_{eq} (x - x_{eq}) - M = 0 \quad (ii)$$

$$M = (Hl/12)x - (Hx^3/3l^2)(x/4)$$

$$M = Hlx/12 - (Hx^4/12l^2)$$

Prueba :

$x = 0$	$Q = Hl/12 = R_a$	Ok
$x = l$	$Q = Hl/12 - Hl/3 = -3Hl/12 = -Hl/4 = -R_b$	Ok
$x = 0$	$M = 0$	Ok
$x = l$	$M = Hl^2/12 - (Hl^4/12l^2) = 0$	Ok

Finalmente  $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{Hl}{12} - \frac{Hx^3}{3l^2} = Q$  Ok

b) método de la doble integración

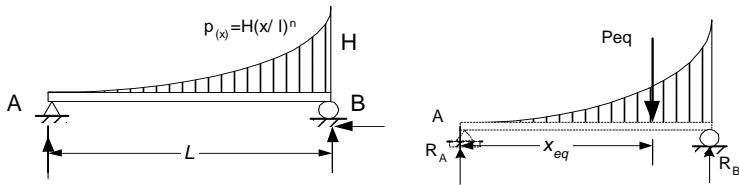
	$p = H(x/l)^2$
Integrando	$Q = -Hx^3/3l^2 + c1$
Integrando	$M = -Hx^4/12l^2 + c1x + c2$
$x = 0 \quad M = 0$	$0 = c2$
$x = l \quad M = 0$	$0 = -Hl^2/12 + c1l$
	$c1 = Hl/12$

De donde  $Q = -Hx^3/3l^2 + Hl/12$  (iii)

$M = -Hx^4/12l^2 + Hl/12x$  (iv)

Idénticas expresiones a las halladas por el otro método.

5.5. Una viga simplemente apoyada tiene una carga distribuida cuya función  $p(x) = H(x/l)^n$ . a) Hallar la carga equivalente b) Hallar las reacciones y c) Hallar el momento flector y la fuerza cortante



Solución :

$$P_{eq} = W = \int_0^l H \left( \frac{x}{l} \right)^n dx = H \frac{l^{(n+1)}}{(n+1)l^n} = H \frac{l}{(n+1)}$$

$$x_{eq} = \frac{\int_0^l H \left( \frac{x}{l} \right)^n x dx}{H \frac{l}{(n+1)}} = \frac{H \frac{l^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{H \frac{l}{(n+1)}} = \frac{(n+1)l}{(n+2)}$$

$$\Sigma M_a = 0 \quad P_{eq} x_{eq} - R_b l = 0$$

$$R_b = Hl / (n+2)$$

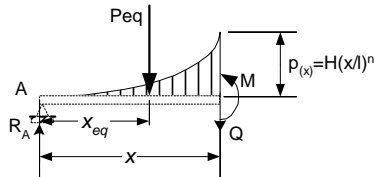
$$\Sigma M_b = 0 \quad R_a l - P_{eq} (l - x_{eq}) = 0$$

$$R_a = Hl / (n+2)(n+1)$$

$$\text{Prueba} \quad R_a + R_b = Hl / (n+1) = P_{eq}$$

OK

Método de cortes



$$x_{eq} = \frac{\int_0^x H \left( \frac{x}{l} \right)^n x dx}{H \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}} = \frac{H \frac{x^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{H \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}} = \frac{(n+1)x}{(n+2)}$$

$$P_{eq} = W = \int_0^x H \left( \frac{x}{l} \right)^n dx = H \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_a - P_{eq} - Q = 0$$

$$Q = \frac{H}{(n+1)} \left( \frac{l}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{l^n} \right)$$

(i)

$$\Sigma M_{\text{corte}} = 0 \quad R_a x - P_{\text{eq}} (x - x_{\text{eq}}) - M = 0$$

$$M = \frac{Hx}{(n+2)(n+1)} \left( l - \frac{x^{n+1}}{l^n} \right) \quad (\text{ii})$$

Verificación

$$x = 0 \quad Q = Hl/(n+1)(n+2) = R_a \quad \text{Ok}$$

$$x = l \quad Q = Hl/(n+1)(n+2) - Hl/(n+1) = -Hl/(n+2) = -R_b \quad \text{Ok}$$

$$x = 0 \quad M = 0 \quad \text{Ok}$$

$$x = l \quad M = 0 \quad \text{Ok}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q$$

Finalmente Ok

b) método de la doble integración

$$p = H(x/l)^n$$

$$Q = -\frac{Hx^{(n+1)}}{l^n(n+1)} + c_1$$

Integrando (i)

$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} + c_1x + c_2$$

(ii)

Condiciones de borde

$$x = 0 \quad M = 0 \quad 0 = c_2$$

$$x = l \quad M = 0 \quad 0 = -Hl^2/(n+2)(n+1) + c_1l$$

$$c_1 = Hl/(n+2)(n+1)$$

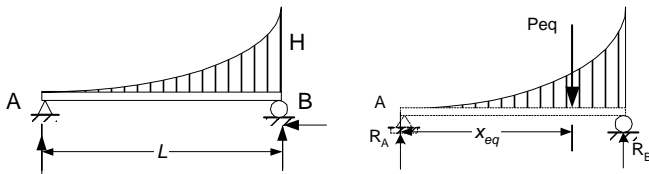
$$Q = \frac{H}{(n+1)} \left( \frac{l}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{l^n} \right)$$

De donde (i)

$$M = \frac{Hx}{(n+2)(n+1)} \left( l - \frac{x^{n+1}}{l^n} \right) \quad (\text{ii})$$

Idénticas expresiones a las halladas por el otro método. No se aplica el método de doble integración de funciones de singularidad por ser muy similar.

5.6. Una viga simplemente apoyada tiene una carga cuya función  $p(x) = H(x/l)^n$ . Hallar el momento flector y la fuerza cortante máximos.



Solución : Del anterior problema

$$Q = \frac{H}{(n+1)} \left( \frac{l}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{l^n} \right)$$

Cuando  $x = l$   $Q_{\max} = -R_b = -Hl/(n+2)$

$$M = \frac{Hx}{(n+2)(n+1)} \left( l - \frac{x^{n+1}}{l^n} \right)$$

Máximo cuando  $Q = 0$

$$Q = \frac{H}{(n+1)} \left( \frac{l}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{l^n} \right) = 0$$

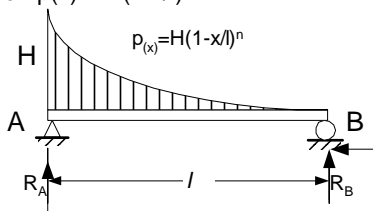
$$l \frac{(n+1)}{(n+2)} = x(n+1)$$

$$x = l \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

$$M_{\max} = \frac{Hl^2}{(n+2)^{(n+2)/(n+1)}(n+2)}$$

$$M_{\max} = \frac{Hl^2}{(n+2)^{(2n+3)/(n+1)}}$$

5.7. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente apoyada con una carga cuya función  $p(x) = H(1-x/l)^n$



Solución : Este problema es el conjugado del problema anterior y basta reemplazar en los resultados obtenidos  $x$  por su complemento  $(l - x)$

Carga  $p = H[(l - x)/l]^n = H(1 - x/l)^n$  (i)

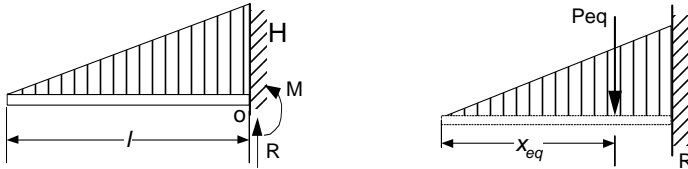
Fuerza Cortante

$$Q = \frac{H}{(n+1)} \left( \frac{l}{n+2} - \frac{(l-x)^{n+1}}{l^n} \right) \quad (\text{ii})$$

Momento Flector

$$M = \frac{H(l-x)}{(n+2)(n+1)} \left( l - \frac{(l-x)^{n+1}}{l^n} \right) \quad (\text{iii})$$

5.8. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una carga triangular en una viga simplemente empotrada.



Solución :

$$P_{eq} = \text{Area} = Hl/2$$

$$x_{eq} = \text{CG} = 2l/3$$

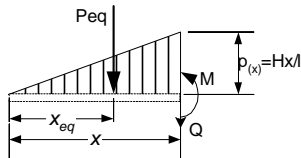
$$\Sigma M_o = 0 \quad P_{eq} (l - x_{eq}) - M_r = 0$$

$$M_r = - Hl^2 / 6$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R - P_{eq} = 0$$

$$R = Hl/2$$

método de cortes



La carga equivalente

$$P_{eq} = \text{Área} = Hx^2/2l$$

$$x_{eq} = \text{CG} = 2x/3$$

$$\Sigma M_{corte} = 0 \quad P_{eq} (x - x_{eq}) + M = 0$$

$$M = - (Hx^2/2l)(x/3)$$

$$M = - Hx^3 / 6l \quad (\text{i})$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad - P_{eq} - Q = 0$$

$$Q = - Hx^2/2l \quad (\text{ii})$$

b) método de la doble integración

Integrando

$$p = Hx/l$$

$$Q = -Hx^2/2l + c1$$

$$M = -Hx^3/6l + c1 x + c2$$

Condiciones de borde

$$x = 0 \quad M = 0 \quad c2 = 0$$

$$x = 0 \quad Q = 0 \quad c1 = 0$$

De donde

$$Q = -Hx^2/2l \tag{iii}$$

$$M = -Hx^3/6l \tag{iv}$$

c) método de la doble integración de funciones singulares

$$p(x) = (H/l)\langle x \rangle^1 + R\langle x-l \rangle^{-1}$$

$$p(x) = (H/l)\langle x \rangle^1 + (Hl/2)\langle x-l \rangle^{-1}$$

Integrando y aplicando las propiedades de funciones de singularidad

$$Q = - (H/2l)\langle x \rangle^2 + (Hl/2)\langle x-l \rangle^0$$

$$M = - (H/6l)\langle x \rangle^3 + (Hl/2)\langle x-l \rangle^1$$

Cuando  $0 < x < l$

$$\langle x \rangle^1 = x$$

$$\langle x \rangle^3 = x^3$$

$$\langle x-l \rangle^1 = 0$$

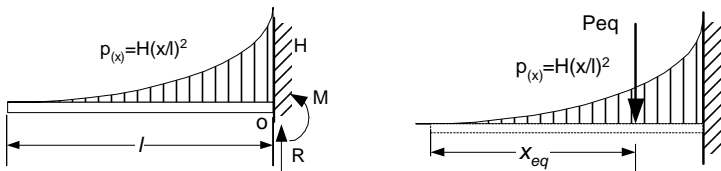
y

$$Q = - (Hx^2/2l) \tag{v}$$

$$M = - Hx^3/6l \tag{vi}$$

Los resultados son los mismos por todos los métodos

5.9. Hallar las funciones de Momento Flector y Fuerza Cortante del sistema de la figura



Solución :

$$P_{eq} = Hl/3$$

$$x_{eq} = 3l/4$$

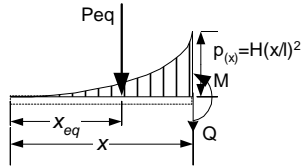
$$\Sigma M_o = 0 \quad P_{eq} (l - x_{eq}) = - M_r$$

$$M_r = Hl^2/12$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R - P_{eq} = 0$$

$$R = (Hl/3)$$

a) método de cortes



$$P_{eq} = W = \int_0^x H \left( \frac{x}{l} \right)^2 dx = H \frac{x^3}{3l^2}$$

$$x_{eq} = \frac{\int_0^x H \left( \frac{x}{l} \right)^2 x dx}{H \frac{x}{3}} = \frac{H \frac{x^4}{4l^2}}{H \frac{x}{3}} = \frac{3x}{4}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad - P_{eq} - Q = 0$$

$$Q = -Hx^3/3l^2 \quad (i)$$

$$\Sigma M_{corte} = 0 \quad - P_{eq} (x - x_{eq}) - M = 0$$

$$M = -(Hx^3/3l^2)(x/4) = -(Hx^4/12l^2) \quad (ii)$$

Verificación

$x = 0$	$Q = 0$	Ok
$x = l$	$Q = -Hl/3 = -R_b$	Ok
$x = 0$	$M = 0$	Ok
$x = l$	$M = Hl^2/12 = M_r$	Ok

$$\frac{\partial M}{\partial x} = - \frac{Hx^3}{3l^2} = Q$$

Finalmente Ok

b) método de la doble integración

Integrando	$p = H(x/l)^2$
	$Q = -Hx^3/3l^2 + c_1$
	$M = -Hx^4/12l^2 + c_1x + c_2$
$x = 0 \quad M = 0$	$0 = c_2$
$x = 0 \quad Q = 0$	$0 = c_1$



De donde

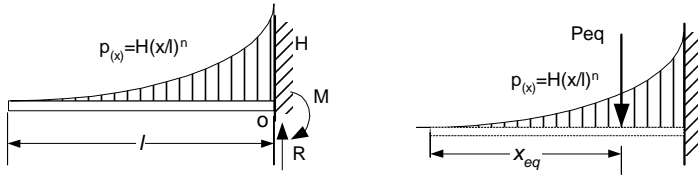
$$Q = -Hx^3/3l^2$$

$$M = -Hx^4/12l^2$$

(iii)  
(iv)

Idénticas expresiones a las halladas por el método de cortes

5.10. Una viga simplemente empotrada tiene una carga cuya función es  $p(x) = H(x/l)^n$ . Hallar a) La carga equivalente b) Las reacciones y c) El momento flector y la fuerza cortante



Solución :

$$P_{eq} = W = \int_0^l H \left( \frac{x}{l} \right)^n dx = H \frac{l^{(n+1)}}{(n+1)l^n} = H \frac{l}{(n+1)}$$

$$x_{eq} = \frac{\int_0^l H \left( \frac{x}{l} \right)^n x dx}{\frac{H \cdot l}{(n+1)}} = \frac{H \frac{l^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{\frac{H \cdot l}{(n+1)}} = \frac{(n+1)l}{(n+2)}$$

$\Sigma M_o = 0$

$$P_{eq} (l - x_{eq}) = M_r$$

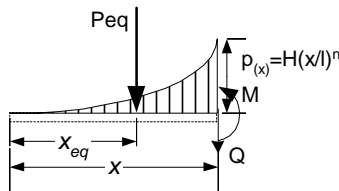
$$M_r = Hl^2 / (n+1)(n+2)$$

$\Sigma F_y = 0$

$$R - P_{eq} = 0$$

$$R = Hl / (n+1)$$

a) método de cortes



$$P_{eq} = W = \int_0^x H \left( \frac{x}{l} \right)^n dx = H \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}$$

$$X_{eq} = \frac{\int_0^x H \left( \frac{x}{l} \right)^n x dx}{H \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}} = \frac{H \frac{x^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{H \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}} = \frac{(n+1)x}{(n+2)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad - P_{eq} - Q = 0$$

$$Q = -H \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n} \quad (i)$$

$$\Sigma M_{corte} = 0 \quad - P_{eq} (x - x_{eq}) - M = 0$$

$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{(n+2)(n+1)l^n} \quad (ii)$$

Verificación

$x = 0$	$Q = 0$	Ok
$x = l$	$Q = -Hl/(n+1) = -R_b$	Ok
$x = 0$	$M = 0$	Ok
$x = l$	$M = -Hl^2/(n+2)(n+1) = M^r$	Ok

Finalmente	$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{Hx^3}{3l^2} = Q$	Ok
------------	--	----

b) método de la doble integración

	$p = H(x/l)^n$	
Integrando	$Q = -\frac{Hx^{(n+1)}}{l^n(n+1)} + c_1$	(i)

	$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} + c_1x + c_2$	(ii)
--	--	------

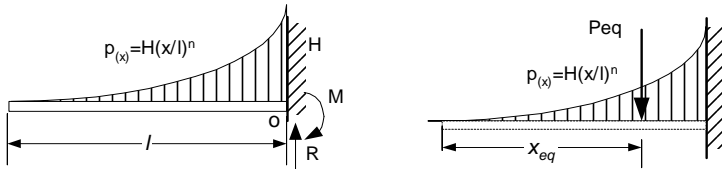
$x = 0 \quad M = 0$	$0 = c_2$
$x = 0 \quad Q = 0$	$0 = c_1$

De donde	$Q = -\frac{Hx^{(n+1)}}{l^n(n+1)}$	(i)
----------	------------------------------------	-----

	$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)}$	(ii)
--	---	------

Idénticas expresiones a las halladas por el método de cortes. No se aplica el método de doble integración de funciones de singularidad por ser muy similar.

5.11. Hallar los valores máximos de la fuerza cortante y del momento flector de la viga del problema anterior.



Solución :

$$Q = -\frac{Hx^{(n+1)}}{l^n(n+1)} \quad (i)$$

De 5.10

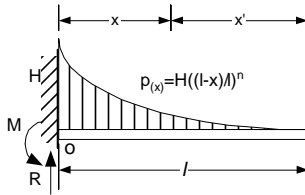
$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} \quad (ii)$$

máximos en el empotramiento ( $x = l$ )

$$Q_{\max} = -\frac{Hl}{(n+1)}$$

$$M_{\max} = -\frac{Hl^2}{(n+2)(n+1)}$$

5.12. Hallar las funciones de Momento Flector y Fuerza Cortante del sistema de la figura



Solución :

Se reemplaza en 5.11  $x$  por su complemento  $(l - x)$

Carga

$$p = H(x/l)^n$$

$$p = H[(l-x)/l]^n = H(1-x/l)^n \quad (i)$$

Fuerza Corte

$$Q = -\frac{Hx^{(n+1)}}{l^n(n+1)} \quad (i)$$

$$Q = -\frac{H(l-x)^{(n+1)}}{l^n(n+1)}$$

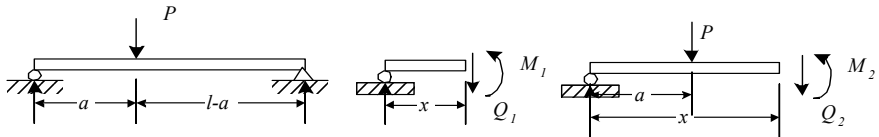
Momento

$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)}$$

$$M = -\frac{H(l-x)^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)}$$

(ii)

5.13. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



Solución :

$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0 & \quad P(a) - R_b l = 0 \\ & \quad R_b = Pa/l \\ \Sigma M_b = 0 & \quad R_a l - P(l-a) = 0 \\ & \quad R_a = P(l-a)/l \end{aligned}$$

Comprobación  $R_a + R_b = P$

Ok

a) método de Luiz cortes

1er intervalo  $R_a x = M_1$   
 $M_1 = P(l-a)x/l$

2do intervalo  $R_a x - P(x-a) - M_2 = 0$   
 $M_2 = P(l-a)x/l - P(x-a) = Pa(1-x/l)$

b) método de integración con funciones de singularidad

De derecha a izquierda

$$p(x) = R_a \langle x \rangle^{-1} - P \langle x-a \rangle^{-1} + R_b \langle x-l \rangle^{-1}$$

$$p(x) = P(l-a)/l \langle x \rangle^{-1} - P \langle x-a \rangle^{-1} + Pa/l \langle x-l \rangle^{-1}$$

Integrando y aplicando las propiedades de este tipo de funciones

$$Q = P(l-a)/l \langle x \rangle^0 - P \langle x-a \rangle^0 + Pa/l \langle x-l \rangle^0$$

$$M = P(l-a)/l \langle x \rangle^1 - P \langle x-a \rangle^1 + Pa/l \langle x-l \rangle^1$$

Cuando  $0 < x < a$

$$\langle x \rangle^1 = x$$

$$\langle x - a \rangle^1 = 0$$

$$\langle x - l \rangle^1 = 0$$

y  $M_1 = P(l - a)x/l$

Cuando  $a < x < l$

$$\langle x \rangle^1 = x$$

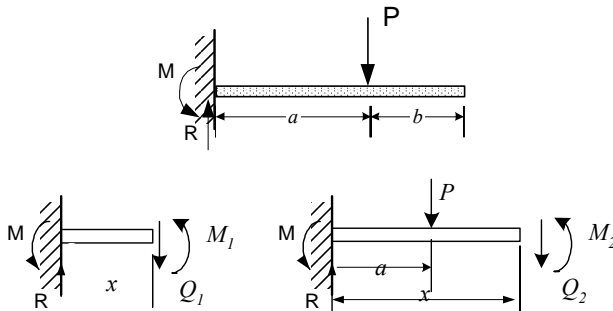
$$\langle x - a \rangle^1 = x - a$$

$$\langle x - l \rangle^1 = 0$$

y  $M_2 = P(l-a)x/l - P(x-a) = Pa(1-x/l)$

Idénticas expresiones a las halladas por el método de cortes.

5.14. Hallar la EC. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en el sistema de la figura usando funciones de singularidad



Solución :

$$\Sigma F_y = 0 \quad R = P$$

$$\Sigma M = 0 \quad M_r = P a$$

a) método de los cortes

1er intervalo  $R x - M - M_1 = 0$   
 $M_1 = P x - P a$

2do intervalo  $R x - M - P(x-a) - M_2 = 0$   
 $M_2 = P x - P a - P(x-a)$

b) método de integración con funciones de singularidad

Usando funciones de singularidad y de derecha a izquierda

$$p(x) = -M_l \langle x \rangle^{-2} + R \langle x \rangle^{-1} - P \langle x-a \rangle^{-1}$$

$$p(x) = -Pa \langle x \rangle^{-2} + P \langle x \rangle^{-1} - P \langle x-a \rangle^{-1}$$

Integrando y aplicando las propiedades de este tipo de funciones

$$Q(x) = -Pa \langle x \rangle^{-1} + P \langle x \rangle^0 - P \langle x-a \rangle^0$$

$$M(x) = -Pa \langle x \rangle^0 + P \langle x \rangle^1 - P \langle x-a \rangle^1$$

Para  $0 < x < a$

$$\langle x \rangle^{-1} = 0$$

$$\langle x \rangle^0 = 0$$

$$\langle x-a \rangle^0 = 0$$

$$\langle x-a \rangle^1 = 0$$

entonces

$$Q(x) = P$$

$$M(x) = -Pa x + P x$$

Para  $a < x < l$

$$\langle x \rangle^{-1} = 0$$

$$\langle x \rangle^0 = 0$$

$$\langle x-a \rangle^0 = 0$$

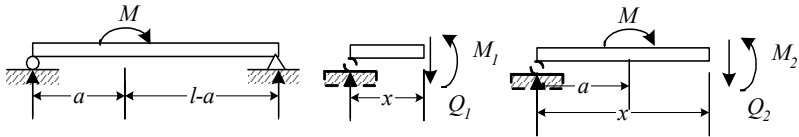
$$\langle x-a \rangle^1 = 0$$

entonces

$$Q(x) = 0$$

$$M(x) = 0$$

5.15. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



Solución :

$$\Sigma M_a = 0 \quad M - R_b l = 0$$

$$R_b = M/l$$

$$\Sigma M_b = 0 \quad R_a l + M = 0$$

$$R_a = -M/l$$

$$\text{Comprobación } R_a + R_b = 0$$

Ok

a) método de los cortes

1er intervalo  $R_a x = M_1$   
 $M_1 = -Mx/l$

2do intervalo  $R_a x + M - M_2 = 0$   
 $M_2 = -Mx/l + M$

b) método de integración con funciones de singularidad

De derecha a izquierda

$$p(x) = R_a \langle x \rangle^{-1} + M \langle x-a \rangle^{-2} + R_b \langle x-l \rangle^{-1}$$

$$p(x) = -M/l \langle x \rangle^{-1} + M \langle x-a \rangle^{-2} + M/l \langle x-l \rangle^{-1}$$

Integrando y aplicando las propiedades de este tipo de funciones

$$Q = -M/l \langle x \rangle^0 + M \langle x-a \rangle^{-1} + M/l \langle x-l \rangle^0$$

$$M = -M/l \langle x \rangle^1 + M \langle x-a \rangle^0 + M/l \langle x-l \rangle^1$$

Cuando  $0 < x < a$

$$\langle x \rangle^1 = x$$

$$\langle x-a \rangle^0 = 0$$

$$\langle x-l \rangle^1 = 0$$

y  $M_1 = -Mx/l$

Cuando  $a < x < l$

$$\langle x \rangle^1 = x$$

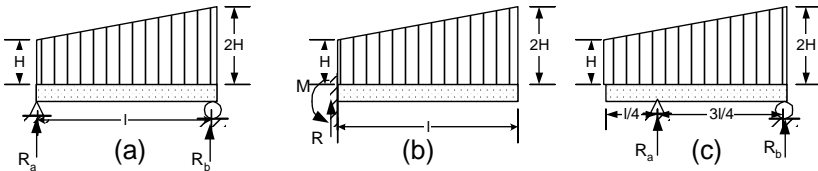
$$\langle x-a \rangle^0 = 1$$

$$\langle x-l \rangle^1 = 0$$

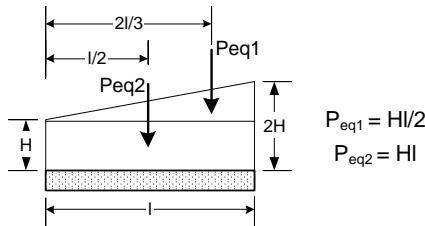
y  $M_2 = -Mx/l + M$

Idénticas expresiones a las halladas por el método de cortes.

5.16. Hallar solo el momento flector de los sistemas de la figura. En todos los casos  $p(x) = H(1+x/l)$



Solución :



Se halla primero las reacciones en los apoyos de los tres casos

(a)  $\Sigma Ma=0$   $P_{eq1} x_{eq1} + P_{eq2} x_{eq2} - R_b l = 0$   
 $R_b l = (HI/2)(2l/3) + (HI)(l/2)$   
 $R_b = 5HI/6$

$\Sigma Mb=0$   $R_a l - P_{eq1} (l - x_{eq1}) - P_{eq2} (l - x_{eq2}) = 0$   
 $R_a l = (HI/2)(l - 2l/3) + (HI)(l - l/2) = (HI/2)(l/3) + (HI)(l/2)$   
 $R_a = 4H/6 = 2HI/3$

Comprobación  $R_a + R_b = 5H/6 + 2H/3 = 9H/6 = 3H/2 = P_{eq1} + P_{eq2}$  Ok

(b)  $\Sigma Fy=0$   $R = P_{eq1} + P_{eq2}$   
 $R = 3HI/2$

$\Sigma Mo=0$   $M = P_{eq1} x_{eq1} + P_{eq2} x_{eq2}$   
 $M = (HI/2)(2l/3) + (HI)(l/2) = 5HI/6$

(c)  $\Sigma Ma=0$   $P_{eq1} (x_{eq1} - l/4) + P_{eq2} (x_{eq2} - l/4) - R_b (3l/4) = 0$   
 $R_b (3l/4) = (HI/2)(2l/3 - l/4) + (HI)(l/2 - l/4) = (HI/2)(5l/12) + (HI)(l/4)$   
 $R_b = 11HI/18$

$\Sigma Mb=0$   $R_a (3l/4) - P_{eq1} (l - x_{eq1}) - P_{eq2} (l - x_{eq2}) = 0$   
 $R_a (3l/4) = (HI/2)(l - 2l/3) + (HI)(l - l/2) = (HI/2)(l/3) + (HI)(l/2) = 2H/3$   
 $R_a = 8HI/9$

Comprobación  $R_a + R_b = 11H/18 + 8H/9 = 27H/18 = 3H/2 = P_{eq1} + P_{eq2}$  Ok

A continuación se hallan la Fuerza Cortante y el Momento Flector por integración

Integrando  $Q = -H(x+x^2/2l) + c1$   
 $M = -H(x^2/2 + x^3/6l) + c1x + c2$

Las constantes dependen de las condiciones de borde en los tres casos

a) Si  $x = 0$   $M = 0$   $c2 = 0$   
 Si  $x = l$   $M = 0$   $0 = -H(l^2/2 + l^2/6) + c1l$   $c1 = 2HI/3$



$$M = -H(x^2/2 + x^3/6l - 2lx/3)$$

b) Si  $x = l$        $Q = 0$      $0 = -H(l + l/2) + c1$        $c1 = 3HI/2$   
 Si  $x = l$        $M = 0$      $0 = -H(l^2/2 + l^3/6) + (3HI/2)l + c2$      $c2 = -5HI^2/6$

$$M = -H(x^2/2 + x^3/6l) + 3HIx/2 - 5HI^2/6$$

c) En este caso hay dos intervalos pero como la carga es la misma en los dos intervalos la variación se da solamente en las constantes. Entonces

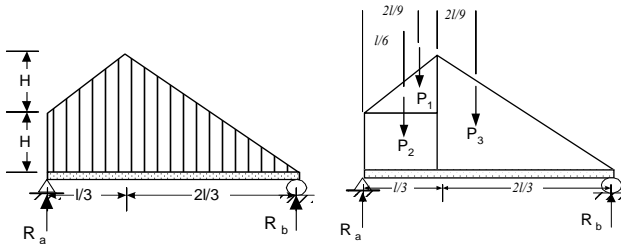
$Q_1 = -H(x + x^2/2l) + c1$       valido  $0 < x < l/4$   
 $M_1 = -H(x^2/2 + x^3/6l) + c1x + c2$   
 $Q_2 = -H(x + x^2/2l) + c3$       valido  $l/4 < x < l$   
 $M_2 = -H(x^2/2 + x^3/6l) + c3x + c4$

Y las condiciones de borde son

Si  $x = 0$        $Q_1 = 0$        $c1 = 0$   
 Si  $x = 0$        $M_1 = 0$        $c2 = 0$   
 Si  $x = l$        $Q_2 = -R_b - H(l + l/2) + c3 = -11HI/18$      $c3 = 8HI/9$   
 Si  $x = l$        $M_2 = 0$      $0 = -H(l^2/2 + l^3/6) + 19HI/9 + c4$      $c4 = -2HI^2/9$

$M_1 = -H(x^2/2 + x^3/6l)$   
 $M_2 = -H(x^2/2 + x^3/6l) + 8lx/9 - 2l^2/9$

5.17. Hallar el momento flector del sistema de la figura



Solución :

La carga se descompone en formas más sencillas

$P_1 = HI/6$   
 $x_1 = 2l/9$   
 $P_2 = HI/3$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= l/6 \\
 P_3 &= 2HI/3 \\
 x_3 &= l/3 + 2l/9 = 5l/9 \\
 \Sigma Ma=0 & \quad P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 - R_b l = 0 \\
 & \quad R_b = (HI/6)(2l/9) + (HI/3)(l/6) + (2HI/3)(5l/9) \\
 & \quad R_b = 25HI/54 \\
 \Sigma Mb=0 & \quad R_a l - P_1(l - x_1) - P_2(l - x_2) - P_3(l - x_3) = 0 \\
 & \quad R_a = HI/6(l - 2l/9) + (HI/3)(l - l/6) + (2HI/3)(l - 5l/9) \\
 & \quad R_a = 38HI/54 \\
 \text{Prueba} & \quad R_a + R_b = 25HI/54 + 38HI/54 = 7HI/6 = HI/6 + HI/3 + 2HI/3 \quad \text{Ok}
 \end{aligned}$$

Se analiza el sistema en dos intervalos

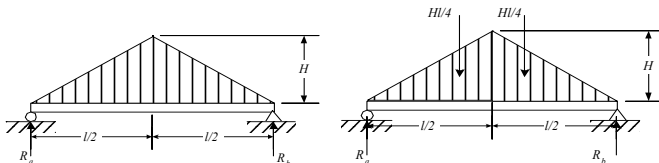
$$\begin{aligned}
 P_1 &= Hx/(l/3) + H \\
 P_2 &= -3Hx/l + 3H \\
 \text{Integrando} & \quad Q_1 = -3Hx^2/2l - Hx + c1 \\
 & \quad M_1 = -Hx^3/2l - Hx^2/2 + c1x + c2 \\
 & \quad Q_2 = 3Hx^2/2l - 3Hx + c3 \\
 & \quad M_2 = Hx^3/2l - 3Hx^2/2 + c3x + c4
 \end{aligned}$$

Las condiciones de borde son

$$\begin{aligned}
 x=0 & \quad Q_1 = R_a & \quad c1 = 38HI/54 \\
 x=0 & \quad M_1 = 0 & \quad c2 = 0 \\
 x=l & \quad Q_2 = -R_b & \quad -25HI/54 = 3HI^2/2l - 3HI + c3 \\
 x=l & \quad M_2 = 0 & \quad 0 = HI^3/2l - 3HI^2/2 + c3l + c4 \\
 \text{De donde} & \quad c_3 = 28HI/27 \\
 & \quad c_4 = HI^2/27
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -Hx^3/2l - Hx^2/2 + 19HIx/27 \\
 M_2 &= Hx^3/2l - 3Hx^2/2 + 28HIx/27 + HI^2/27
 \end{aligned}$$

5.18. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



Solución :

Aplicando el método de doble integración y por simetría solo en la mitad izquierda

$$R_a = R_b = H/4$$

$$p_1 = 2Hx/l$$

$$Q_1(x) = -2Hx^2/(2l) + c_1$$

$$M_1(x) = -Hx^3/(3l) + c_1 x + c_2$$

Condiciones de Borde

$$x = 0 \quad M = 0 \quad c_2 = 0$$

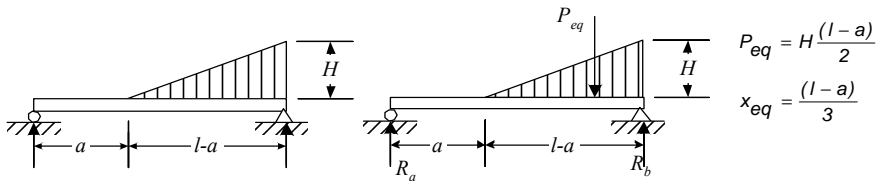
$$x = l \quad Q = R_a \quad c_1 = R_a = H/4$$

$$Q_1(x) = -Hx^2/l + H/4$$

$$M_1(x) = -Hx^3/(3l) + Hlx/4$$

Estas ecuaciones solo son validas cuando  $0 < x < l/2$

5.19. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



Solución :

$$\Sigma M_a = 0 \quad P_{eq} (l - x_{eq}) - R_b l = 0$$

$$[H(l-a)/2][l - (l-a)/3] = R_b l$$

$$[H(l-a)/2][a/3 + 2l/3] = R_b l$$

$$R_b = H(l-a)(a+2l)/(6l)$$

$$\Sigma M_b = 0 \quad R_a l - P_{eq}(l-a)/3 = 0$$

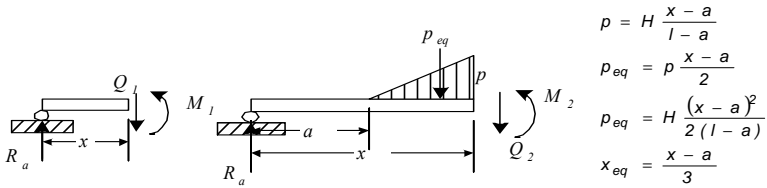
$$R_a l = [H(l-a)/2](l-a)/3$$

$$R_a = H(l-a)^2/(6l)$$

Comprobación  $R_a + R_b = [H/(6l)](l-a)[(a+2l) + (l-a)]$   
 $R_a + R_b = [H/(6l)](l-a)(3l) = H(l-a)/2 = P_{eq}$

Ok

a) método de los cortes



$$p = H \frac{x - a}{l - a}$$

$$p_{eq} = p \frac{x - a}{2}$$

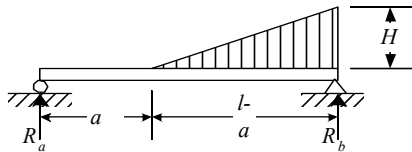
$$p_{eq} = H \frac{(x - a)^2}{2(l - a)}$$

$$x_{eq} = \frac{x - a}{3}$$

1er intervalo  $R_a x = M_1$   
 $M_1 = -H x (l - a)^2 / (6l)$

2do intervalo  $R_a x - P_{eq} x_{eq} - M_2 = 0$   
 $M_2 = Hx(l - a)^2 / (6l) - H(x - a)^3 / [6(l - a)]$

Método de integración con funciones de singularidad



De derecha a izquierda

$$p(x) = R_a \langle x \rangle^{-1} + [H/(l - a)] \langle x - a \rangle^1 + R_b \langle x - l \rangle^{-1}$$

$$p(x) = H(l - a)^2 / (6l) \langle x \rangle^{-1} + [H/(l - a)] \langle x - a \rangle^1 + H(l - a)(a + 2l) / (6l) \langle x - l \rangle^{-1}$$

Integrando y aplicando las propiedades de este tipo de funciones

$$Q(x) = H(l - a)^2 / (6l) \langle x \rangle^0 + H/[2(l - a)] \langle x - a \rangle^2 + H(l - a)(a + 2l) / (6l) \langle x - l \rangle^0$$

$$M(x) = H(l - a)^2 / (6l) \langle x \rangle^1 + H/[6(l - a)] \langle x - a \rangle^3 + H(l - a)(a + 2l) / (6l) \langle x - l \rangle^1$$

Cuando  $0 < x < a$

$$\langle x \rangle^1 = x$$

$$\langle x - a \rangle^1 = 0$$

$$\langle x - l \rangle^1 = 0$$

y  $M_1(x) = Hx(l - a)^2 / (6l)$

Cuando  $a < x < l$

$$\langle x \rangle^1 = x$$

$$\langle x - a \rangle^1 = x - a$$

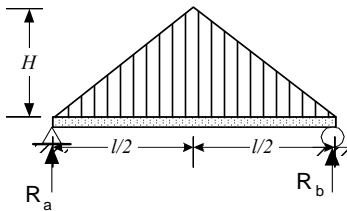
$$\langle x - l \rangle^1 = 0$$

$$M_2(x) = Hx(l - a)^2 / (6l) - H(x - a)^3 / [6(l - a)]$$

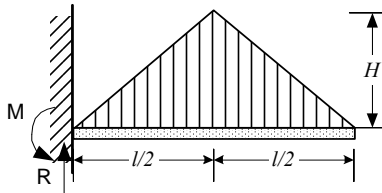
Las expresiones obtenidas por los métodos de cortes e integración son idénticas.

### PROBLEMAS PROPUESTOS

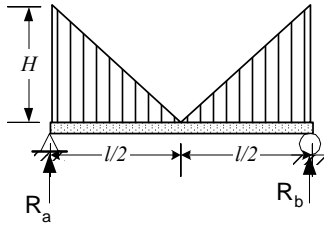
- 5.20. Hallar la fuerza puntual equivalente y su ubicación de la carga distribuida  $p(x) = H \sin(\pi x/2l)$ .
- 5.21. Hallar la fuerza puntual equivalente y su ubicación de una carga distribuida de forma semicircular.
- 5.22. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente apoyada con carga  $p(x) = H \sin(\pi x/2l)$ .
- 5.23. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente empotrada con carga  $p(x) = H \sin(\pi x/2l)$ .
- 5.24. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente empotrada con carga semicircular.
- 5.25. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente empotrada con carga semicircular.
- 5.26. En la viga de la figura se pide el momento flector y la fuerza cortante



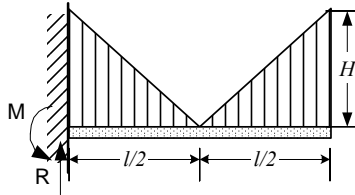
- 5.27. En la viga de la figura se pide el momento flector y la fuerza cortante



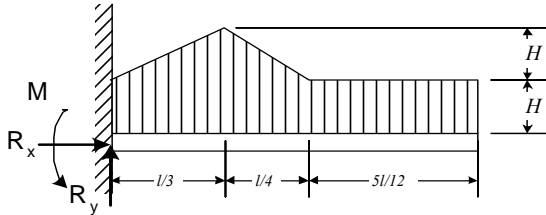
- 5.28. En la viga de la figura se pide el momento flector y la fuerza cortante



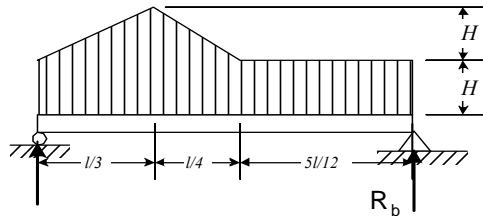
5.29. En la viga de la figura se pide el momento flector y la fuerza cortante



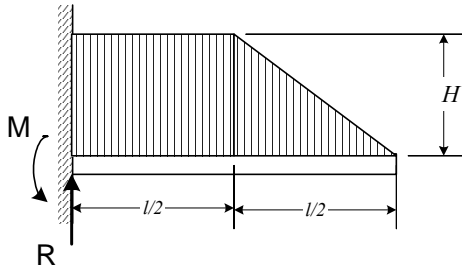
5.30. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



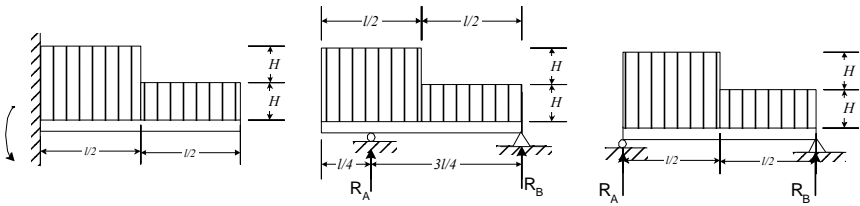
5.31. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



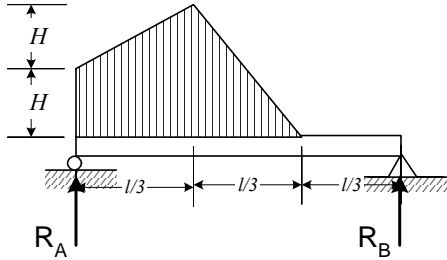
5.32. Hallar el Momento Flector y Fuerza Cortante del sistema de la figura



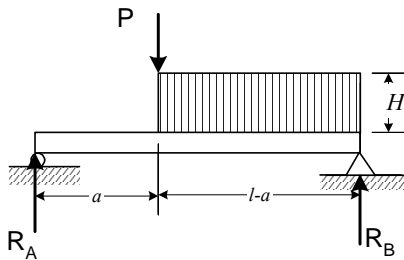
5.33. Hallar solo el momento flector de los sistemas de la figura.



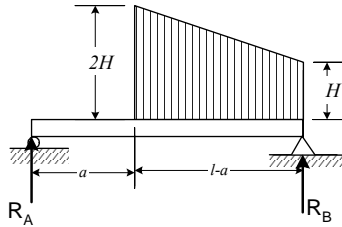
5.34. Hallar el momento flector del sistema de la figura



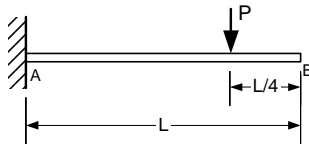
5.35. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



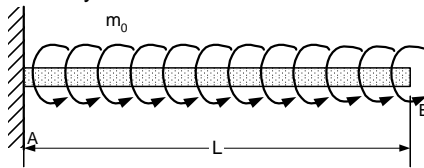
5.36. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



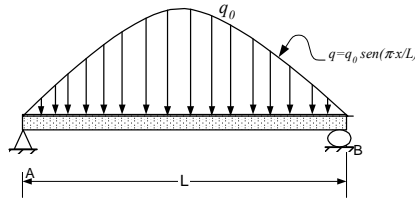
5.37. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



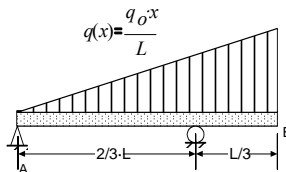
5.38. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.39. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura  
La carga distribuida tiene una intensidad  $q=q_0 \cdot \sin(\pi x/L)$

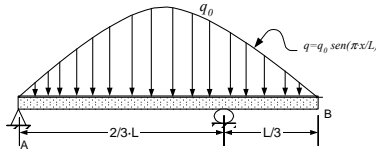


5.40. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

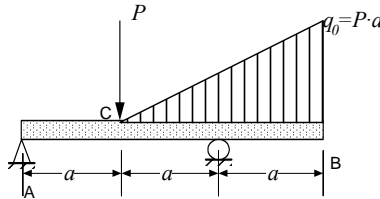




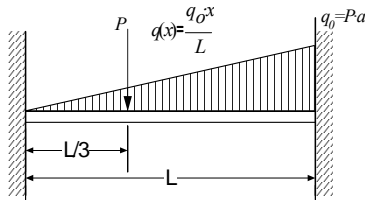
5.41. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura  
 La intensidad de carga varía según la onda senoidal, con valor  $q=q_0 \cdot \text{sen}(\pi x/L)$ .



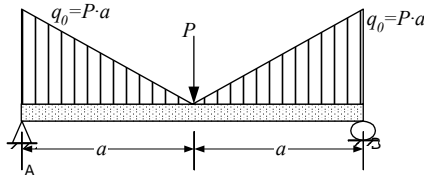
5.42. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



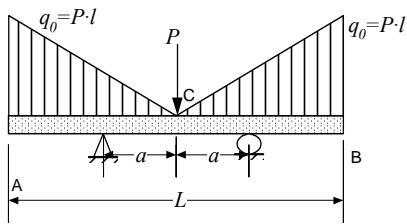
5.43. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



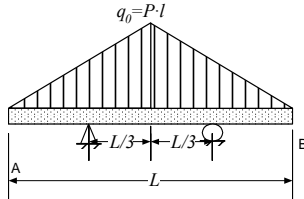
5.44. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



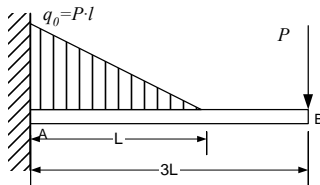
5.45. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



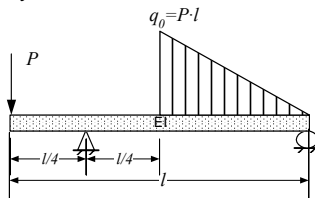
5.46. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



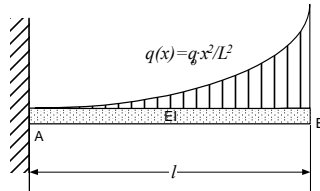
5.47. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



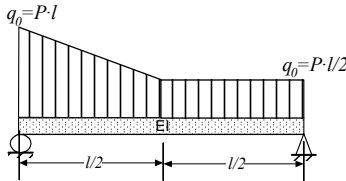
5.48. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



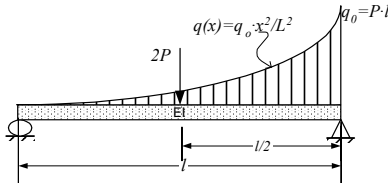
5.49. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



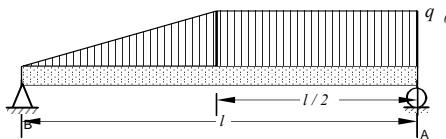
5.50. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



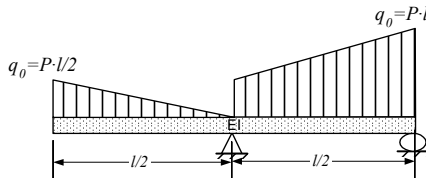
5.51. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



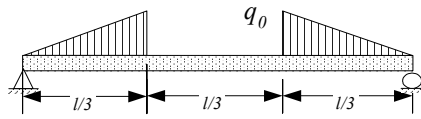
5.52. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



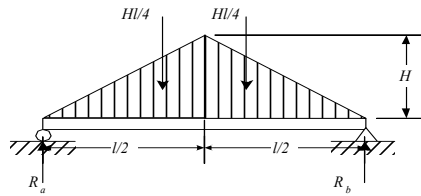
5.53. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.54. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.55. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



## 6.- FLEXIÓN

### Esfuerzos Normales y Cortantes

#### 6.1.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrollarán las ecuaciones para calcular los esfuerzos que se presentan en elementos sometidos a flexión. Para Evitar la falla estos esfuerzos no deberan exceder los límites de fluencia de los materiales empleados.

#### 6.2.- ESFUERZOS NORMALES EN FLEXIÓN

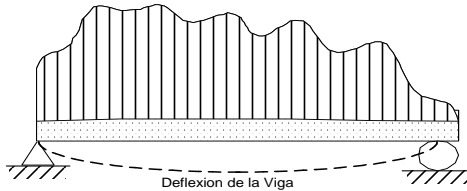


Fig. 6.1 Elástica de una Viga

Una viga inicialmente recta con la carga se deforma adquiriendo una ligera curvatura, conociéndose a esta ultima con el nombre de elástica. Todas las secciones de la viga sufren desplazamientos que generalmente son verticales lo que implica que la viga generalmente no modifica su longitud.

Si se toman dos secciones transversales y próximas entre si, estas son paralelas antes de aplicar las cargas, luego de aplicadas las cargas estas secciones continúan siendo rectas, pero ya no paralelas entre sí. Esto significa que las secciones originalmente planas y normales al eje de la pieza, se mantienen planas y normales a dicho eje. Sin embargo este eje cambio su forma de recta a la forma curva de la elástica

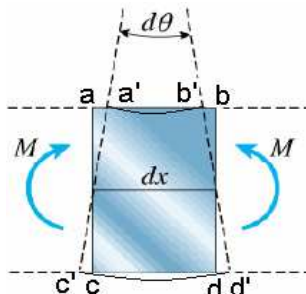


Fig. 6.2 Segmento de una Viga Recto sin Carga y Curvo con carga

Como se puede observar en la figura, unas fibras del sólido se acortan y otras se alargan, existiendo entre ambas una capa de fibras que no sufren variación. Dicha capa se conoce como zona o capa de fibras neutras.

Un segmento diferencial curvo de viga puede considerarse como un arco de círculo con centro en O y radio  $\rho$ . En él se observa que la parte superior ab tiene menor longitud que la inferior cd, lo que sugiere que las fibras superiores se comprimieron y que las fibras inferiores se alargaron. Existiendo un plano llamado "neutro" nn donde no hay deformación y por lo tanto tampoco esfuerzos.

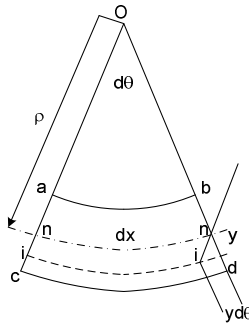


Fig. 6.3 Segmento Curvo de una Viga

Tomando este plano neutro como eje de referencia, y debido a que la longitud  $nn=dx$  es igual a la longitud  $ii=dx$ , se observa que la deformada a una distancia "y" es:

$$\delta = y d\theta \quad (6.1)$$

$$\epsilon = \delta/dx = y d\theta/dx \quad (6.2)$$

del Grafico  $dx = \rho d\theta \quad (6.3)$

De 6.2 y 6.3  $\epsilon = y / \rho \quad (6.4)$

$$\sigma = E \epsilon = Ey / \rho \quad (6.5)$$

La ec 6.5 muestra que los esfuerzos normales son proporcionales a la distancia al eje neutro. Nulos en el eje neutro y máximos en las fibras mas alejadas de este.

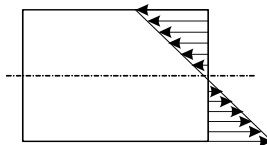


Fig. 6.4 Distribución de Esfuerzos Normales en Flexión

En la ec 6.5 todavía  $\rho$  es desconocido. En ausencia de fuerzas axiales de la estática

$$\Sigma F_x = 0 \quad \int_A dF = N = 0 \quad (6.6)$$

$$dF = \sigma dA = (E y / \rho) dA \quad (6.7)$$

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad (6.8)$$

En esta ecuación  $E/\rho$  no es cero por lo que

$$\int_A y dA = 0 \quad (6.9)$$

Esto requiere que el origen del sistema de coordinas empleado debe estar situado en el centro geométrico de la sección transversal (que es equivalente al centro de gravedad en el caso de vigas homogéneas). En otras palabras el eje neutro coincide con el eje centroidal de la viga

La estática, además del equilibrio de fuerzas requiere del equilibrio de momentos

$$\Sigma M = 0 \quad \int_A dF y = M \quad (6.10)$$

$$dF = \sigma dA = (E y / \rho) dA \quad (6.11)$$

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EI}{\rho} \quad (6.12)$$

donde "I" es el Momento de Inercia de la sección

De 6.5 y 6.12

$$\sigma = \frac{M y}{I} \quad (6.13)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I} \quad (6.14)$$

"Mmax" depende únicamente del tipo de viga y del tipo de carga. Mientras que los valores de "c" e "I" dependen exclusivamente de la sección transversal de la viga.

### 6.3.- ESFUERZOS CORTANTES EN FLEXIÓN

Los esfuerzos cortantes se deben a la fuerza paralela (Q) a la sección.

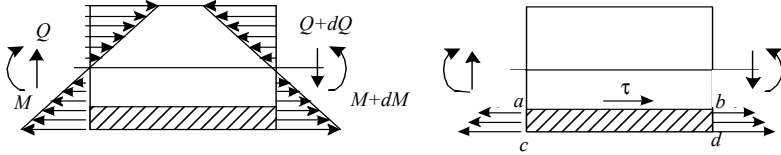


Fig. 6.5 Esfuerzos Cortantes en Flexión

En los extremos laterales de un elemento diferencial se presentan esfuerzos normales como se vio en la anterior sección. Aislando en este elemento diferencial sólo una porción a, b, c, d.

De la estática

$$\Sigma F_x = 0 \quad \int_{A_{lat}} (\sigma + d\sigma) dA + \tau A_{sup} - \int_{A_{lat}} \sigma dA = 0 \quad (6.15)$$

$$\int_{A_{lat}} d\sigma dA + \tau A_{sup} = 0 \quad (6.16)$$

de 6.13  $\sigma = M y / EI$  (6.13)

$$d\sigma = dM y / EI \quad (6.17)$$

En 6.16

$$\int_{A_{lat}} \frac{dM}{EI} y dA + \tau b dy = 0 \quad (6.18)$$

$$\frac{dM}{EI} \int_{A_{lat}} y dA = \tau b dy \quad (6.19)$$

$$\tau = \frac{1}{Ib} \frac{dM}{dx} \int_{A_{lat}} y dA = \frac{Q(\bar{y}_p A_p)}{Ib} \quad (6.20)$$

Nótese que la integral ( $y_p$  y  $A_p$ ) no son del área total sino del área parcial.

$$\tau = \frac{QS}{Ib} \quad (6.21)$$

$$S = \int_{A_{lat}} y dA \quad (6.22)$$

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{max}}{Ib} \quad (6.23)$$



El valor de “Q” depende únicamente del tipo de viga y de su carga, mientras que los valores de “S”, “I” y “b” dependen exclusivamente de la sección de la viga.

Los esfuerzos cortantes tienen una distribución parabólica con valores mínimos en los extremos superior e inferior de la viga y máximos en el eje neutro contrariamente a los esfuerzos normales con distribución lineal y máximos en los extremos superiores e inferiores pero nulos en el eje neutro

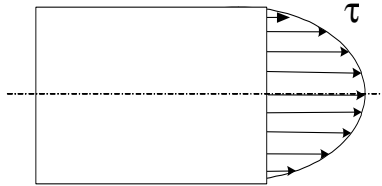


Fig. 6.6 Distribución de Esfuerzos Cortantes en Flexión

#### 6.4.- PERFILES USADOS EN VIGAS

Los perfiles más recomendados en vigas son aquellos que tienen valores altos de Inercia, por lo que se prefieren perfiles con secciones de mayor alto que ancho. En la figura se muestran los perfiles preferidos para secciones transversales de vigas de los cuales se hallarán las ecuaciones reducidas para calcular los esfuerzos de normales y cortantes.

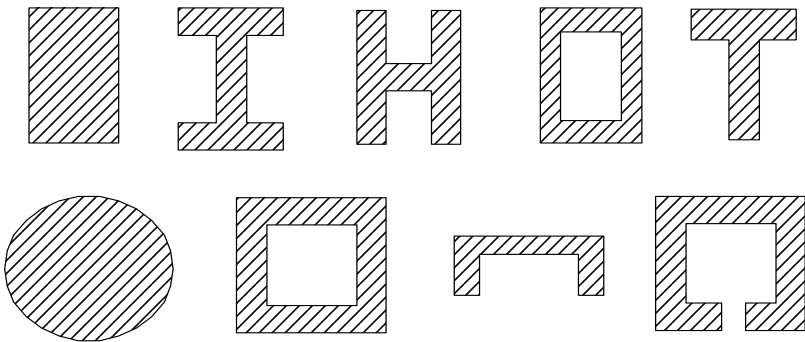
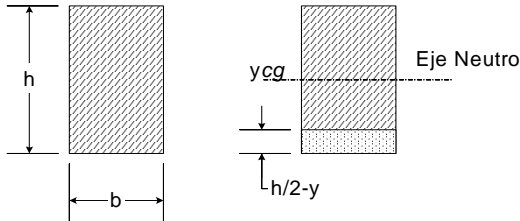


Fig. 6.7 Perfiles Comunes en Vigas

## PROBLEMAS RESUELTOS

6.1. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil rectangular.



Solución :

a) Esfuerzos Normales

$$y_{cg} = h/2$$

$$c = \pm h/2$$

$$I = bh^3/12$$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{My}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{12My}{bh^3}$$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{My}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{12My}{bh^3}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M(h/2)}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{6M}{bh^2}$$

b) Esfuerzos Cortantes

Trazando una línea a una altura y la misma divide la sección en una porción superior y otra inferior:

En la sección inferior

$$A_{\text{parcial}} = b(h/2-y)$$

$$y_{cg\text{parcial}} = y + (1/2)(h/2-y)$$

$$S = A_{\text{parcial}} y_{cg\text{parcial}} = b(h/2-y)[y+(1/2)(h/2-y)] = b(h/2-y)(h/2+y)(1/2)$$

$$S = b(h^2/4-y^2)/2$$

En la sección superior

$$A_{\text{parcial}} = b(h/2+y)$$

$$y_{cg\text{parcial}} = (h/2+y)/2-y = (h/2-y)/2$$

$$S = b(h^2/4-y^2)/2$$

Entonces

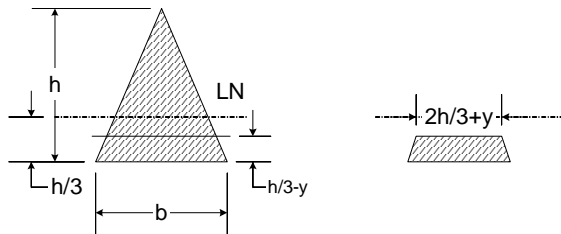
$$S = b(h^2/4 - y^2)/2$$

$$S_{\max y=0} = bh^2/8$$

$$\tau = \frac{QS}{Ib} = \frac{Qb(\frac{h^2}{4} - y^2)\frac{1}{2}}{\frac{bh^3}{12}b} = \frac{6Q(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2})}{bh}$$

$$\tau_{\max} = 1,5 Q/A$$

6.2. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil triangular.



Solución:

a) Esfuerzos Normales

$$y_{cg} = h/3$$

$$c_1 = h/3$$

$$c_2 = 2h/3$$

$$I = bh^3/36$$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{My}{bh^3/36} = \frac{36My}{bh^3}$$

$$\sigma_{\max \text{ tracc}} = \frac{Mc_1}{I} = \frac{M(h/3)}{bh^3/36} = \frac{12M}{bh^2}$$

$$\sigma_{\max \text{ comp}} = \frac{Mc_2}{I} = \frac{M(2h/3)}{bh^3/36} = \frac{24M}{bh^2}$$

b) Esfuerzos Cortantes

Trazando una línea a una altura “y”, en la sección inferior

$$h/B = (2h/3+y)/b$$

$$b = (2h/3+y)B/h$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= b(2h/3+y)/2 = (2h/3+y)2(B/2h) \\
 A_2 &= [B+b](1/2)(h/2) = [B+(2h/3+y)B/h](1/2)(h/3-y) \\
 y_{cg1} &= (1/3)(2h/3+y) - y = (2h/9-2y/3) \\
 y_{cg2} &= (h/2+y)/2-y = (h/2-y)/2 \\
 S_1 &= A_1 y_{cg1} = (2h/3+y)2(B/2h)(2h/9-2y/3) \\
 S_2 &= A_2 y_{cg2} = [B+(2h/3+y)B/h](1/2)(h/3-y)(h/2-y)/2 \\
 S_{\max} &= (4h^2/9)(B/2h)(2h/9) = (4h^2B/81)
 \end{aligned}$$

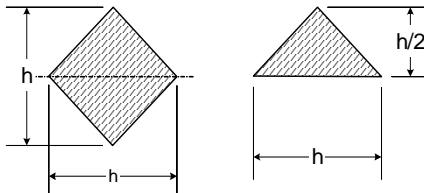
$$\tau_{\text{sup}} = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q\left(\frac{2h}{3}+y\right)^3 \frac{b}{6h}}{\frac{bh^3}{36}\left(\frac{2h}{3}+y\right)\frac{b}{h}} = \frac{Q\left(\frac{2h}{3}+y\right)^2 6}{bh^3}$$

$$\tau_{\text{sup}} = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q\left(\frac{2h}{3}+y\right)^3 \frac{b}{6h}}{\frac{bh^3}{36}\left(\frac{2h}{3}+y\right)\frac{b}{h}} = \frac{Q\left(\frac{2h}{3}+y\right)^2 6}{bh^3}$$

Cuando  $y = -2h/3$  se tiene  $\tau = 0$  y cuando  $y = 0$  se tiene

$$\tau_{\max} = \frac{Q\left(\frac{2h}{3}\right)^2 6}{bh^3} = \frac{Q\frac{4h^2 6}{9}}{bh^3} = \frac{Q8}{3bh} = \frac{4Q}{3A}$$

6.3. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil romboidal.



Solución :

a) Esfuerzos Normales

$$\begin{aligned}
 y_{cg} &= h/2 \\
 c &= \pm h/2 \\
 I &= 2h(h/2)^3/36 + (h/2)(h/2)(h/6)^2 = h^4/48 \\
 \sigma_{\max} &= \frac{Mc}{I} = \frac{M(h/2)}{\frac{h^4}{48}} = \frac{24M}{h^3}
 \end{aligned}$$

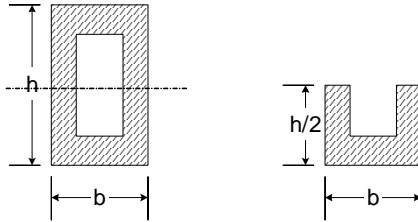
b) Esfuerzos Cortantes

$$\begin{aligned}
 A_{\text{parcial}} &= h(h/2)/2 \\
 y_{cg\text{parcial}} &= (h/2)/3
 \end{aligned}$$

$$S_{\max} = A_{\text{parcial}} y_{\text{cgparcial}} = h^3/24$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q\left(\frac{h^3}{24}\right)}{h^4 h} = \frac{2Q}{h^2}$$

6.4. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil rectangular hueco.



Solución :

a) Esfuerzos Normales

$$y_{\text{cg}} = h/2$$

$$c = \pm h/2$$

$$I = [bh^3 - (b-2e)(h-2e)^3]/12$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{3Mh}{e[b(4e^2 - 6eh + 3h^2) - (2e - h)^3]}$$

b) Esfuerzos Cortantes

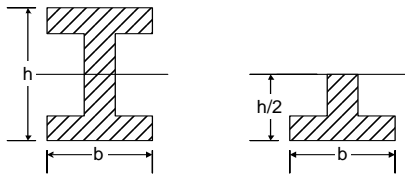
$$A_{\text{parcial}} = b(h/2) - (b-2e)(h/2-e)$$

$$y_{\text{cgparcial}} = [b(h/2)(H/2)(1/2) - (B - 2E)(H/2 - e)(h/2 - e)(1/2)]/A_{\text{parcial}}$$

$$S_{\max} = [b(h/2)(H/2)(1/2) - (B - 2E)(H/2 - e)(h/2 - e)(1/2)]$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{-3Q[2b(e-h) - (2e-h)^2]}{4e[b(4e^2 - 6eh + 3h^2) - (2e-h)^3]}$$

6.5. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil I.



Solución :

a) Esfuerzos Normales

$$y_{cg} = h/2$$

$$c = \pm h/2$$

$$I = bh^3/12 - (b-e)(h-2e)^3/12$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M6h}{\left\{ \left[ 2b(4e^2 - 6eh + 3h^2) - (2e-h)^3 \right] \right\}}$$

b) Esfuerzos Cortantes

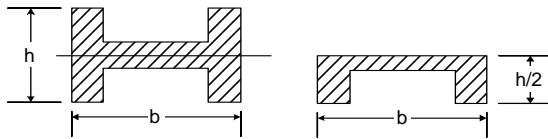
$$A_{\text{parcial}} = [bh - (b-e)(h-2e)]/2$$

$$y_{cg\text{parcial}} = e(h/2 - e)(h/2 - e)/2 + be(h/2 - e + e/2) A_{\text{parcial}}$$

$$S_{\max} = e(h/2 - e)(h/2 - e)/2 + be(h/2 - e + e/2)$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{-3Q \left[ 4b(e-h) - (2e-h)^2 \right]}{\left\{ 2e \left[ 2b(4e^2 - 6eh + 3h^2) - (2e-h)^3 \right] \right\}}$$

6.6. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil H



Solución :

a) Esfuerzos Normales

$$y_{cg} = h/2$$

$$c = \pm h/2$$

$$I = (b-2e)e^3/12 + 2eh^3/12$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{6Mh}{(b-2e)e^3 + 2eh^3}$$

b) Esfuerzos Cortantes

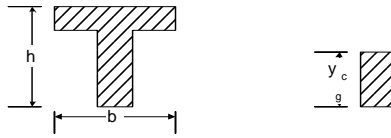
$$A_{\text{parcial}} = bh/2 - (b-2e)(h/2 - e/2)$$

$$y_{cg\text{parcial}} = (bh/2)(h/4) - (b-2e)(h/2 - e/2)\{e/2 + (h/2 - e/2)/2\} A_{\text{parcial}}$$

$$S_{\max} = (bh^2/8) - (b-2e)(h-e)h/8$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{3Q \left[ bh^2 - (b-2e)(h-e) \right]}{2 \left[ (b-2e)e^3 + 2eh^3 \right] e}$$

6.7. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil T.



Solución :

a) Esfuerzos Normales

$$y_{cg} = \frac{bh(h/2) - (b-e)(h-e)(h-e)(1/2)}{bh - (b-e)(h-e)}$$

$$y_{cg} = -\frac{b(e-2h) - (e-h)^2}{2(b-e+h)}$$

$$C_1 = y_{cg}$$

$$C_2 = h - y_{cg}$$

$$I = \frac{e[be^2 + (h-e)(e^2 - 2eh + 4h^2)]}{12} - \frac{eh^2(e-h)^2}{4(b-e+h)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \left\{ \frac{-6M[b(e-2h) - (e-h)^2]}{e[b^2e^2 - 2b(e-h)(e^2 - eh + 2h^2) + (e-h)^2(e^2 - 2eh + h^2)]} \right\}$$

b) Esfuerzos Cortantes

$$A_{\text{parcial}} = [bh - (b-e)(h-2e)]/2$$

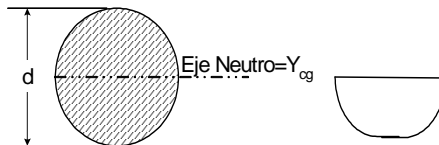
$$y_{cg\text{parcial}} = e(h/2 - e)(h/2 - e)/2 + be(h/2 - e + e/2) A_{\text{parcial}}$$

$$S_{\max} = e y_{cg2}/2$$

$$S_{\max} = \frac{e[b(e-2h) - (e-h)^2]^2}{8(b-e+h)^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{3Q[b(e-2h) - (e-h)^2]^2}{2e[b^2e^2 - 2b(e-h)(e^2 - eh + 2h^2) + (e-h)^2(e^2 - 2eh + h^2)](b-e+h)}$$

6.8. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil circular.



Solución :

a) Esfuerzos Normales

$$y_{cg} = d/2$$

$$c = +/- d/2$$

$$I = \pi d^4/32$$

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M(d/2)}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

b) Esfuerzos Cortantes

Aparcial =  $\pi d^2/2$

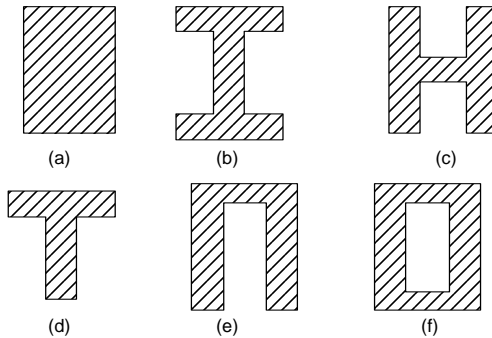
$$y_{cgparcial} = 4/(3\pi)$$

$$S_{max} = A_p y_{cgparcial} = 2d^3/3$$

$$\tau = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q \frac{2d^3}{3}}{\frac{\pi d^4}{64} d} = \frac{Q32}{3 \pi d^2}$$

$$\tau_{max} = (4Q)/(3A)$$

6.9. Comparar la relación esfuerzos normales vs. peso y esfuerzos cortantes vs. peso para los perfiles de la figura. Tomar Ancho = 6 cm, Alto = 12 cm y Espesor = 1 cm.



Solución :

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M(h/2)}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{6M}{bh^2}$$

Para a)

$$\tau_{max} = 1,5 Q/A$$

Para b)

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M6h}{\left\{ e \left[ 2b(4e^2 - 6eh + 3h^2) - (2e - h)^3 \right] \right\}}$$



$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \left[ \frac{-3Q[4b(e-h) - (2e-h)^2]}{2e[2b(4e^2 - 6eh + 3h^2) - (2e-h)^3]} \right]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{6Mh}{(b-2e)e^3 + 2eh^3}$$

Para c)

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{3Q[bh^2 - (b-2e)(h-e)]}{2[(b-2e)e^3 + 2eh^3]e}$$

Para d)

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \left[ \frac{-6M[b(e-2h) - (e-h)^2]}{e[b^2e^2 - 2b(e-h)(e^2 - eh + 2h^2) + (e-h)^2(e^2 - 2eh + h^2)]} \right]$$

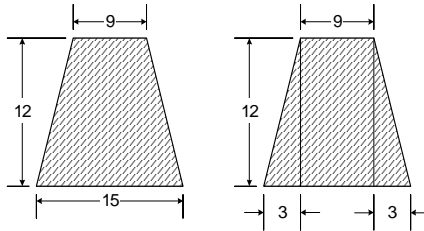
$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \left[ \frac{3Q[b(e-2h) - (e-h)^2]^2}{2e[b^2e^2 - 2b(e-h)(e^2 - eh + 2h^2) + (e-h)^2(e^2 - 2eh + h^2)](b-e+h)} \right]$$

Para e)

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{3Mh}{e[b(4e^2 - 6eh + 3h^2) - (2e-h)^3]}$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \left[ \frac{-3Q[2b(e-h) - (2e-h)^2]}{4e[b(4e^2 - 6eh + 3h^2) - (2e-h)^3]} \right]$$

6.10. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil trapezoidal.



Solución:

a) Esfuerzos Normales

$$y_{cg} = (2A_1 \times cg_1 + A_2 \times cg_2) / (2A_1 + A_2)$$

$$y_{cg} = (2(3)(12/2)(4) + 9(12)6) / (2(3)(12/2) + 9(12)) =$$

$$y_{cg} = [(B-b)(h/6) + (bh/2)] / [(B-b)(h/2) + (bh)]$$

$$y_{cg} = (h/3)(B/2+b) / [(h/2)(B+b)] = (2h/3)(B/2+b) / (B+b)$$

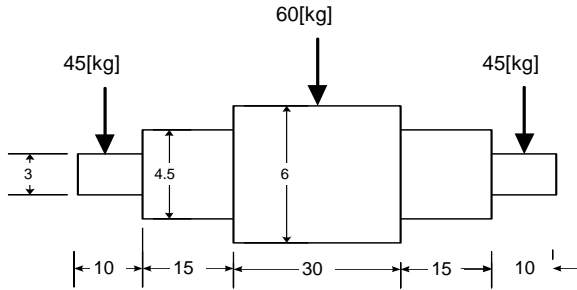
$$c_1 = y_{cg} = (2h/3)(B/2 + b) / (B + b)$$

$$c_2 = h - y_{cg} = h - (2h/3)(B/2 + b) / (B + b)$$

$$I = 2(I_{cg1} + A_1 d_1^2) + (I_{cg2} + A_2 d_2^2)$$

$$I = 2\left\{ \left[ \frac{(B-b)}{2} \right] \frac{h^3}{36} + \left[ \frac{(B-b)}{2} \right] \left( \frac{h}{2} \right) (I_{cg1} + A_1 d_1^2) + (I_{cg2} + A_2 d_2^2) \right\}$$

6.11. En la figura se muestra un eje de una transmisión. En los puntos A, C y E van montados engranajes y en B y D los cojinetes de apoyo. Las fuerzas sobre los engranajes son todas verticales, el eje es simétrico y las dimensiones están en centímetros. Se pide calcular los esfuerzos normales de flexión y de corte máximos.



Solución:

Para una sección circular

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I} = \frac{16M_{\max}}{\pi d^3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{4Q}{3A}$$

Por la simetría y de la Estática

$$R_a = R_b = (45 + 60 + 45)/2 = 75 \text{ kg}$$

En el eje de 3  $M_{\max} = R_a 5 = 75(5) = 375 \text{ Kg cm}$

$$Q_{\max} = R_a = 75 \text{ Kg}$$

$$\sigma_{\max} = 70.73 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = 14.14 \text{ Kg/cm}^2$$

En el eje 4.5  $M_{\max} = R_a 20 = 75(20) = 1500 \text{ Kg cm}$

$$Q_{\max} = R_a = 75 \text{ Kg}$$

$$\sigma_{\max} = 83.83 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = 6.2814 \text{ Kg/cm}^2$$

En el eje 6  $M_{\max} = R_a 50 = 75(50) = 3750 \text{ Kg cm}$

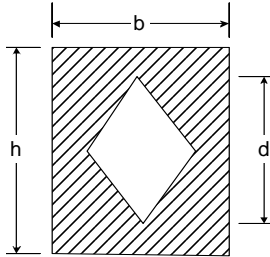
$$Q_{\max} = R_a = 75 \text{ Kg}$$

$$\sigma_{\max} = 88.41 \text{ Kg/cm}^2$$

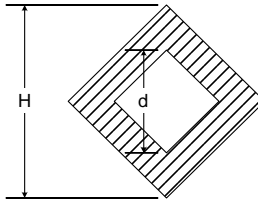
$$\tau_{\max} = 3.53 \text{ Kg/cm}^2$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS

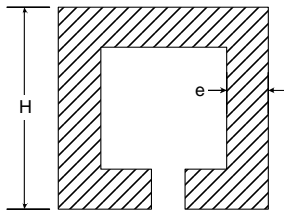
6.12. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



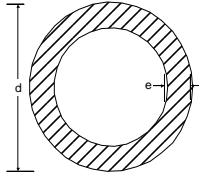
6.13. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



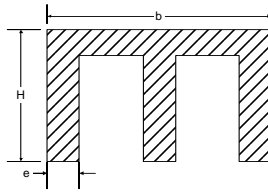
6.14. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



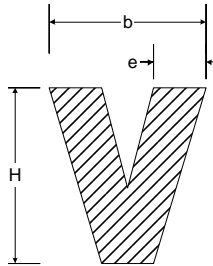
6.15. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



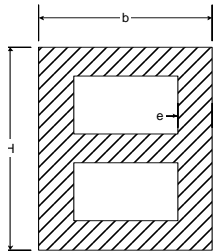
6.16. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



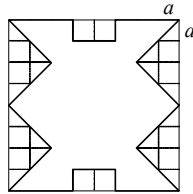
6.17. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



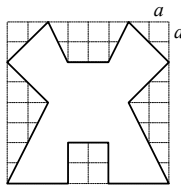
6.18. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



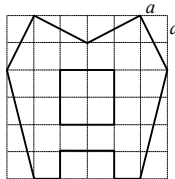
6.19. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



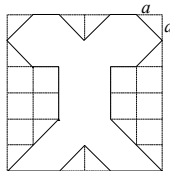
6.20. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



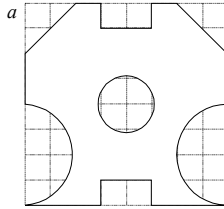
6.21. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



6.22. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



6.23. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.

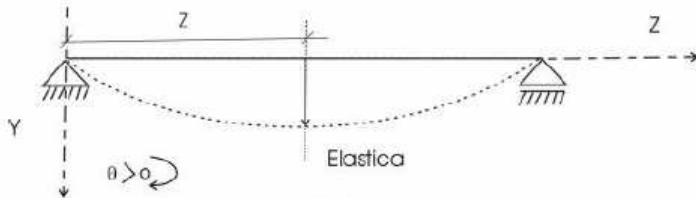


## 7.- FLEXIÓN Deformaciones

### 7.1.- INTRODUCCIÓN

Las piezas sometidas a cargas de flexión presentan deformaciones o deflexiones. El cálculo de estas deformaciones es muy importante para garantizar el buen comportamiento estructural, para verificar la resistencia y para resolver problemas hiperestáticos. En este capítulo se estudiarán tres métodos muy comunes usados para hallar las deformaciones que se presentan en vigas sometidas a flexión. Estos métodos son: a) Método de doble integración; b) Método de Superposición y c) Método del área del diagrama de momentos.

### 7.2.-LÍNEA ELÁSTICA



**Fig. 7.1 Línea Elástica**

Se denomina "Línea elástica" a la forma curvada que adopta el eje de una viga al producirse la deformación por acción de las cargas exteriores.

### 7.2.-MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

Para deducir la ecuación de la elástica se supone que las deformaciones son pequeñas y que ellas se deben solo a los momentos flectores.

Como se vio en el anterior capítulo, un segmento diferencial curvo de viga puede considerarse como un arco de círculo con centro en  $O$  y radio  $\rho$ .

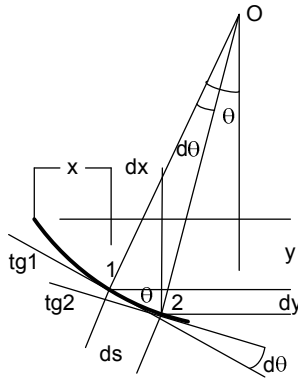


Fig. 7.2 Segmento Curvo de una Viga

Del Grafico  $dx \approx ds = \rho d\theta$  (7.1)

$$tg(\theta) \approx \theta = \frac{dy}{dx} \quad (7.2)$$

De ambas  $\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$  (7.3)

Del anterior capitulo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (7.4)$$

Finalmente  $-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$  (7.5)

Aparece un signo negativo porque para los ejes elegidos se ve valores crecientes de x corresponden a valores decrecientes de  $\theta$ .

Si los desplazamientos no son pequeños debe utilizarse para la curvatura la expresión rigurosa

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 y / \partial x^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \quad (7.6)$$

Y conocida la función del momento flector, por doble integración se halla la ecuación de la línea elástica



Para la deducción de la ecuación de la elástica, en algunas circunstancias resulta más práctico usar las funciones de la fuerza de corte o de la carga

$$\frac{Q}{EI} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad (7.7)$$

$$\frac{p(x)}{EI} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (7.8)$$

### 7.3.-MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

Si tenemos un sólido elástico lineal al cual aplicamos un sistema de fuerzas (causa) se producirán distintos efectos, como por ejemplo: reacciones de apoyo, tensiones, deformaciones, sollicitaciones, etc. (efectos).

En su expresión más general principio de superposición dice: “La relación entre causa y efecto es lineal.” Como consecuencia de ello:

A una causa C1 le corresponde un efecto E1

A una causa C2 le corresponde un efecto E2

A una causa  $C = \alpha C1 + \beta C2$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  ctes, le corresponderá un efecto  $E = \alpha E1 + \beta E2$

El principio implica una absoluta linealidad entre las cargas y las deformaciones, esfuerzos o sollicitaciones.

Esta linealidad no se da principalmente en los siguientes casos:

a) Cuando no se cumple la ley de Hooke, o sea, no existe linealidad entre tensiones y deformaciones.

b) Cuando la geometría de la estructura cambia en forma apreciable, y para el equilibrio es necesario tomar en cuenta la modificación sufrida por el sistema.

Según este principio, si el estado de carga en una viga puede descomponerse en “n” cargas más sencillas, la deformada total de la viga es la superposición de las “n” deformadas que producen cada una de las “n” cargas.

En una viga empotrada cuando la carga no llegue al extremo libre, el tramo que no soporta carga permanece recto por lo que fácilmente se pueden hallar las deformadas.

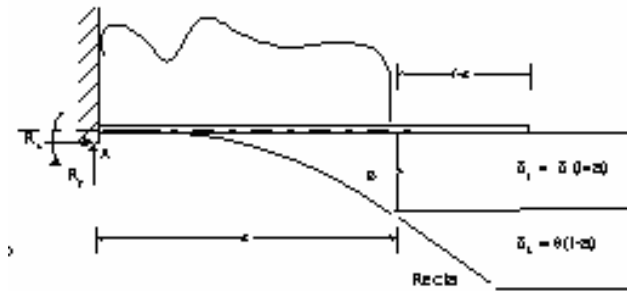


Fig. 7.3 Deformada de una viga empotrada sin carga en el extremo libre

$$\delta_{\text{total}} = \delta_1 + \delta_2 = \delta_1 (l \rightarrow a) + \theta (l-a) \quad (7.9)$$

#### 7.4.- MÉTODO DEL ÁREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTOS

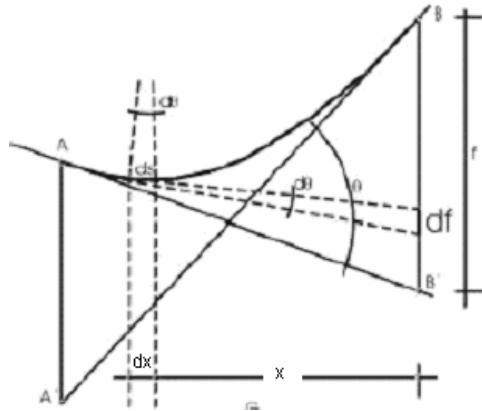


Fig. 7.4 Método del Area del Diagrama de Momentos

Considérese un elemento diferencial de línea elástica, nuevamente este puede considerarse como un arco de círculo con centro en O, radio  $\rho$  y subtendido por el ángulo  $d\theta$ . Este ángulo es el mismo que existe entre las tangentes en los extremos del elemento diferencial. Relacionamos las ecuaciones 7.1 y 7.4 se obtiene

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (7.10)$$

Entonces:

$$\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (7.11)$$

Ecuación que da el área del diagrama de momentos y que es la base del:

**TEOREMA I:** El ángulo  $\theta$  comprendido entre dos tangentes en dos puntos cualesquiera A y B de la línea elástica, es igual al área del diagrama de momentos reducido entre estos puntos.

De la figura se puede apreciar que el producto  $x d\theta$  es la distancia vertical entre tangentes f en B. Integrando

$$\delta_B = BB' = \int_A^B u d\theta = \int_A^B \frac{Mu}{EI} dx \quad (7.12)$$

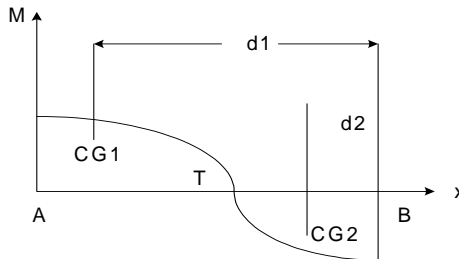
**TEOREMA II:** Dado dos puntos A y B pertenecientes a una línea elástica, la ordenada de B respecto a la tangente en A es igual al momento estático con respecto a B del área de momentos reducidos comprendida entre A y B.

Este momento estático puede calcularse multiplicando el área total del diagrama de momentos reducidos comprendida entre A y B por la distancia a su centro de gravedad.

$$\delta_A = AA' = \int_A^B x d\theta = \int_A^B \frac{Mx}{EI} dx \quad (7.13)$$

Los dos teoremas anteriores se conocen como Teoremas de Mohr

En el caso de que el diagrama tenga áreas positivas y negativas, se realizará el procedimiento para cada área

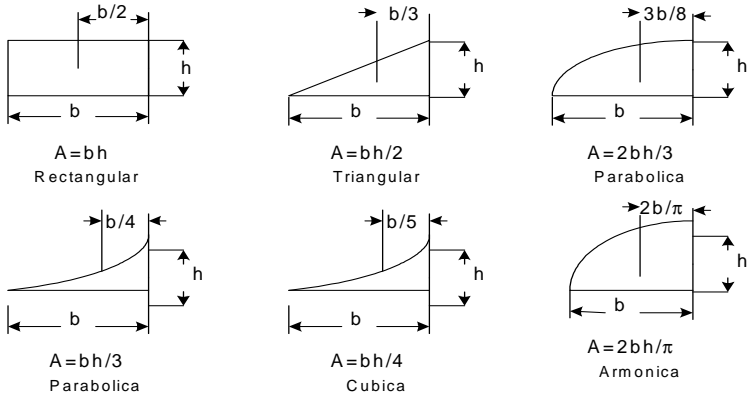


**Fig. 7.5 Diagrama del Momento de flexión con Áreas Positivas y Negativas**

$$EI(\theta) = \text{Area (AT)} - \text{Area (TB)} \quad (7.14)$$

$$EI(\delta) = \text{Area (AT)}d_1 - \text{Area (TB)} d_2 \quad (7.15)$$

A continuación se muestran las áreas y centros de gravedad de figuras comunes:

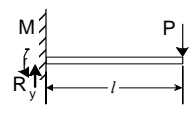
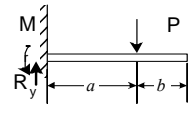
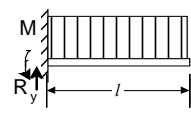
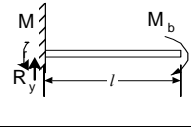
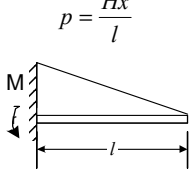
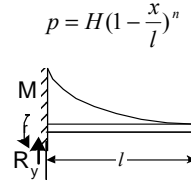


**Fig. 7.6 Áreas y Centros de Gravedad de Figuras Comunes**

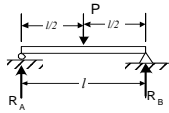
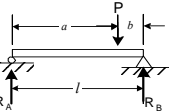
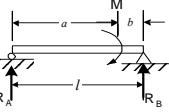
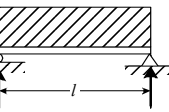
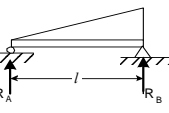
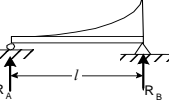
### 7.5.- SISTEMAS HIPERESTATICOS

Los sistemas donde las ecuaciones de la Estática ( $\Sigma F = 0$  y  $\Sigma M = 0$ ) son en numero menores al numero de Cargas incógnitas que se desean hallar, no se pueden resolver y se conocen como estáticamente Indeterminados y en ellos se deben introducir ecuaciones adicionales de deformaciones.

### Deflexiones de vigas simplemente empotradas

	$R_1 = P, R_2 = 0$ $M_1 = Pl, M_2 = 0$ $M = P(x-l)$ $Q = P$	$Ely = \frac{Px^2}{6}(x-3l)$ $EI\theta = \frac{Px}{2}(x-2l)$	$Ely_{\max} = \frac{Pl^3}{3}$ $EI\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2}$
	$R_1 = P, R_2 = 0$ $M_1 = Pa, M_2 = 0$ $M_a = P(x-a)$ $M_b = 0$ $Q_a = P$ $Q_b = 0$	$Ely_a = \frac{Px^2}{6}(x-3a) \quad EI\theta_a = \frac{Px}{2}(x-2a)$ $0 < x < a$ $Ely_b = \frac{Pa^2}{6}(a-3x) \quad EI\theta_b = \frac{Pa^2}{2}$ $a < x < l$	$Ely_{\max} = \frac{Pa^2}{6}(a-3l)$ $EI\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2}$
	$R_1 = Hl, R_2 = 0$ $M_1 = Hl^2/2, M_2 = 0$ $M = (H/2)(x-l)^2$ $Q = H(l-x)$	$Ely = \frac{Hx^2}{24}(4lx - x^2 - 6l^2)$ $EI\theta = \frac{Hx}{6}(3lx - x^2 - 3l^2)$	$Ely_{\max} = \frac{Hl^4}{8}$ $EI\theta_{\max} = \frac{Hl^3}{6}$
	$R_1 = 0, R_2 = 0$ $M_1 = Me, M_2 = Me$ $M = Me$ $Q = 0$	$Ely = \frac{Mx^2}{2}$ $EI\theta = Mx$	$Ely_{\max} = \frac{Ml^2}{2}$ $EI\theta_{\max} = Ml$
	$R_1 = \frac{Hl}{2}, R_2 = 0$ $M_1 = \frac{Hl^2}{6}, M_2 = 0$ $M = \frac{Hl^2}{6}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3$ $Q = -\frac{Hl}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$	$Ely = \frac{Hx^2}{120l}(x^3 - 5lx^2 + 10l^2x - 10l^3)$ $EI\theta = \frac{Hx}{24l}(x^3 - 4x^2l + 6xl^2 + 4l^3)$	$Ely_{\max} = \frac{Hl^4}{30}$ $EI\theta_{\max} = \frac{Hl^3}{24}$
	$R_1 = \frac{Hl}{n+1}, R_2 = 0$ $M_1 = \frac{Hl^2}{(n+1)(n+2)}$ $M_2 = 0$ $M = \frac{Hl^2}{(n+1)(n+2)}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n+2}$ $Q = \frac{Hl}{(n+1)}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n+1}$	$Ely = -\frac{Hl^3\left[\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n+4} + (n+4)\frac{x}{l} - 1\right]}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ $EI\theta = -\frac{Hl^3\left[-\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n+3} + 1\right]}{(n+1)(n+2)(n+3)}$	$Ely_{\max} = \frac{Hl^4}{(n+1)(n+2)(n+4)}$ $EI\theta_{\max} = \frac{Hl^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

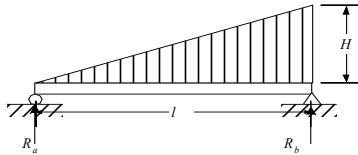
### Deflexiones de vigas simplemente apoyadas

	$R_1 = P/2$ $R_2 = P/2$ $M = Px/2$ $Q = P/2$	$Ely = \frac{Px}{12} \left( \frac{3}{4}l^2 - x^2 \right)$ $EI\theta = \frac{P}{4} \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right)$	$Ely_{\max} = \frac{Pl^3}{48}$ $EI\theta_1 = EI\theta_2 = \frac{Pl^2}{16}$
	$R_1 = Pb/l$ $R_2 = Pa/l$ $M_a = Pbx/l$ $M_b = Pa(l-x)/l$ $Q_a = Pb/l$ $Q_b = -Pa/l$	$Ely_a = \frac{Pbx}{6l} (l^2 - x^2 - b^2)$ $Ely_b = \frac{Pb}{6l} \left[ \frac{l}{b}(x-a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3 \right]$ $EI\theta_a = \frac{Pb}{6} \left( l - \frac{3x^2}{l} - \frac{b^2}{l} \right)$ $EI\theta_b = \frac{Pb}{6l} \left[ \frac{3l}{b}(x-a)^2 + (l^2 - b^2) - 3x^2 \right]$	$Ely_{\max} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}l}$ <b>en</b> $x = \sqrt{(l^2 - b^2)/3}$ $EI\theta_1 = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}$ $EI\theta_2 = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6l}$
	$R_1 = -M/l$ $R_2 = M/l$ $M_a = -Mx/l$ $M_b = -M(l-x)/l$ $Q_a = -M/l$ $Q_b = -M/l$	$Ely_a = \frac{M}{6l} (-x^3 + 6axl - 3a^2x - 2l^2x)$ $Ely_b = \frac{M}{6l} (-x^3 + 3x^2l - 3a^2x - 2l^2x + 3a^2l)$ $EI\theta_a = \frac{M}{6} (-3x^2 + 6al - 3a^2 - 2l^2)$ $EI\theta_b = \frac{M}{6} (-3x^2 + 6xl - 3a^2 - 2l^2)$	$E\theta_1 = \frac{M}{6l} (6al - 3a^2 - 2l^2)$ $EI\theta_2 = \frac{M}{6l} (l^2 - 3a^2)$
	$R_1 = R_2 = Hl/2$ $M = \frac{Hxl}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$ $Q = H \left( \frac{l}{2} - x \right)$	$Ely = \frac{Hx}{24} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$ $EI\theta = \frac{H}{24} (l^3 - 6lx^2 + 4x^3)$	$Ely_{\max} = \frac{5Hl^4}{384}$ $EI\theta_1 = EI\theta_2 = \frac{Hl^3}{24}$
	$R_1 = Hl/6$ $R_2 = Hl/3$ $M = \frac{Hxl}{6} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$ $Q = \frac{Hl}{6} \left( 1 - \frac{3x^2}{l^2} \right)$	$Ely = \frac{Hx}{360l} (7l^4 - 10l^2x^2 + 3x^4)$ $EI\theta = \frac{H}{360l} (7l^3 - 30lx^2 + 15x^4)$	$Ely_{\max} = \frac{5Hl^4}{384}$ $EI\theta_1 = \frac{7Hl^4}{360}$ $EI\theta_2 = \frac{8Hl^4}{360}$
	$R_1 = Hl / ((n+2)(n+1))$ $R_2 = Hl / (n+2)$ $M = \frac{Hlx(1 - \frac{x^{n+1}}{l^{n+1}})}{(n+2)(n+1)}$ $Q = \frac{Hl \left( \frac{1}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{l^{n+1}} \right)}{(n+1)}$	$Ely = \frac{Hx}{(n+2)(n+1)} \left[ \frac{lx^2 - l^3}{6} + \frac{l^{3+n} - x^{3+n}}{(n+4)(n+3)l^n} \right]$ $EI\theta = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left[ \frac{3lx^2 - l^3}{6} + \frac{l^{3+n} - (n+4)x^{3+n}}{(n+4)(n+3)l^n} \right]$	$E\theta_1 = \frac{Hl \left[ \frac{1}{(n+4)(n+3)} - \frac{1}{6} \right]}{(n+2)(n+1)}$ $E\theta_2 = \frac{Hl \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{(n+4)} \right]}{(n+2)(n+1)}$

## PROBLEMAS RESUELTOS

### a) Método de la doble integración

7.1. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



**Solución:**

De 5.2

$$M = (H/6)(lx - x^3/l)$$

Integrando

$$EI y' = (H/6)(lx^2/2 - x^4/4l) + c1$$

$$EI y = (H/6)(lx^3/6 - x^5/20l) + c1 x + c2$$

$$x = 0 \quad y = 0$$

$$c2 = 0$$

$$x = l \quad y = 0$$

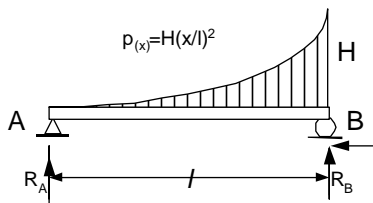
$$0 = (H/6)(l^4/6 - l^4/20) + c1 l$$

$$c1 = -(7H l^3/360)$$

$$EI y' = \frac{H}{360l} (7l^3 - 30lx^2 + 15x^4)$$

$$EI y = \frac{Hx}{360l} (7l^4 - 10l^2 x^2 + 3x^4)$$

7.2. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



**Solución:**

De 5.4

$$M = (H/12)(lx - x^4/12)$$

Integrando

$$EI y' = (H/12)(lx^2/2 - x^5/5l) + c1$$

$$EI y = (H/12)(lx^3/6 - x^6/30l) + c1 x + c2$$

$$x = 0 \quad y = 0$$

$$c2 = 0$$

$$x = l \quad y = 0$$

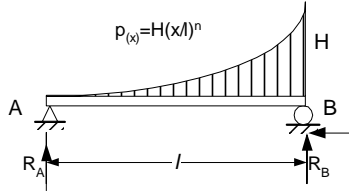
$$0 = (H/12)(l^4/6 - l^4/30) + c1 l$$

$$c_1 = -(H l^3 / 90)$$

$$EIy' = \frac{H}{12} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^5}{5l^2} - \frac{4l^3}{30} \right)$$

$$EIy = \frac{H}{12} \left( \frac{lx^5}{6} - \frac{x^6}{30l^2} - \frac{4l^3}{30} \right)$$

7.3. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



**Solución:**

$$M = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( xl - \frac{x^{n+2}}{l^n} \right)$$

De 5.5

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n} \right) + c_1$$

Integrando

$$EIy = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} \right) + c_1x + c_2$$

$$x = 0 \quad y = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$x = l \quad y = 0$$

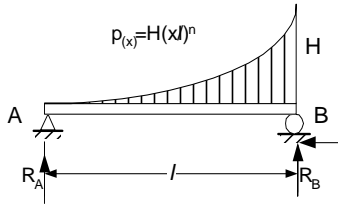
$$c_1 = -\frac{Hl^3}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+4)(n+3)} \right)$$

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)} \right)$$

$$EIy = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} - \frac{l^3x}{6} + \frac{l^3x}{(n+4)(n+3)} \right)$$

7.4. Hallar los valores de las pendientes en los extremos y la ubicación de la deformada máxima del sistema de la figura





**Solución:**

Del problema anterior

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)} \right)$$

Para  $x = 0$

$$\theta_{lza} = \frac{Hl^3}{(n+2)(n+1)} \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{(n+4)(n+3)} \right)$$

Para  $x = l$

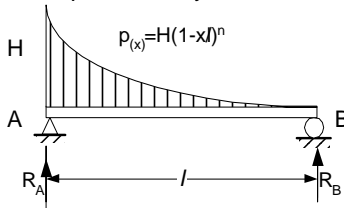
$$\theta_{der} = \frac{Hl^3}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{6} + \frac{1}{(n+4)(n+3)} \right)$$

La deformada máxima ocurre cuando  $y' = 0$

$$\frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)} = 0$$

Ecuación de donde se despeja  $x$

7.5. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



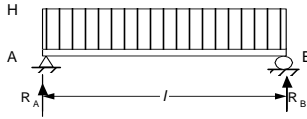
**Solución:**

Se reemplaza en el problema anterior  $(l-x)$  por  $x$

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{l(l-x)^2}{2} - \frac{(l-x)^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)} \right)$$

$$EIy = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{l(l-x)^3}{6} - \frac{(l-x)^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} - \frac{l^3(l-x)}{6} + \frac{l^3(l-x)}{(n+4)(n+3)} \right)$$

7.6. Hallar las ecuaciones de las pendientes, deformaciones y valores máximos de estos en el sistema de la figura



**Solución:**

Reemplazando  $n = 0$  en los resultados del problema 7.3

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)} \right) = \frac{H}{2} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{4(3)} \right)$$

$$EIy' = \frac{H}{24} (6lx^2 - 4x^3 - l^3)$$

$$EIy = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} - \frac{l^3x}{6} + \frac{l^3x}{(n+4)(n+3)} \right) = \frac{H}{2} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{4(3)} - \frac{l^3x}{6} + \frac{l^3x}{4(3)} \right)$$

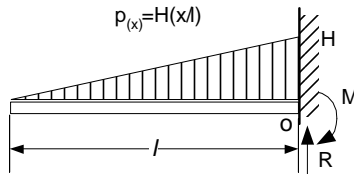
$$EIy = \frac{H}{24} (2lx^3 - x^4 - l^3x)$$

La deformada máxima ocurre en  $x=l/2$  y la pendiente máxima ocurre en  $x = 0$  y  $x = l$

$$EIy'_{\max} = \frac{5Hl^4}{384}$$

$$EIy'_{\max} = \frac{Hl^3}{24}$$

7.7. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



**Solución:**

De 5.8

$$M = -H \frac{x^3}{6l}$$

Integrando

$$EIy' = -H \frac{x^4}{24l} + c_1$$

$$EIy = -H \frac{x^5}{120l} + c_1x + c_2$$

$x = l \quad y' = 0$

$$c_1 = \frac{Hl^3}{24}$$

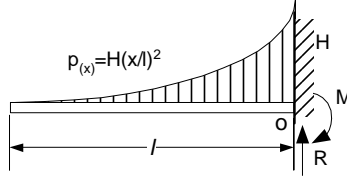
$x = l \quad y = 0$

$$c_2 = -\frac{Hl^4}{30}$$

$$EIy' = -\frac{H}{24} \left( \frac{x^4}{l} - l^3 \right)$$

$$EIy = -\frac{H}{120} \left( \frac{x^5}{l} - l^3 x 5 + l^4 4 \right)$$

7.8. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución:

De 5.9 
$$M = -H \frac{x^4}{12l^2}$$

Integrando 
$$EIy' = -H \frac{x^5}{60l^2} + c_1$$

$$EIy = -H \frac{x^6}{360l^2} + c_1 x + c_2$$

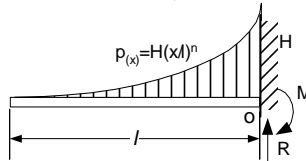
$x = l \quad y' = 0$  
$$c_1 = H \frac{l^3}{60}$$

$x = l \quad y = 0$  
$$c_2 = -H \frac{l^4}{72}$$

$$EIy' = -\frac{H}{60} \left( \frac{x^5}{l^2} - l^3 \right)$$

$$EIy = -\frac{H}{360} \left( \frac{x^6}{l^2} - l^3 x 6 + l^4 5 \right)$$

7.9. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución:

De 5.10 
$$M = -H \frac{x^{(n+2)}}{(n+2)(n+1)l^n}$$

Integrando 
$$EIy' = -H \frac{x^{(n+3)}}{(n+3)(n+2)(n+1)l^n} + c_1$$

$$EIy = -H \frac{x^{(n+4)}}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)l^n} + c_1x + c_2$$

Condiciones de Borde

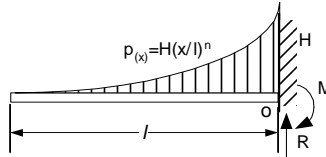
$$x = l \quad y' = 0 \quad c_1 = H \frac{l^3}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$$x = l \quad y = 0 \quad c_2 = -H \frac{l^4}{(n+4)(n+2)(n+1)}$$

$$EIy' = -\frac{H}{(n+3)(n+2)(n+1)} \left( \frac{x^{n+3}}{l^n} - l^3 \right)$$

$$EIy = -\frac{H}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \left( \frac{x^{n+4}}{l^n} - l^3x(n+4) + l^4(n+3) \right)$$

7.10. Hallar los valores máximos de pendiente y deformación del sistema de la figura



**Solución:**

Del problema anterior

$$EIy' = -\frac{H}{(n+3)(n+2)(n+1)} \left( \frac{x^{n+3}}{l^n} - l^3 \right)$$

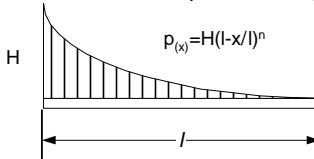
$$EIy = -\frac{H}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \left( \frac{x^{n+4}}{l^n} - l^3x(n+4) + l^4(n+3) \right)$$

La pendiente y deformada máximas ocurren cuando  $x = 0$

$$EI\theta_{\max} = \frac{Hl^3}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$$EIy_{\max} = -\frac{Hl^4}{(n+4)(n+2)(n+1)}$$

7.11. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



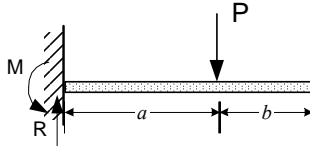
**Solución:**

Se reemplaza en el problema 7.9  $(l-x)$  por  $x$

$$EIy' = -\frac{H}{(n+3)(n+2)(n+1)} \left( \frac{(l-x)^{n+3}}{l^n} - l^3 \right)$$

$$Ely = -\frac{H}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \left( \frac{(l-x)^{n+4}}{l^n} - l^3(l-x)(n+4) + l^4(n+3) \right)$$

7.12. Hallar las ecuaciones de las pendientes, deformaciones y valores máximos de estos en el sistema de la figura usando funciones de singularidad



**Solución:**

De 5.14

$$Q(x) = -Pa \langle x \rangle^{-1} + P \langle x \rangle^0 - P \langle x-a \rangle^0$$

$$M(x) = -Pa \langle x \rangle^0 + P \langle x \rangle^1 - P \langle x-a \rangle^1$$

Integrando

$$Ely'(x) = -Pa \langle x \rangle^1 + P \langle x \rangle^{2/2} - P \langle x-a \rangle^{2/2}$$

$$Ely(x) = -Pa \langle x \rangle^{2/2} + P \langle x \rangle^{3/6} - P \langle x-a \rangle^{3/6}$$

Para  $0 < x < a$

$$\langle x \rangle^n = x^n$$

$$\langle x-a \rangle^n = 0$$

entonces

$$Ely'(x) = -Pa x + P x^{2/2}$$

$$Ely(x) = -Pa x^{2/2} + P x^{3/6}$$

$$Ely' = \frac{Px}{2}(x-2a)$$

$$Ely = \frac{Px^2}{6}(x-3a)$$

Para  $a < x < l$

$$\langle x \rangle^n = x^n$$

$$\langle x-a \rangle^n = (x-a)^n$$

$$\langle x-l \rangle^n = 0$$

Entonces

$$Ely'(x) = -Pa x + P x^{2/2} - P(x-a)^{2/2}$$

$$Ely'(x) = -Pa x + P x^{2/2} - P x^{2/2} + P x a - Pa^{2/2} = -Pa^{2/2}$$

$$Ely(x) = -Pa x^{2/2} + P x^{3/6} - P(x-a)^{3/6}$$

$$Ely(x) = -Pa x^{2/2} + P x^{3/6} - P x^{3/6} + P x^{2a/2} - P x a^{2/2} + Pa^{3/6}$$

$$Ely(x) = -P x a^{2/2} + Pa^{3/6}$$

$$Ely' = -\frac{Pa^2}{2}$$

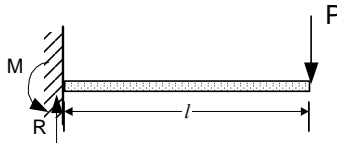
$$Ely = \frac{Pa^2}{6}(a-3x)$$

Las deformadas máximas ocurren cuando  $x = l$

$$EIy'_{\max} = -\frac{Pa^2}{2}$$

$$EIy_{\max} = \frac{Pa^2}{6}(a-3l)$$

7.13. Hallar las ecuaciones de las pendientes, deformaciones y valores máximos de estos en los sistemas de la figura



**Solución:**

Reemplazando en el problema anterior  $a = l$  y  $b = 0$

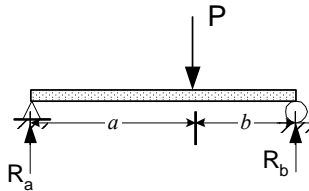
$$EIy' = \frac{Px}{2}(x-2l)$$

$$EIy = \frac{Px^2}{6}(x-3l)$$

$$EIy'_{\max} = \frac{Pl^2}{2}$$

$$EIy_{\max} = \frac{Pl^3}{3}$$

7.14. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



**Solución:**

De 5.13

$$M1 = Px - Pxa/l$$

$$M2 = Pa - Pxa/l$$

Integrando

$$EIy'_1 = \frac{Px^2}{2} - \frac{Px^2a}{2l} + c_1$$

$$EIy_1 = \frac{Px^3}{6} - \frac{Px^3a}{6l} + c_1x + c_2$$

$$EIy'_2 = Pax - \frac{Px^2a}{2l} + c_3$$

$$EIy_2 = \frac{Pax^2}{2} - \frac{Px^3a}{6l} + c_3x + c_4$$

$$x = 0 \quad y_1 = 0$$

$$0 = c_2$$

$$x = a \quad y_1' = y_2'$$

$$\frac{Pa^2}{2} - \frac{Pa^3}{2l} + c_1 = Pa^2 - \frac{Pa^3}{2l} + c_3$$

$$x = a \quad y_1 = y_2$$

$$\frac{Pa^3}{6} - \frac{Pa^4}{6l} + c_1a + c_2 = \frac{Pa^3}{2} - \frac{Pa^4}{6l} + c_3a + c_4$$

$$x = l \quad y_2 = 0$$

$$0 = -\frac{Ml^3}{6l} + \frac{Ml^2}{2} + c_3l + c_4$$

De donde

$$c_1 = P\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6l} - \frac{al}{3}\right)$$

$$c_3 = -P\left(\frac{a^3}{6l} + \frac{al}{3}\right)$$

$$c_4 = \frac{Pa^3}{6}$$

y

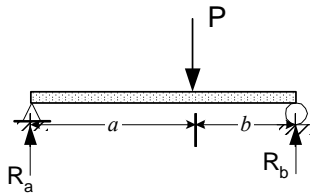
$$EIy_a = \frac{P}{6l}(lx^3 - x^3a + 3a^2lx - a^3x - 2al^2x)$$

$$EIy_b = \frac{P}{6l}(3ax^2l - x^3a - a^3xl - 2al^2x + a^3l)$$

$$EI\theta_a = \frac{P}{6l}(3lx^2 - 3x^2a + 3a^2l - a^3 - 2al^2)$$

$$EI\theta_b = \frac{P}{6l}(6axl - 3x^2a - a^3l - 2al^2)$$

7.15. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución :

De 5.16

$$M_1 = -Mx/l$$

$$M_2 = -Mx/l + M$$

Integrando

$$EIy_1' = -\frac{Mx^2}{2l} + c_1$$

$$EIy_1 = -\frac{Mx^3}{6l} + c_1x + c_2$$

$$EIy'_2 = -\frac{Mx^2}{2l} + Mx + c_3$$

$$EIy_2 = -\frac{Mx^3}{6l} + \frac{Mx^2}{2} + c_3x + c_4$$

Condiciones de Borde

$$x = 0 \quad y_1 = 0 \quad 0 = c_2$$

$$x = a \quad y_1' = y_2' \quad -\frac{Ma^2}{2l} + c_1 = -\frac{Ma^2}{2l} + Ma + c_3$$

$$x = a \quad y_1 = y_2 \quad -\frac{Ma^3}{6l} + c_1a + c_2 = -\frac{Ma^3}{6l} + \frac{Ma^2}{2} + c_3a + c_4$$

$$x = l \quad y_2 = 0 \quad 0 = -\frac{Ml^3}{6l} + \frac{Ml^2}{2} + c_3l + c_4$$

$$\text{De donde} \quad c_1 = M\left(a - \frac{a^2}{2l} - \frac{l}{3}\right)$$

$$c_3 = -M\left(\frac{a^2}{2l} + \frac{l}{3}\right)$$

$$c_4 = \frac{Ma^2}{2}$$

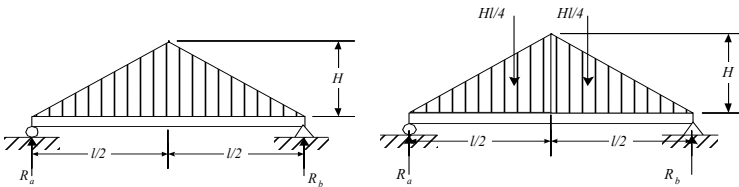
$$y \quad EIy_a = \frac{M}{6l}(-x^3 + 6axl - 3a^2x - 2l^2x)$$

$$EIy_b = \frac{M}{6l}(-x^3 + 3x^2l - 3a^2x - 2l^2x + 3a^2l)$$

$$EI\theta_a = \frac{M}{6}(-3x^2 + 6al - 3a^2 - 2l^2)$$

$$EI\theta_b = \frac{M}{6}(-3x^2 + 6xl - 3a^2 - 2l^2)$$

7.15. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución :

De 5.17

$$Q_1(x) = -Hx^2/l + Hl/4$$

$$M_1(x) = -Hx^3/(3l) + Hlx/4$$

Integrando

$$EI y_1' = -Hx^4/(12l) + Hlx^2/8 + c_1$$



$$EI y_1 = -Hx^5/(60l) + Hlx^3/24 + c_1x + c_2$$

Condiciones de Borde

$$x = 0 \quad y_1 = 0 \quad c_2 = 0$$

$$x = l/2 \quad y_1' = 0 \quad 0 = -H(l/2)^4/(12l) + (Hl/8)(l/2)^2 + c_3$$

$$c_3 = -5Hl^3/192$$

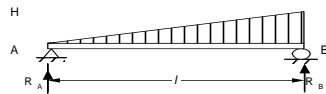
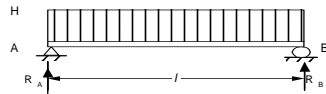
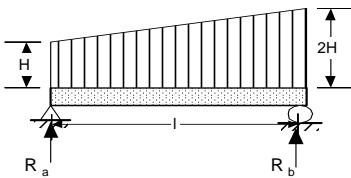
$$EIy' = H \left( -\frac{x^4}{12l} + \frac{lx^2}{8} - \frac{5l^3}{192} \right)$$

$$EIy = H \left( -\frac{x^5}{60l} + \frac{lx^3}{24} - \frac{5l^3x}{192} \right) = \frac{H}{960l} (-16x^5 + 40l^2x^3 - 25xl^4)$$

Estas ecuaciones sólo son validas cuando  $0 < x < l/2$

### b) Método de Superposición

7.16. Hallar por superposición la ecuación de la deformación del sistema de la figura



**Solución :**

De las tablas

$$EIy_1 = \frac{Hx}{24} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$$

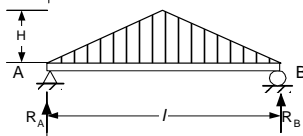
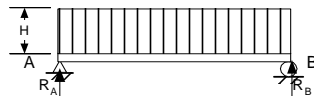
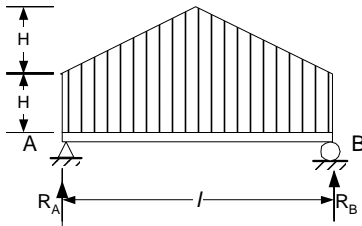
Para 1

$$EIy_2 = \frac{Hx}{360l} (7l^4 - 10l^2x^2 + 3x^4)$$

Para 2

$$EIy_{Total} = \frac{Hx}{360} \left( 22l^3 - 40lx^2 + \frac{3x^4}{l} + 15x^3 \right)$$

7.17. Hallar por superposición la ecuación de la deformación del sistema de la figura



Solución :

$$EIy_1 = \frac{Hx}{24}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$$

Para 1

$$EIy_2 = \frac{Hx}{960l}(25l^4 - 40l^2x^2 + 16x^4)$$

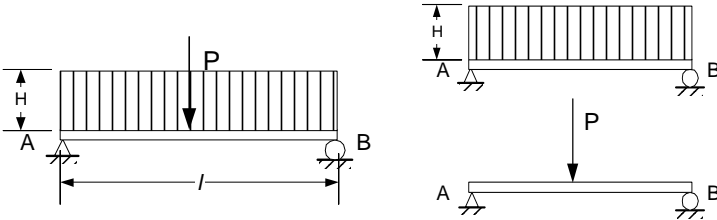
Para 2

$$EIy_{tot} = \frac{Hx}{24}(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{Hx}{960l}(25l^4 - 40l^2x^2 + 16x^4)$$

Entonces

Esta ec es valida solo en la mitad izquierda

7.18. Hallar por superposición la ecuación de la deformación del sistema de la figura



Solución : De tablas

$$EIy_1 = \frac{H}{24}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$$

Para 1

Para 2 de 7.15 con  $a = b = l/2$

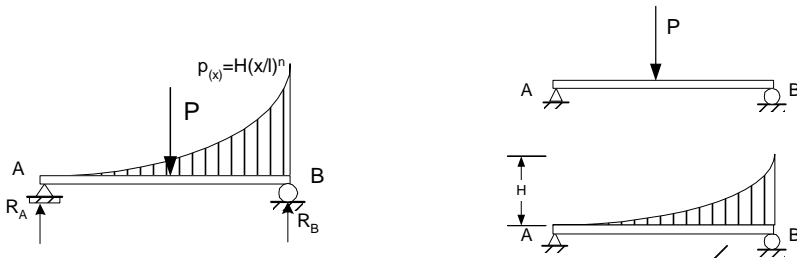
$$EIy_2 = \frac{Px}{48}(3l^2 - 4x^2)$$

$$EIy_{tot} = \frac{Hx}{24}(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{Px}{48}(3l^2 - 4x^2)$$

Entonces

Ecuación valida solo en la mitad izquierda

7.19. Hallar por superposición la ecuación de la deformación del sistema de la figura



Solución :

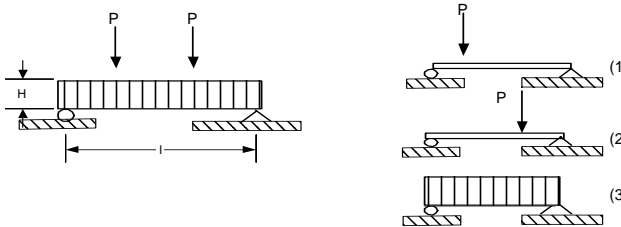
Para 1 
$$EIy_1 = \frac{Px}{48}(3l^2 - 4x^2)$$

Para 2 
$$EIy_2 = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} - \frac{l^3x}{6} + \frac{l^3x}{(n+4)(n+3)} \right)$$

$$EIy_{Tot} = \frac{H}{(n+2)(n+1)} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} - \frac{l^3x}{6} + \frac{l^3x}{(n+4)(n+3)} \right) + \frac{Px}{48}(3l^2 - 4x^2)$$

Ecuación valida solo en la mitad izquierda

7.20. Hallar por superposición la deformación máxima del sistema de la figura



Solución :

Por la simetría, la deformación máxima se encuentra en  $l/2$

La deformación en  $l/2$  producida por la carga 2 se obtiene de

$$EIy_a = \frac{Pbx}{6l} (l^2 - x^2 - b^2)$$

con  $x = l/2$ ;  $a = 2l/3$  y  $b = l/3$

$$EIy_2 = \frac{P(\frac{l}{3})(\frac{l}{2})}{6l} \left( l^2 - \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{9} \right) = \frac{23Pl^3}{1296}$$

Por la simetría la deformación en  $l/2$  producida por la carga 1 es la misma

$$EIy_1 = \frac{23Pl^3}{1296}$$

La deformación en  $l/2$  producida por la carga 3 se obtiene de

$$EIy_3 = \frac{Hx}{24} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$$

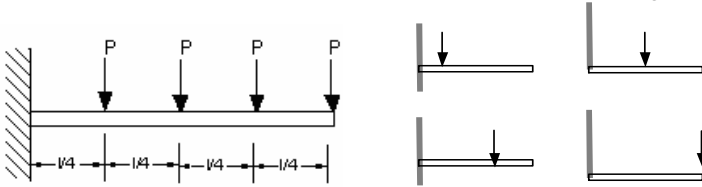
con  $x = l/2$

$$EIy_3 = \frac{H(\frac{l}{2})}{24} \left( l^3 - 2l \frac{l^2}{4} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{5Hl^4}{384}$$

Finalmente

$$EI\delta_{\max} = \frac{2(23)Pl^3}{1296} + \frac{5Hl^4}{384}$$

7.21. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :

$$\delta_1 = \frac{P(l/4)^3}{3EI} + \frac{P(l/4)^2}{2EI} (3l/4)$$

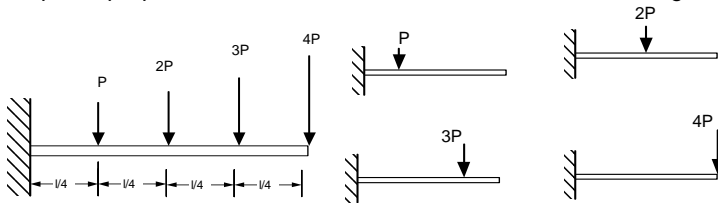
$$\delta_2 = \frac{(P)(l/2)^3}{3EI} + \frac{(P)(l/2)^2}{2EI} (l/2)$$

$$\delta_3 = \frac{(P)(3l/4)^3}{3EI} + \frac{(P)(3l/4)^2}{2EI} (l/4)$$

$$\delta_4 = \frac{(P)(l)^3}{3EI}$$

$$\delta_{\text{tot}} = \frac{Pl^3}{EI} \left[ \frac{1}{(64)3} + \frac{3}{(64)2} + \frac{1}{(8)3} + \frac{1}{(8)2} + \frac{3^3}{(64)3} + \frac{3^2}{(64)2} + \frac{1}{3} \right] = \frac{65Pl^3}{96EI}$$

7.22. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :

$$\delta_1 = \frac{P(l/4)^3}{3EI} + \frac{P(l/4)^2}{2EI} (3l/4)$$

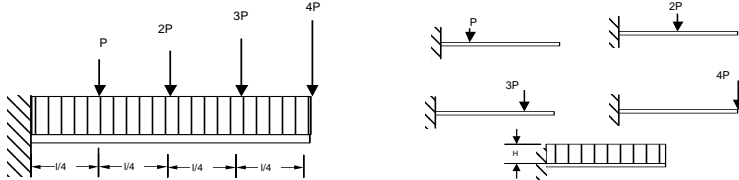
$$\delta_2 = \frac{(2P)(l/2)^3}{3EI} + \frac{(2P)(l/2)^2}{2EI} (l/2)$$

$$\delta_3 = \frac{(3P)(3l/4)^3}{3EI} + \frac{(3P)(3l/4)^2}{2EI} (l/4)$$

$$\delta_4 = \frac{(4P)(l)^3}{3EI}$$

$$\delta_{tot} = \frac{Pl^3}{EI} \left[ \frac{1}{(64)3} + \frac{3}{(64)2} + \frac{2}{(8)3} + \frac{2}{(8)2} + \frac{3^4}{(64)3} + \frac{3^3}{(64)2} + \frac{4}{3} \right] = \frac{141Pl^3}{64EI}$$

7.23. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :

$$\delta_1 = \frac{P(l/4)^3}{3EI} + \frac{P(l/4)^2}{2EI} (3l/4)$$

$$\delta_2 = \frac{(2P)(l/2)^3}{3EI} + \frac{(2P)(l/2)^2}{2EI} (l/2)$$

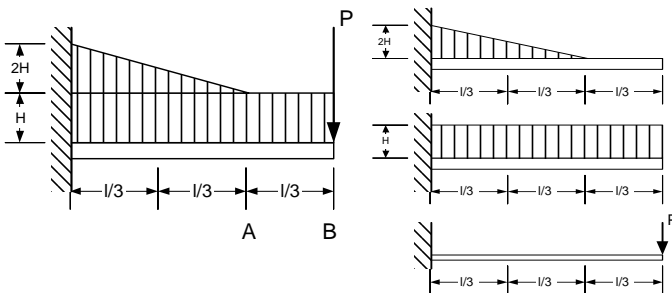
$$\delta_3 = \frac{(3P)(3l/4)^3}{3EI} + \frac{(3P)(3l/4)^2}{2EI} (l/4)$$

$$\delta_4 = \frac{(4P)(l)^3}{3EI}$$

$$\delta_5 = \frac{(H)(l)^4}{8EI}$$

$$\delta_{tot} = \frac{l^3}{64EI} (108P + 8Hl)$$

7.24. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



Solución :

$$EI\delta_{1,A} = \frac{(2H)(2l/3)^4}{30} = \frac{16Hl^4}{1215}$$

Para 1

Para 2  
con  $x=2l/3$

$$EIy = \frac{Hx^2}{24} (4lx - x^2 - 6l^2)$$

$$EI\delta_{2,A} = \frac{(H)(2l/3)^2}{24} \left[ 4l\left(\frac{2l}{3}\right) - \left(\frac{2l}{3}\right)^2 - 6l^2 \right] = \frac{17HI^4}{243}$$

Para 3

$$EIy = \frac{Px^2}{6} (x - 3l)$$

Con  $x=2l/3$

$$EI\delta_{3,A} = \frac{P(2l/3)^2}{6} \left[ \frac{2l}{3} - 3l \right] = \frac{7Pl^3}{162}$$

$$EI\delta_{totA} = \frac{16HI^4}{1215} + \frac{17HI^4}{243} + \frac{14Pl^3}{81}$$

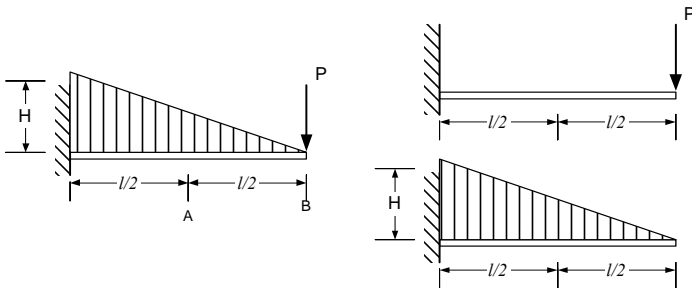
$$EI\delta_{1,B} = \frac{(2H)(2l/3)^3}{30} + \frac{(2H)(2l/3)^3}{24} \left( \frac{l}{3} \right) = \frac{26HI^4}{1215}$$

$$EI\delta_{2,B} = \frac{(H)(l)^4}{8}$$

$$EI\delta_{3,B} = \frac{P(l)^3}{3}$$

$$EI\delta_{totB} = \frac{26HI^4}{1215} + \frac{HI^4}{8} + \frac{Pl^3}{3}$$

7.25. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



Solución :

Para 1

$$EIy = \frac{Px^2}{6} (x - 3l)$$

Con  $x=l/2$

$$EI\delta_{1,A} = \frac{P(l/2)^2}{6} \left[ \frac{l}{2} - 3l \right] = \frac{5Pl^3}{48}$$

Para 2

$$EIy = \frac{Hx^2}{120l} (x^3 - 5lx^2 + 10l^2x - 10l^3)$$

Con  $x=l/2$

$$EI\delta_{2,A} = \frac{H(l/2)^2}{120l} \left[ \left(\frac{l}{2}\right)^3 - 5l\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 10l^2\left(\frac{l}{2}\right) - 10l^3 \right] = \frac{49HI^4}{3840}$$

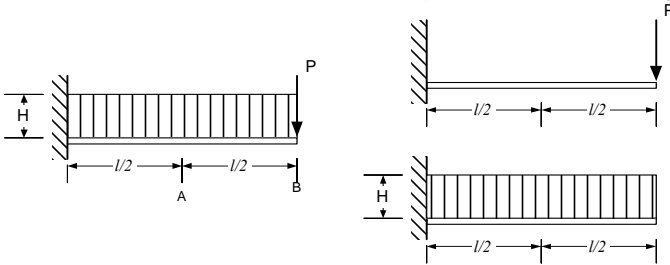
$$EI\delta_{totA} = \frac{5Pl^3}{48} + \frac{49HI^4}{3840}$$

$$EI\delta_{1B} = \frac{Pl^3}{3}$$

$$EI\delta_{2B} = \frac{HI^4}{30}$$

$$EI\delta_{totB} = \frac{Pl^3}{3} + \frac{HI^4}{30}$$

7.26. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



Solución :

Para 1

$$EIy = \frac{Px^2}{6} (x - 3l)$$

Con  $x=l/2$

$$EI\delta_{1,A} = \frac{P(l/2)^2}{6} \left[ \frac{l}{2} - 3l \right] = \frac{5Pl^3}{48}$$

Para 2

$$EIy = \frac{Hx^2}{24} (4lx - x^2 - 6l^2)$$

Con  $x=l/2$

$$EI\delta_{2,A} = \frac{H(l/2)^2}{24} \left[ 4l\left(\frac{l}{2}\right) - \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 6l^2 \right] = \frac{17HI^4}{384}$$

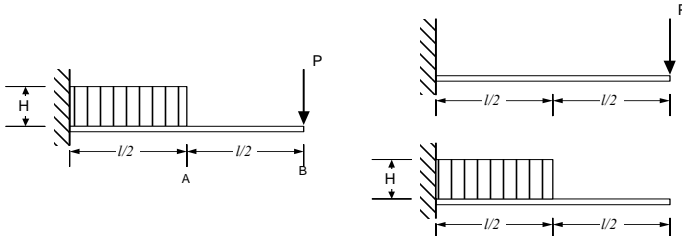
$$EI\delta_{totA} = \frac{5Pl^3}{48} + \frac{17HI^4}{384}$$

$$EI\delta_{1B} = \frac{Pl^3}{3}$$

$$EI\delta_{2B} = \frac{HI^4}{8EI}$$

$$EI\delta_{totB} = \frac{Pl^3}{3} + \frac{Hl^4}{8}$$

7.27. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



Solución :

$$EIy = \frac{Px^2}{6}(x-3l)$$

Para 1

$$EI\delta_{1A} = \frac{P(l/2)^2}{6} \left[ \frac{l}{2} - 3l \right] = \frac{5Pl^3}{48}$$

Con  $x=l/2$

$$EI\delta_{2A} = -\frac{H\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8}$$

Para 2

$$EI\delta_{totA} = \frac{5Pl^3}{48} + \frac{Hl^4}{128}$$

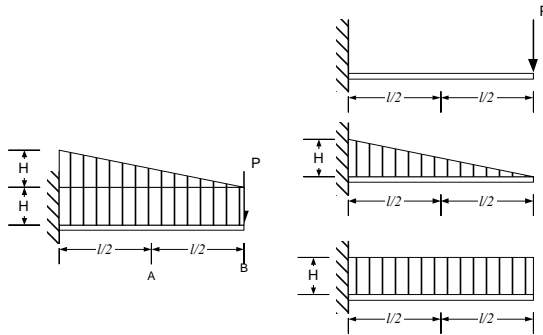
$$EI\delta_{1B} = \frac{Pl^3}{3}$$

$$EI\delta_{2B} = -\frac{H\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8} + \frac{H\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{7Hl^4}{384}$$

$$EI\delta_{totB} = \frac{Pl^3}{3} + \frac{7Hl^4}{384}$$

7.28. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura





Solución :

$$EIy = \frac{Px^2}{6}(x-3l)$$

Para 1

$$EI\delta_{1,A} = \frac{P(l/2)^2}{6} \left[ \frac{l}{2} - 3l \right] = \frac{5Pl^3}{48}$$

Con  $x=l/2$

$$EIy = \frac{Hx^2}{120l} (x^3 - 5lx^2 + 10l^2x - 10l^3)$$

Para 2

$$EI\delta_{2,A} = \frac{H(l/2)^2}{120l} \left[ \left( \frac{l}{2} \right)^3 - 5l \left( \frac{l}{2} \right)^2 + 10l^2 \left( \frac{l}{2} \right) - 10l^3 \right] = \frac{49Hl^4}{3840}$$

Con  $x=l/2$

$$EIy = \frac{Hx^2}{24} (4lx - x^2 - 6l^2)$$

Para 3

$$EI\delta_{3,A} = \frac{H(l/2)^2}{24} \left[ 4l \left( \frac{l}{2} \right) - \left( \frac{l}{2} \right)^2 - 6l^2 \right] = \frac{17Hl^4}{384}$$

Con  $x=l/2$

$$EI\delta_{totA} = \frac{5Pl^3}{48} + \frac{49Hl^4}{3840} + \frac{17Hl^4}{384}$$

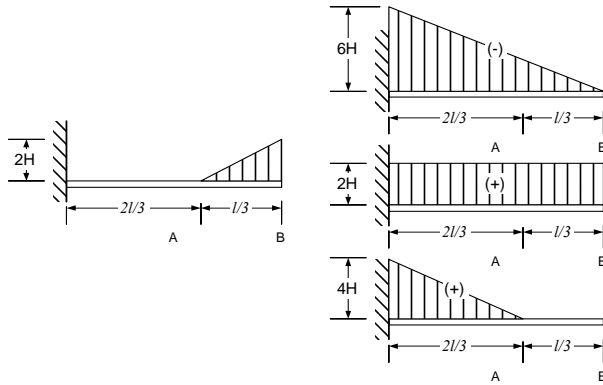
$$EI\delta_{1B} = \frac{Pl^3}{3}$$

$$EI\delta_{2B} = \frac{Hl^4}{30}$$

$$EI\delta_{3B} = \frac{Hl^4}{8}$$

$$EI\delta_{totA} = \frac{Pl^3}{3} + \frac{Hl^4}{30} + \frac{Hl^4}{8}$$

7.29. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



Solución :

Para 1

$$EIy = \frac{Hx^2}{120l} (x^3 - 5lx^2 + 10l^2x - 10l^3)$$

Con  $x=l/2$

$$EI\delta_{1,A} = \frac{-6H(2l/3)^2}{120lEI} \left[ \left(\frac{2l}{3}\right)^3 - 5l\left(\frac{2l}{3}\right)^2 + 10l^2\left(\frac{2l}{3}\right) - 10l^3 \right] = -\frac{142HI^4}{1215}$$

Para 2

$$EIy = \frac{Hx^2}{24} (4lx - x^2 - 6l^2)$$

Con  $x=l/2$

$$EI\delta_{2,A} = \frac{2H}{24} \left(\frac{2l}{3}\right)^2 \left[ -\left(\frac{2l}{3}\right)^2 + 4l\left(\frac{2l}{3}\right) - 6l^2 \right] = \frac{34HI^4}{243}$$

Para 3

$$EI\delta_{3,A} = \frac{4H\left(\frac{2l}{3}\right)^4}{30} = \frac{32HI^4}{1215}$$

$$EI\delta_{totA} = \frac{-142HI^4}{1215} + \frac{34HI^4}{243} + \frac{32HI^4}{1215}$$

$$EI\delta_{1B} = -\frac{(6H)(l)^4}{30}$$

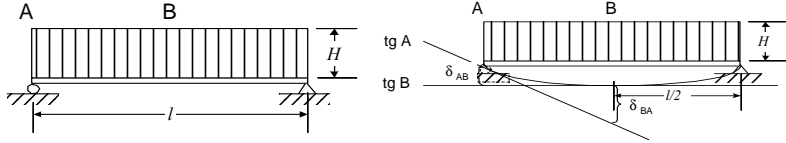
$$EI\delta_{2B} = \frac{(2H)(l)^4}{8}$$

$$EI\delta_{3B} = \frac{(4H)(2l/3)^4}{30} + \frac{(4H)(2l/3)^3}{24} (l/3) = \frac{52HI^4}{1215}$$

$$EI\delta_{totB} = \frac{-6HI^4}{30} + \frac{HI^4}{4} + \frac{52HI^4}{1215}$$

**c) Método del Área del diagrama de Momentos**

7.30. Hallar por el método del área del diagrama de momentos la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :

De 5.5 con  $n = 0$

$$M = \frac{H}{2}(lx - x^2)$$

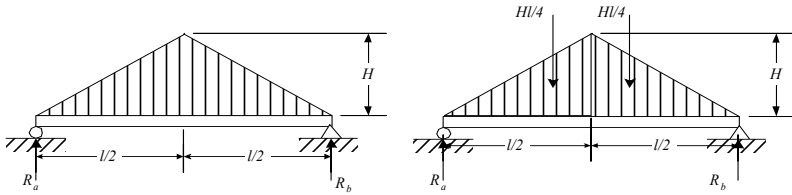
$$\delta_{AB} = \delta_{\max} = \int_0^{l/2} \frac{H}{2EI}(lx - x^2)xdx$$

$$\delta_{AB} = \delta_{\max} = \frac{5Hl^4}{384EI}$$

$$\theta_{AB} = \theta_{\max} = \int_0^{l/2} \frac{H}{2EI}(lx - x^2)dx$$

$$\theta_{AB} = \frac{Hl^3}{24EI}$$

7.31. Hallar por el método del área del diagrama de momentos la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :

De 5.17

$$Q_1(x) = -Hx^2/l + Hl/4$$

$$M_1(x) = -Hx^3/(3l) + Hlx/4$$

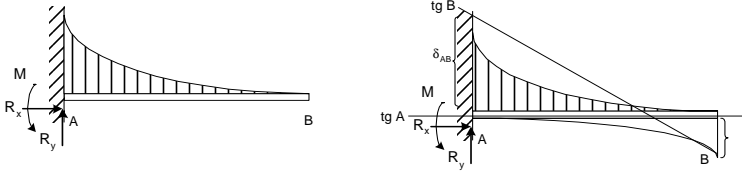
$$EI\delta_{AB} = \delta_{\max} = \int_0^{l/2} H\left(-\frac{x^3}{3l} + \frac{lx}{4}\right)xdx = H\left(-\frac{x^5}{15l} + \frac{lx^3}{12}\right)_{0}^{l/2}$$

$$EI\delta_{AB} = \delta_{\max} = \frac{Hl^4}{120}$$

$$EI\theta_{AB} = \theta_{\max} = \int_0^{l/2} H\left(-\frac{x^3}{3l} + \frac{lx}{4}\right) dx = H\left(-\frac{x^4}{12l} + \frac{lx^2}{8}\right)_0^{l/2}$$

$$EI\theta_{AB} = \theta_{\max} = \frac{5Hl^3}{192}$$

7.32. Hallar por el método del área del diagrama de momentos la deformada máxima del sistema de la figura.  $p = H(1 - x/l)^n$



Solución:

$$M = -\frac{H(l-x)^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)}$$

De 5.12

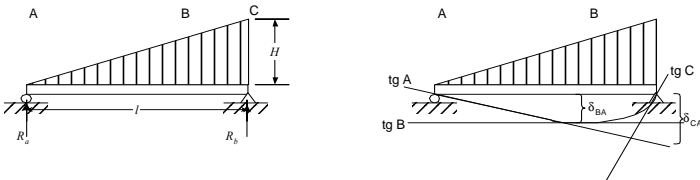
$$EI\delta_{BA} = \delta_{\max} = \int_0^l \frac{H(l-x)^{n+2}}{l^n(n+2)(n+1)}(l-x) dx = \frac{-H(l-x)^{n+4}}{l^n(n+4)(n+2)(n+1)}_0^l$$

$$EI\delta_{BA} = \delta_{\max} = \frac{Hl^4}{(n+4)(n+2)(n+1)}$$

$$EI\theta_{AB} = \theta_{\max} = \int_0^l \frac{H(l-x)^{n+2}}{l^n(n+2)(n+1)} dx = \frac{-H(l-x)^{n+3}}{l^n(n+3)(n+2)(n+1)}_0^l$$

$$EI\theta_{AB} = \theta_{\max} = \frac{Hl^3}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

7.33. Hallar por el método del área del diagrama de momentos la deformada máxima del sistema de la figura



Solución:

De 5.3

$$M = \frac{Hlx}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) = \frac{H}{6} \left(lx - \frac{x^3}{l}\right)$$

$$EI\delta_{AC} = \int_0^l \frac{H}{6} \left(lx - \frac{x^3}{l}\right) (l-x) dx$$

$$EI\delta_{AC} = \frac{H}{6} \left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} - \frac{lx^4}{4l} + \frac{x^5}{5l}\right) = \frac{Hl^4}{6(60)} (30 - 20 - 15 + 12) = \frac{7Hl^4}{360}$$

Trigonometría  $Tg \theta_{AB} = \delta_{AC}/l$

$$\theta_{AB} = \frac{7Hl^3}{360EI}$$

Además

$$EI\theta_{AB} = \int_0^{x_b} \frac{H}{6} \left(lx - \frac{x^3}{l}\right) dx = \frac{H}{6} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^4}{4l}\right) = \frac{H}{6} \left(\frac{lx_b^2}{2} - \frac{x_b^4}{4l}\right)$$

Igualando

$$EI\theta_{AB} = \frac{7Hl^3}{360} = \frac{H}{6} \left(\frac{lx_b^2}{2} - \frac{x_b^4}{4l}\right)$$

$$15x_b^4 - 30lx_b^2 + 7l^3 = 0$$

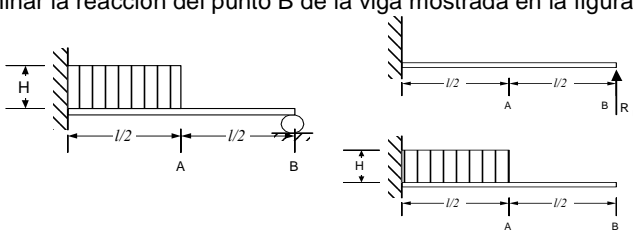
De donde

$$x_b = 0,519l$$

$$EI\delta_{\max} = \int_0^{0,519l} \frac{H}{6} \left(lx - \frac{x^3}{l}\right) x dx = \frac{2,5Hl^4}{384}$$

#### d) Sistemas Hiperestáticos

7.34. Determinar la reacción del punto B de la viga mostrada en la figura.



Solución:

$$\delta_{1B} = R_b \frac{l^3}{3EI}$$

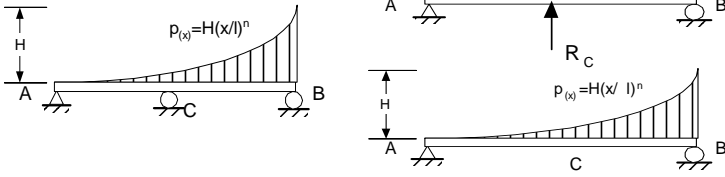
$$\delta_{2B} = -\frac{7H(l)^4}{384EI}$$

$$\delta_B = \delta_{1B} + \delta_{2B} = 0$$

$$R_B = -\frac{7Hl}{128}$$

de donde:

7.35. Determinar la reacción en el punto medio de la viga mostrada de la figura



Solución:

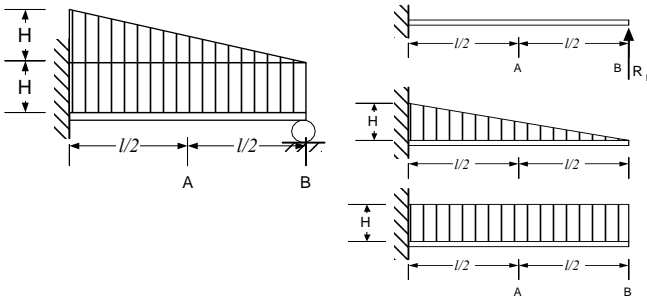
$$\delta_{B1} = -\frac{R_c l^3}{48EI}$$

$$\delta_{B2} = \frac{H}{EI(n+2)(n+1)} \left( \frac{l^4}{48} - \frac{l^4}{(n+4)(n+3)2^{n+4}} - \frac{l^4}{12} + \frac{l^4}{(n+4)(n+3)} \right)$$

$$\delta_B = \delta_{B1} + \delta_{B2} = 0$$

$$R_c = -3 \cdot l \cdot H \cdot \frac{[n^2 + 7 \cdot n + 16 \cdot (n+3)^{-(n-4)} \cdot n + 48 \cdot (n+3)^{-(n-4)} - 4]}{[(n+3) \cdot (n^3 + 7 \cdot n^2 + 14 \cdot n + 8)]}$$

7.36. Determinar la expresión para hallar la reacción en el punto B de la viga mostrada en la figura



Solución:

$$\delta_{1B} = -R_b \frac{l^3}{3EI}$$

$$\delta_{2B} = \frac{(H)(l)^4}{30EI}$$

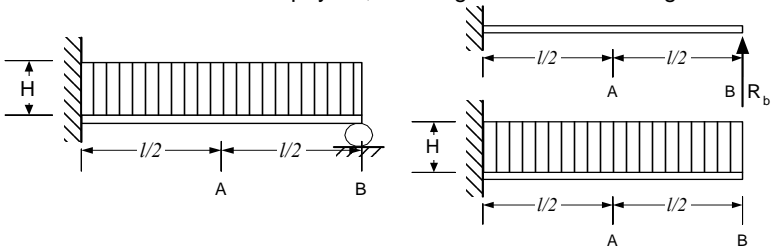
$$\delta_{3B} = \frac{(H)(l)^4}{8EI}$$

$$\delta_B = \delta_{1B} + \delta_{2B} + \delta_{3B} = 0$$

$$R_B = \frac{19Hl}{40}$$

de donde:

7.37. Determinar la reacción del apoyo B, de la viga mostrada en la figura.



Solución :

$$\delta_{1B} = -\frac{R_B l^3}{3EI}$$

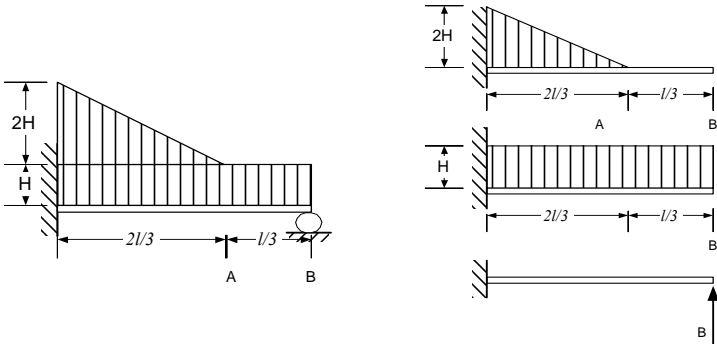
$$\delta_{2B} = \frac{(H)(l)^4}{8EI}$$

$$\delta_B = \delta_{1B} + \delta_{2B} = 0$$

$$R_B = \frac{3Hl}{8}$$

de donde:

7.38. Determinar la expresión para hallar la fuerza de reacción que ocurre en el punto B



Solución :

$$\delta_{1B} = \frac{(2H)(2l/3)^4}{30EI} + \frac{(2H)(2l/3)^3}{24EI} (l/3)$$

$$\delta_{2B} = \frac{(H)(l)^4}{8EI}$$

$$\delta_{3B} = -\frac{R_b(l)^3}{3EI}$$

por superposición

$$\delta_B = \delta_{1B} + \delta_{2B} + \delta_{3B} = 0$$

$$R_B = \frac{1343HI}{3240} + \frac{8HI}{27(12)}$$

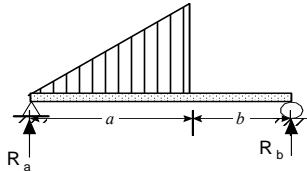
de donde:



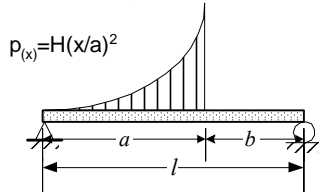
## PROBLEMAS PROPUESTOS

a) Método de la doble integración

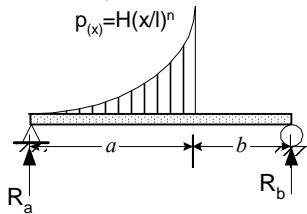
7.39. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura  
 $p(x) = H(x/l)$



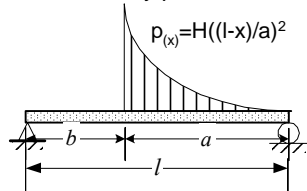
7.40. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura



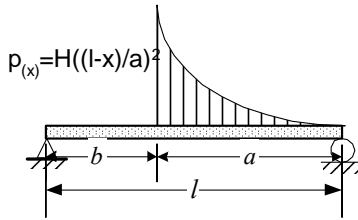
7.41. Hallar la posición de la deformación máxima, y la expresión para determinar esta, para el sistema mostrado en la figura



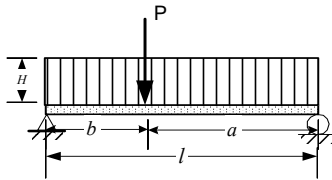
7.42. Hallar las funciones de deformación y pendiente de la figura



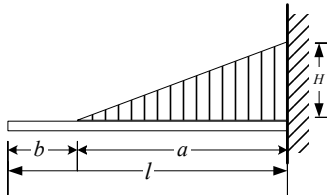
7.43. Hallar la expresión para determinar la deformación máxima y determinar la posición de esta, en el sistema de la figura



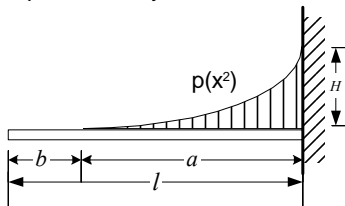
7.44. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en los sistemas de la figura



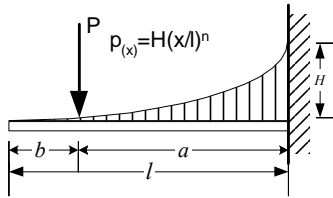
7.45. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura



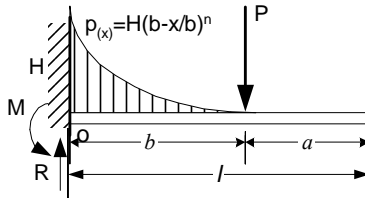
7.46. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura



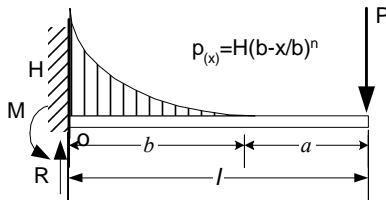
7.47. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura



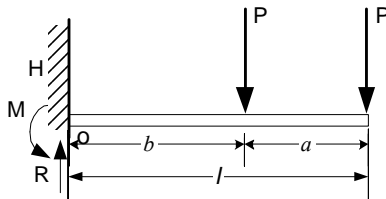
7.48. Hallar la pendiente y deformadas máximas del sistema de la figura



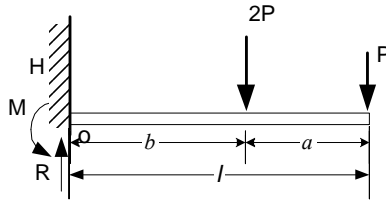
7.49. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura



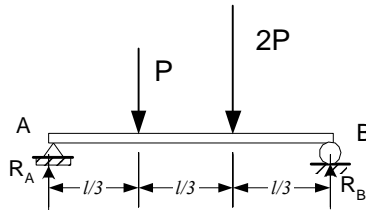
7.50. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en el sistema de la figura usando funciones de singularidad



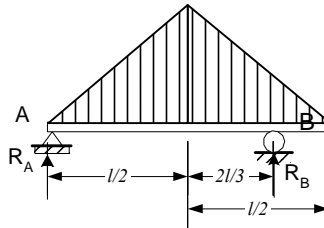
7.51. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en los sistemas de la figura



7.52. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en el sistema de la figura por funciones de singularidad

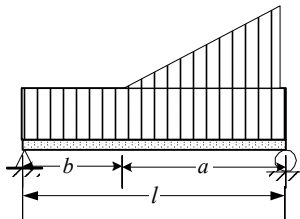


7.53. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en los sistemas de la figura

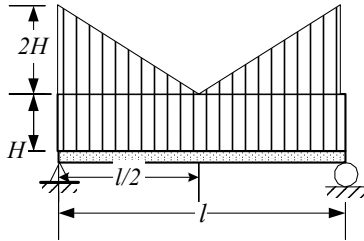


**b) Método de superposición**

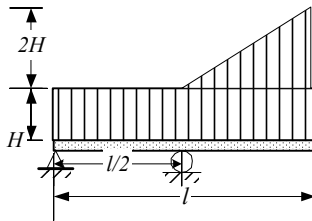
7.54. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura



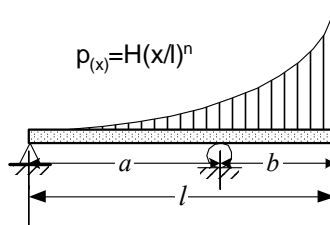
7.55. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura



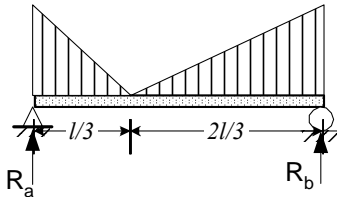
7.56. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura



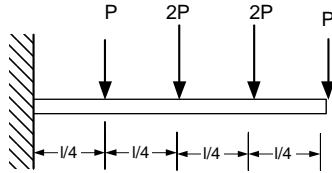
7.57. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura



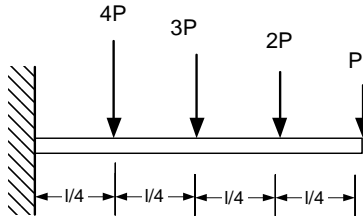
7.58. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura



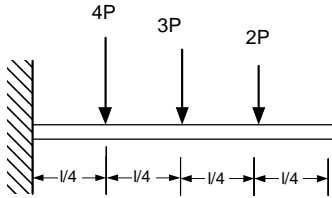
7.59. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura



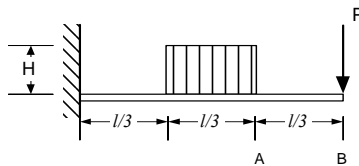
7.60. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura



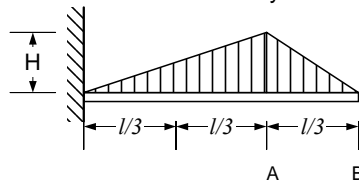
7.61. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura



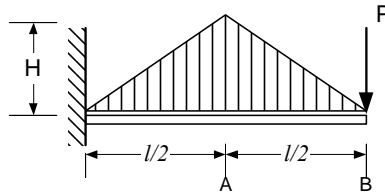
7.62. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



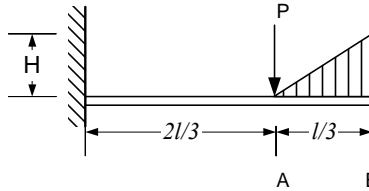
7.63. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



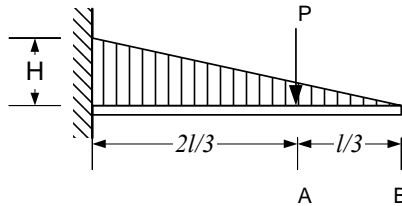
7.64. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



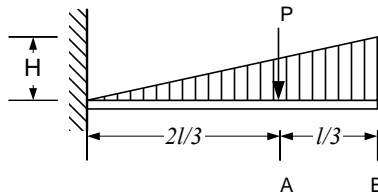
7.65. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



7.66. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura

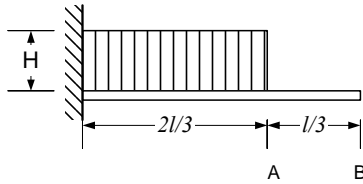


7.67. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura

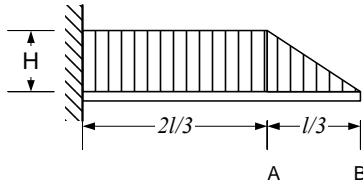


### c) Metodo del Area del Diagrama de Momentos

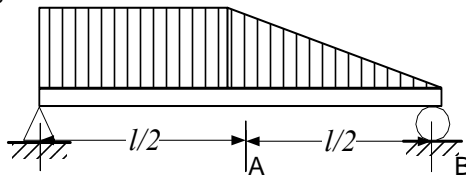
7.68. Hallar por el método de área de momentos la deformación del sistema de la figura, en el punto A y B



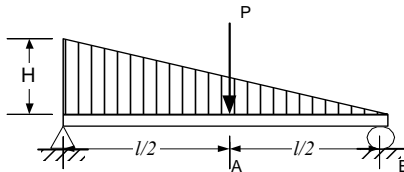
7.69. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en los sistemas de la figura



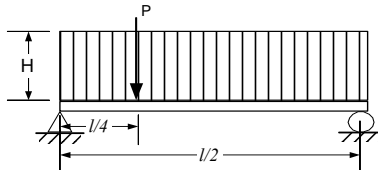
7.70. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura siendo la intensidad de carga máxima H



7.71. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura



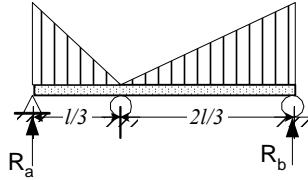
7.72. Mediante el método de diagrama de momentos de terminar el valor de la deformación máxima para la viga mostrada en la figura.



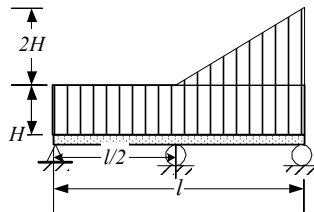


**d) Sistemas Hiperestáticos**

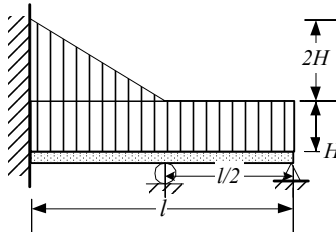
7.73. Determinar las reacciones que ocurren en el punto de apoyo de la viga mostrada en la figura.



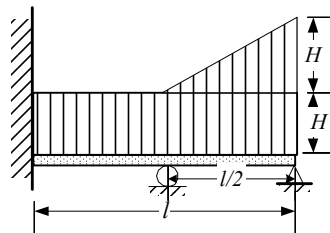
7.74. Determinar la reacción en el punto medio de la viga mostrada de la figura



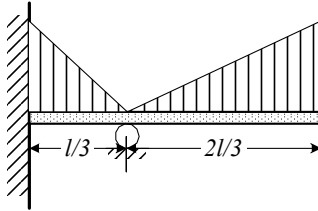
7.75. Determinar la expresión para hallar la reacción en el punto de apoyo de la viga mostrada en la figura



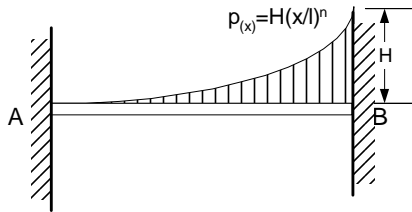
7.76. Determinar la reacción de los puntos de apoyo de la viga mostrada en la figura.



7.77. Determinar la expresión para hallar la fuerza de reacción que ocurre en el punto de apoyo



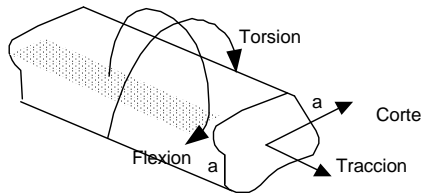
7.78. Determinar las reacciones en los puntos de empotramiento de la viga mostrada en la figura



## **8.- ESFUERZOS COMBINADOS**

### **8.1.- INTRODUCCIÓN**

En los capítulos anteriores se estudiaron individualmente las Cargas de Tracción Compresión, las Cargas de Corte, las Cargas de Torsión y las Cargas de Flexión. En este capítulo se estudiarán la combinación de las anteriores cargas. Se analizarán los esfuerzos y las deformaciones que presentan las piezas sometidas a cargas combinadas.



**Fig. 8.1 Cuerpo sometido a Cargas Combinadas**

Ejemplos de elementos sometidos a cargas y esfuerzos combinados son: Los ejes y árboles de máquinas con movimiento, que soportan cargas de flexión y de torsión; los pernos que en el momento de su ajuste soportan cargas de torsión y de tracción; las cargas de tracción cuando estas no están aplicadas en el centro de gravedad de la sección transversal y los marcos rígidos.

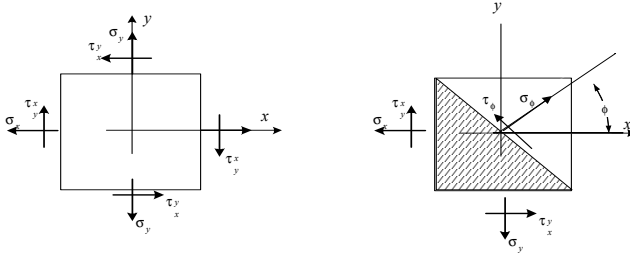
Para la validez de las ecuaciones y resultados de este capítulo se asume la veracidad de las siguientes condiciones :

- 1.- Los elementos son rectos
- 2.- Los elementos tienen secciones transversales uniformes
- 3.- Los materiales son homogéneos
- 4.- En los miembros sometidos a compresión no se produce pandeo.

### **8.2.- COMBINACIÓN DE ESFUERZOS**

En esta sección se hallarán primero los esfuerzos normales y cortantes en cualquier dirección de una pieza sometida a esfuerzos combinados y posteriormente se hallarán los valores máximos de ambos esfuerzos.

Un elemento diferencial sometido a la acción de esfuerzos combinados, presentara en cada una de sus caras simultáneamente esfuerzos normales ( $\sigma$ ) y esfuerzos cortantes ( $\tau$ ). Se vio que la magnitud de todos los esfuerzos cortantes es la misma.



**Fig. 8.2 Combinación de esfuerzos**

Por trigonometría

$$\begin{aligned} l_\rho \cos \rho &= dy \\ l_\rho \sin \rho &= dx \end{aligned} \quad (8.1)$$

De la estática

$$\Sigma F_1 = 0 \quad \sigma_\rho l_\rho dz + (\tau_{xy} \sin \rho - \sigma_x \cos \rho) dy dz + (\tau_{xy} \cos \rho - \sigma_y \sin \rho) dx dz = 0 \quad (8.2)$$

Se 1 y 2

$$\begin{aligned} \sigma_\rho + (\tau_{xy} \sin \rho - \sigma_x \cos \rho) \cos \rho + (\tau_{xy} \cos \rho - \sigma_y \sin \rho) \sin \rho &= 0 \\ \sigma_\rho + 2\tau_{xy} \sin \rho \cos \rho - \sigma_x \cos^2 \rho - \sigma_y \sin^2 \rho &= 0 \\ \sigma_\rho + \tau_{xy} \sin 2\rho - \sigma_x (1 + \cos 2\rho)/2 - \sigma_y (1 - \cos 2\rho)/2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\rho) + \tau_{xy} \sin(2\rho) \quad (8.3)$$

$\Sigma F_2 = 0$

$$\tau_\rho l_\rho dz + (\tau_{xy} \cos \rho + \sigma_x \sin \rho) dy dz + (-\tau_{xy} \sin \rho - \sigma_y \cos \rho) dx dz = 0 \quad (8.4)$$

De 1 y 4

$$\begin{aligned} \tau_\rho + (\tau_{xy} \cos \rho + \sigma_x \sin \rho) \cos \rho + (-\tau_{xy} \sin \rho - \sigma_y \cos \rho) \sin \rho &= 0 \\ \tau_\rho + \tau_{xy} \cos^2 \rho + \sigma_x \sin \rho \cos \rho - \tau_{xy} \sin^2 \rho - \sigma_y \cos \rho \sin \rho &= 0 \\ \tau_\rho + \tau_{xy} (1 + \cos 2\rho)/2 + \sigma_x \sin 2\rho/2 - \tau_{xy} (1 - \cos 2\rho)/2 - \sigma_y \sin 2\rho/2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\tau_\rho = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\rho) + \tau_{xy} \cos(2\rho) \quad (8.5)$$

Algunos casos especiales son:

Para  $\rho = 0$        $\sigma_0 = \sigma_x$

$\tau_0 = \tau_{xy}$

para  $\rho = 90$      $\sigma_{90} = \sigma_y$

$\tau_{90} = -\tau_{xy}$

### 8.3.- CIRCULO DE MOHR

La relación entre los esfuerzos normales y cortantes es la de un círculo conocido como el Círculo de Mohr

De 8.3 
$$\sigma_p - (\sigma_x + \sigma_y)/2 = (\sigma_x - \sigma_y)\text{Cos}(2\rho)/2 + \tau_{xy}\text{Sin} 2\rho \tag{8.6}$$

$$\left(\sigma_\phi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \text{Cos}^2 2\phi + 2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{Cos} 2\phi \tau_{xy} \text{Sin} 2\phi + (\tau_{xy} \text{Sin} 2\phi)^2 \tag{8.7}$$

De 8.5 
$$\tau_p = (\sigma_y - \sigma_x) \text{Sin}(2\rho)/2 - \tau_{xy} \text{Cos}(2\rho)/2 \tag{8.8}$$

$$(\tau_\phi)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \text{Sin}^2 2\phi - 2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{Sin} 2\phi \tau_{xy} \text{Cos} 2\phi + (\tau_{xy} \text{Cos} 2\phi)^2 \tag{8.9}$$

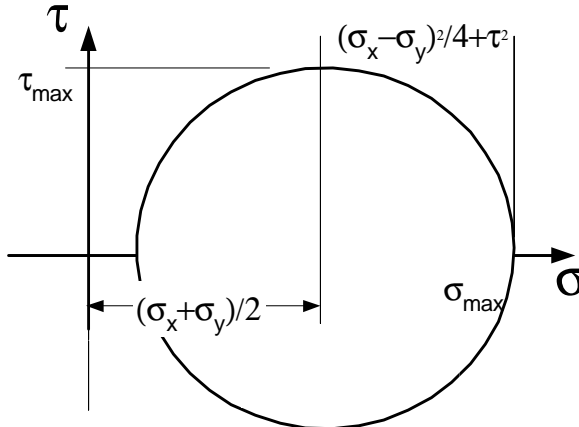
**De 8.7 y 8.9** 
$$\left(\sigma_\phi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\phi^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \tag{8.10}$$

Comparando 10 con la ecuación de una circunferencia

$$(x - x_0)^2 + (y)^2 = R^2 \tag{8.11}$$

se ve que es la misma con los esfuerzos normales como abscisas ( $\sigma$ ) y los esfuerzos cortantes como ordenadas ( $\tau$ ). Este es el Círculo de Mohr y tiene las siguientes características:

- El centro del círculo tiene un desplazamiento en el eje horizontal de  $(\sigma_y + \sigma_x)/2$
- No hay un desplazamiento en el eje vertical
- El radio de la circunferencia es de  $[(\sigma_y + \sigma_x)^2 + \tau_{xy}^2]^{1/2}$ .



**Fig. 8.3 Círculo de Mohr**

#### 8.4.- ESFUERZOS PRINCIPALES

En esta sección se hallaran los valores máximos de los esfuerzos normales y cortantes y las direcciones en la que estos se presentan. Como ya se vio anteriormente los esfuerzos normales máximos se conocen como esfuerzos principales y las direcciones en las que ocurren son las direcciones principales. En estas direcciones principales y en aquellas en las que los esfuerzos cortantes son máximos la falla es la más probable.

Derivando 8.3 con respecto a  $\phi$  e igualando a cero

$$\frac{\partial \sigma_{\phi}}{\partial \phi} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) 2 \sin 2\phi - \tau_{xy} 2 \cos 2\phi = 0 \quad (8.12)$$

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (8.13)$$

De 8.13 y 8.4

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8.14)$$

Ecuación que da los valores de los esfuerzos normales máximos o principales

Derivando 8.5 con respecto a  $\phi$  e igualando a cero

$$\frac{\partial \tau_{\phi}}{\partial \phi} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) 2 \cos 2\phi + \tau_{xy} 2 \sin 2\phi = 0 \quad (8.15)$$

$$\tan 2\phi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (8.16)$$

De 8.11 8.5

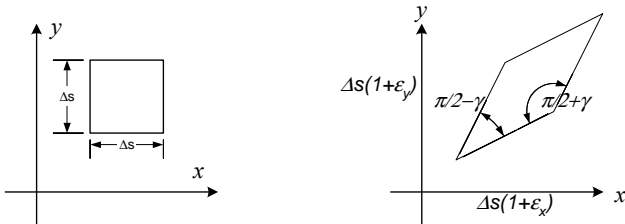
$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8.17)$$

Ecuación que da los valores de los esfuerzos cortantes máximos

además  $\tau_{1,2} = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (8.18)$

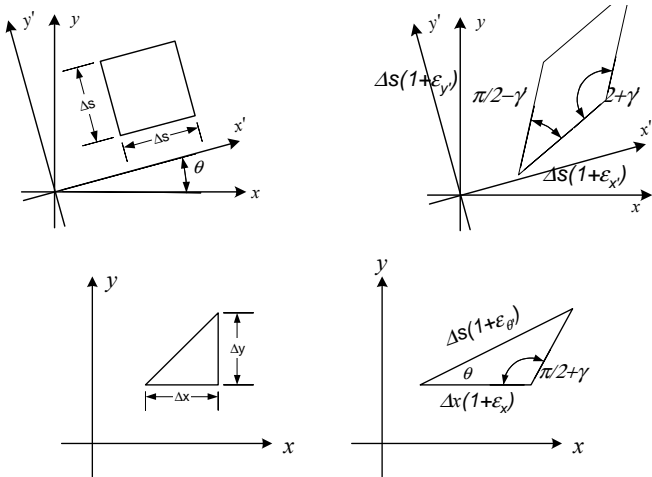
#### 8.5.- COMBINACIÓN DE DEFORMACIONES

En esta sección se estudia la transformación de la deformación plana de una pieza sometida a esfuerzos combinados. En general un elemento diferencial sometido a la acción de esfuerzos combinados tendrá en cada una de sus caras simultáneamente esfuerzos normales ( $\sigma$ ) y esfuerzos cortantes ( $\tau$ ).



**Fig. 8.4 Deformaciones por Esfuerzos Normales**

Los esfuerzos normales producen variación de las dimensiones mientras que los esfuerzos cortantes producen una distorsión cuantificada por el ángulo  $\gamma$ . Para hallar  $\epsilon_{x'}$ ,  $\epsilon_{y'}$  y  $\gamma'$  asociadas al marco  $x'$  y  $y'$  que forman un ángulo  $\theta$  con  $xy$



**Fig. 8.4 Deformaciones por Esfuerzos Cortantes**

Del teorema del coseno

$$[\Delta s(1+\epsilon_\theta)]^2 = [\Delta x(1+\epsilon_x)]^2 + [\Delta y(1+\epsilon_y)]^2 - 2\Delta x(1+\epsilon_x)\Delta y(1+\epsilon_y)\cos(\pi/2+\gamma) \quad (8.19)$$

Pero  $\Delta x = \Delta s \cos \theta$  (8.20)

$\Delta y = \Delta s \sin \theta$  (8.21)

y Como  $\gamma$  es muy pequeño

$$\text{Cos}(\pi/2 + \gamma) = -\text{Sen}(\gamma) = -\gamma \quad (8.22)$$

De 19, 20, 21 y 22

$$\begin{aligned} \Delta s^2(1 + 2\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2) &= \\ = \Delta s^2 \text{Cos}^2\theta(1 + 2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2) + \Delta s^2 \text{Sin}^2\theta(1 + 2\varepsilon_y + \varepsilon_y^2) - 2\Delta s^2 \text{Sin}\theta \text{Cos}\theta(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_y)\gamma & \quad (8.23) \end{aligned}$$

Despreciando términos de segundo orden de las deformaciones ( $\varepsilon$  y  $\gamma$ )

$$(1 + 2\varepsilon_\theta) = \text{Cos}^2\theta(1 + 2\varepsilon_x) + \text{Sin}^2\theta(1 + 2\varepsilon_y) - 2\text{Sin}\theta \text{Cos}\theta(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y)\gamma \quad (8.24)$$

$$2\varepsilon_\theta = \text{Cos}^2\theta 2\varepsilon_x + \text{Sin}^2\theta 2\varepsilon_y - 2\text{Sin}\theta \text{Cos}\theta \gamma \quad (8.25)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \text{Cos}2\theta + \varepsilon_y \text{Sin}2\theta + \gamma \text{Sin}\theta \text{Cos}\theta \quad (8.26)$$

De las expresiones de ángulo doble

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \text{Cos}2\theta + \frac{\gamma}{2} \text{Sin}2\theta \quad (8.27)$$

Reemplazando  $\theta$  por  $\theta + 90$

$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_{\theta+90} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \text{Cos}2\theta - \frac{\gamma}{2} \text{Sin}2\theta \quad (8.28)$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \text{Sin}2\theta + \gamma_{xy} \text{Cos}2\theta \quad (8.29)$$

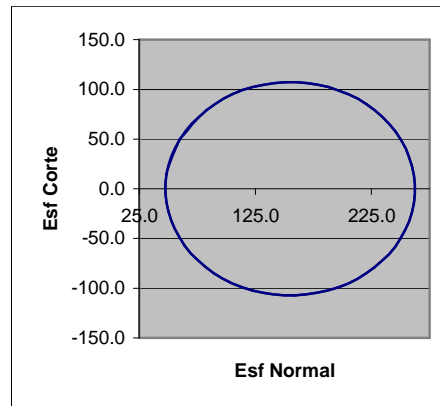


## PROBLEMAS RESUELTOS

8.1. En una pieza se verifican los siguientes esfuerzos :  $\sigma_x = 60 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_y = 250 \text{ kg/cm}^2$  y  $\tau_{xy} = 50 \text{ kg/cm}^2$ . Hallar los esfuerzos en direcciones con ángulos de  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$  con un intervalo de  $10^\circ$ .

**Solución :**

$\phi$ (Gr)	$\phi$ (Rad)	$\sigma_\phi$	$\tau_\phi$
0	0.0	60.0	50.0
10	0.2	82.8	79.5
20	0.3	114.4	99.4
30	0.5	150.8	107.3
40	0.7	187.7	102.2
50	0.9	220.7	84.9
60	1.0	245.8	57.3
70	1.2	259.9	22.8
80	1.4	261.4	-14.5
90	1.6	250.0	-50.0
100	1.7	227.2	-79.5
110	1.9	195.6	-99.4
120	2.1	159.2	-107.3
130	2.3	122.3	-102.2
140	2.4	89.3	-84.9
150	2.6	64.2	-57.3
160	2.8	50.1	-22.8
170	3.0	48.6	14.5
180	3.1	60.0	50.0
190	3.3	82.8	79.5
200	3.5	114.4	99.4
210	3.7	150.8	107.3
220	3.8	187.7	102.2
230	4.0	220.7	84.9
240	4.2	245.8	57.3
250	4.4	259.9	22.8
260	4.5	261.4	-14.5
270	4.7	250.0	-50.0
280	4.9	227.2	-79.5
290	5.1	195.6	-99.4
300	5.2	159.2	-107.3
310	5.4	122.3	-102.2
320	5.6	89.3	-84.9
330	5.8	64.2	-57.3
340	5.9	50.1	-22.8
350	6.1	48.6	14.5
360	6.3	60.0	50.0



8.2. En el problema anterior, hallar los esfuerzos máximos y las direcciones en las que estos ocurren.

Solución :

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(50)}{60 - 250}$$

Para  $\sigma$

$$\phi = -13.87$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{60 + 250}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 250}{2}\right)^2 + 50^2}$$

$$\sigma_1 = 262,35 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 47,64 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tan 2\phi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Para  $\tau$

$$\phi = 31.12$$

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

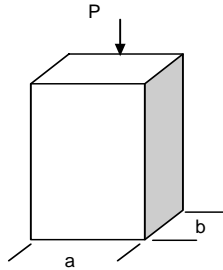
$$\tau_1 = 107,35 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_2 = -107,35 \text{ kg/cm}^2$$

además

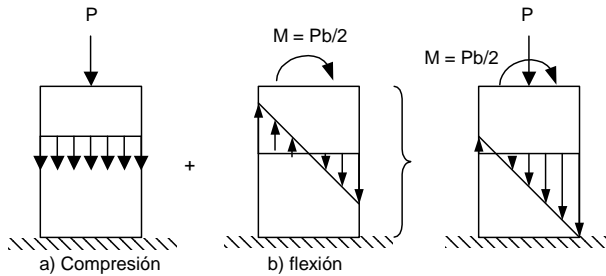
$$\tau_{1,2} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$$

8.3. Hallar las ecuaciones y los valores máximos de los esfuerzos normales que aparecen en una pieza con sección transversal rectangular cuando soporta una carga de compresión en el medio de una de sus aristas.



Solución :

La carga puede reemplazarse por una carga de compresión aplicada en centro de gravedad de la sección y un momento de flexión cuya magnitud es la del producto del valor de la carga por el desplazamiento.



a) Compresión 
$$\sigma_a = -\frac{P}{A} = -\frac{P}{ab}$$

b) Flexión 
$$\sigma_b = \pm \frac{My}{I} = \pm \frac{P(b/2)y}{ab^3/12} = \pm \frac{6Py}{ab^2}$$

Total 
$$\sigma_{tot} = \sigma_a + \sigma_b = -\frac{P}{ab} \pm \frac{6Py}{ab^2}$$

A la izquierda  $y = +b/2$

$$\sigma_{totizq} = \frac{2P}{ab}$$

A la derecha  $y = -b/2$

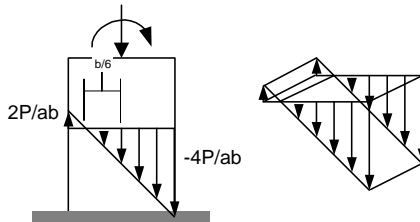
$$\sigma_{totder} = -\frac{4P}{ab}$$

El eje neutro por definición esta donde  $\sigma = 0$

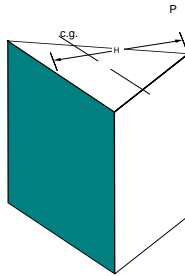
$$\sigma_{tot} = -\frac{P}{ab} \pm \frac{6Py}{ab^2} = 0$$

$$y = + b/6$$

Es decir que el eje neutro se sitúa a  $b/6$  a la izquierda del centro de gravedad

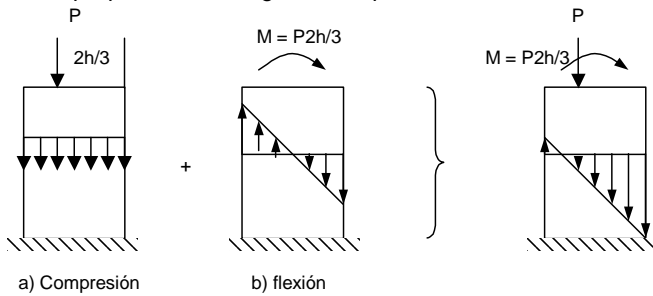


8.4. Hallar las ecuaciones y los valores máximos de los esfuerzos normales que aparecen en una pieza con sección transversal triangular cuando soporta una carga de compresión en uno de sus vértices



Solución :

Nuevamente se superponen una carga de compresión con otra de flexión



a) Compresión

b) flexión

a) Compresión 
$$\sigma_a = -\frac{P}{A} = -\frac{2P}{ab}$$

b) flexión 
$$\sigma_b = \pm \frac{My}{I} = \pm \frac{P(2b/3)y}{ab^3/36} = \pm \frac{24Py}{ab^2}$$

Total 
$$\sigma_{tot} = \sigma_a + \sigma_b = -\frac{2P}{ab} \pm \frac{24Py}{ab^2}$$

A la izquierda  $y = +b/3$

$$\sigma_{totizq} = \frac{6P}{ab}$$

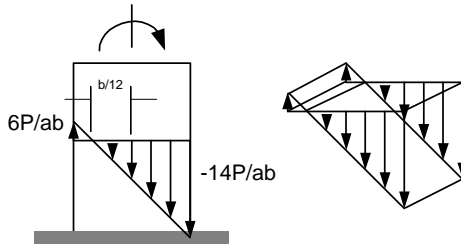
A la derecha  $y = -2b/3$

$$\sigma_{totder} = -\frac{14P}{ab}$$

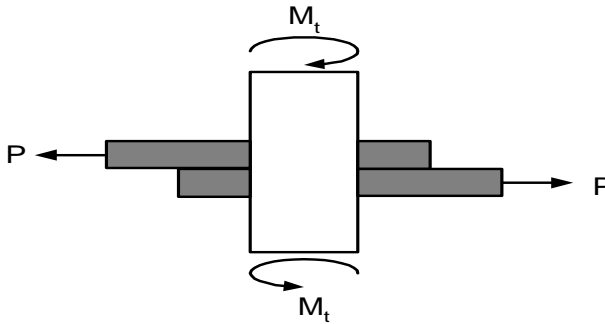
El eje neutro por definición esta donde  $\sigma = 0$

$$\sigma_{tot} = -\frac{2P}{ab} \pm \frac{24Py}{ab^2} = 0$$

$y = + b/12$  Es decir a b/12 a la izquierda del centro

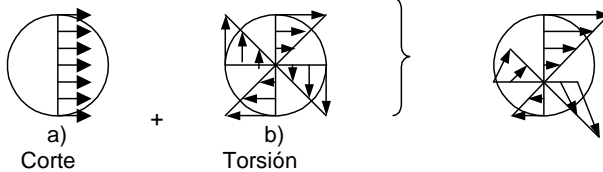


8.5. Una pieza cilíndrica esta sometida a torsión y corte como se ve en la figura. Hallar la combinación de esfuerzos cortantes



Solución :

Las cargas de corte y torsión producen esfuerzos de corte



a) Corte

$$\tau_a = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

b) Torsión

$$\tau_b = \frac{Mr}{I_o} = \frac{M(d/2)}{\pi d^4/32} = \frac{16M}{\pi d^3}$$

Arriba

$$\tau_{total} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16M}{\pi d^3}$$

ambos son paralelos

Abajo 
$$\tau_{totarr} = \frac{4P}{\pi d^2} - \frac{16M}{\pi d^3}$$

ambos son paralelos

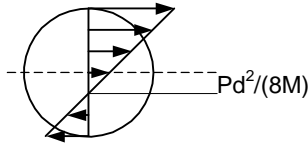
Lados 
$$\tau_{totarr} = \sqrt{\left(\frac{4P}{\pi d^2}\right)^2 - \left(\frac{16M}{\pi d^3}\right)^2}$$

ambos son perpendiculares

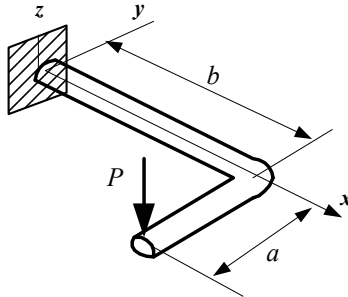
El eje neutro por definición esta donde  $\tau = 0$

$$\tau_{tot} = \frac{4P}{\pi d^2} - \frac{M(r)}{\pi d^4 / 32} = 0$$

$$y = + Pd2/(8M)$$

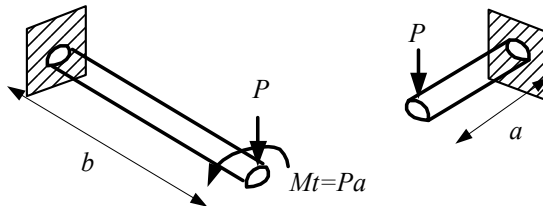


8.6. Una manivela de sección circular y diámetro “d” soporta una carga puntual vertical en su extremo, como se ve en la figura. Hallar los esfuerzos máximos



Solución :

La porción “a” se analiza como una viga empotrada con una carga puntual en su extremo y la porción “b” se analiza como una viga empotrada con una carga puntual y un momento de torsión en su extremo. Entonces la porción “a” esta sometida a flexión mientras que la porción “b” a torsión y flexión



En “a” solo flexión

Flexión

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(Px)(r)}{(\pi d^4 / 64)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{(Pa)(d/2)}{(\pi d^4 / 64)} = \frac{32Pa}{\pi d^3}$$

En "b" flexión y torsión

Flexión

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(Pv)(r)}{(\pi d^4 / 64)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{(Pb)(d/2)}{(\pi d^4 / 64)} = \frac{32Pb}{\pi d^3}$$

Torsión

$$\tau = \frac{M_t r}{I_o} = \frac{(Pa)(r)}{\pi d^4 / 32}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16Pa}{\pi d^3}$$

Los esfuerzos son de diferente tipo por lo que no se los puede sumar sino que debe combinarlos

Tomando

$$\sigma_x = \frac{32Pb}{\pi d^3}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{16Pa}{\pi d^3}$$

De 8.14

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{16Pb}{\pi d^3} \pm \sqrt{\left(\frac{16Pb}{\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16Pa}{\pi d^3}\right)^2}$$

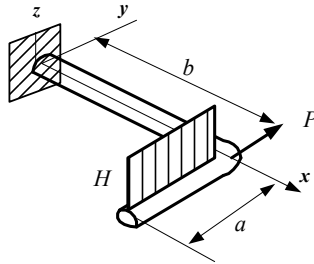
$$\sigma_{1,2} = \frac{16P}{\pi d^3} (b \pm \sqrt{a^2 + b^2})$$

De 8.15

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{16Pb}{\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16Pa}{\pi d^3}\right)^2}$$

$$\tau_{1,2} = \frac{16P}{\pi d^3} (\sqrt{a^2 + b^2})$$

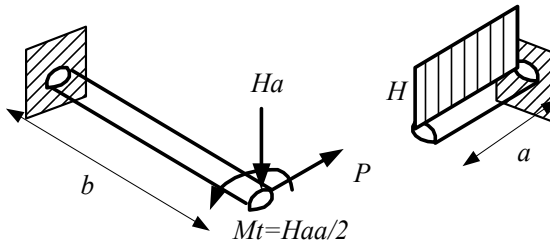
8.7. La manivela de la figura tiene una sección circular de diámetro "d" y soporta una carga distribuida vertical y una carga puntual horizontal. Hallar los esfuerzos máximos



Solución :



La porción "a" se analiza como una viga empotrada con una carga distribuida en toda su longitud y la porción "b" se analiza como una viga empotrada con una carga puntual y un momento de torsión en su extremo. Entonces la porción "a" esta sometida a flexión mientras que la porción "b" a torsión y flexión en dos direcciones



En "a" solo flexión

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(Ha^2/2)(r)}{(\pi d^4/64)}$$

Flexión

$$\sigma_{\max} = \frac{(Ha^2/2)(d/2)}{(\pi d^4/64)} = \frac{16Ha^2}{\pi d^3}$$

En "b" flexión y torsión

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(Hav)(r)}{(\pi d^4/64)}$$

Flexión vert.



$$\sigma_{\max} = \frac{(Hab)(d/2)}{(\pi d^4/64)} = \frac{32Hab}{\pi d^3}$$

Flexión hor

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(Pv)(r)}{(\pi d^4/64)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{(Pb)(d/2)}{(\pi d^4/64)} = \frac{32Pb}{\pi d^3}$$

Torsión

$$\tau = \frac{M_t r}{I_o} = \frac{(Ha^2/2)(r)}{\pi d^4/32}$$

$$\tau_{\max} = \frac{8Ha^2}{\pi d^3}$$

Entonces

$$\sigma_x = \frac{32Hab}{\pi d^3}$$

$$\sigma_y = \frac{32Pb}{\pi d^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{8Ha^2}{\pi d^3}$$

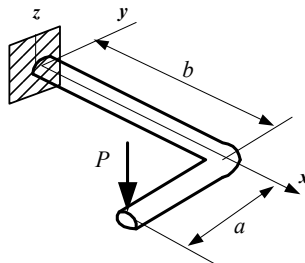
De 8.14

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{16}{\pi d^3} (Hab + Pb) \pm \sqrt{\left[\frac{16}{\pi d^3} (Hab - Pb)\right]^2 + \left(\frac{8Ha^2}{\pi d^3}\right)^2}$$

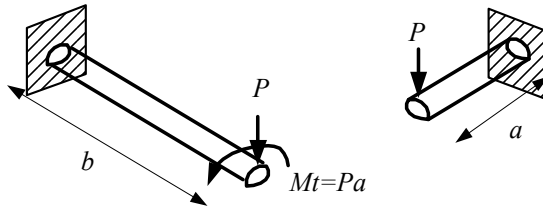
De 8.15

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \sqrt{\left[\frac{16}{\pi d^3} (Hab - Pb)\right]^2 + \left(\frac{8Ha^2}{\pi d^3}\right)^2}$$

8.8. Hallar la deformación vertical del extremo libre de la manivela del problema 8.6



Solución :



a) La deformación vertical de la porción "a" originada por la carga vertical es

$$\delta_a = \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{Pa^3}{3E} \frac{64}{\pi d^4}$$

b) La deformación vertical de la porción "b" originada por la carga vertical es

$$\delta_{b1} = \frac{Pb^3}{3EI} = \frac{Pb^3}{3E} \frac{64}{\pi d^4}$$

El momento de torsión origina un giro o deformada angular en la porción "b" de

$$\theta = \frac{M_t b}{GI_0} = \frac{Pab}{G} \frac{32}{\pi d^4}$$

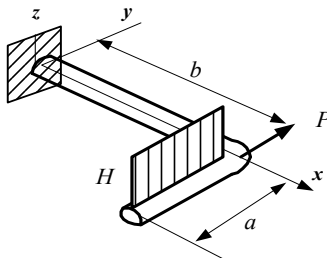
este giro produce una caída vertical del extremo libre de "a"

$$\delta_{b2} = \theta a = \frac{32Pa^2b}{\pi d^4}$$

La deformada total del extremo libre es

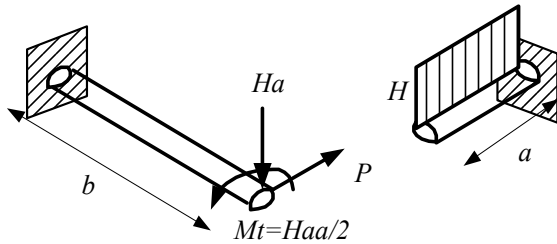
$$\delta_{tot} = \delta_a + \delta_{b1} + \delta_{b2} = \frac{64}{\pi d^4} \left( \frac{Pa^3}{3E} + \frac{Pb^3}{3E} + \frac{Pa^2b}{2G} \right)$$

8.9. Hallar la deformación vertical del extremo libre de la manivela del problema 8.7



Solución :

La fuerza horizontal no produce una deformación vertical en el extremo libre



a) Deformación vertical de la porción "a" originada por la carga vertical distribuida

$$\delta_a = \frac{Ha^4}{8EI} = \frac{Ha^4}{8E} \frac{64}{\pi d^4}$$

b) Deformación vertical de la porción "b" originada por la carga vertical

$$\delta_{b1} = \frac{Hab^3}{3EI} = \frac{Hab^3}{3E} \frac{64}{\pi d^4}$$

c) Deformación angular de la porción "b" originada por el momento de torsión

$$\theta = \frac{M_t b}{GI_0} = \frac{Ha^2 b}{2G} \frac{32}{\pi d^4}$$

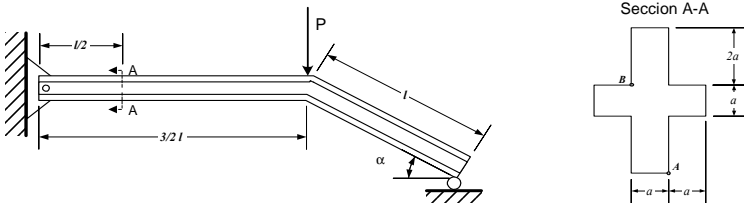
giro que produce una caída vertical del extremo libre de "a"

$$\delta_{b2} = \theta a = \frac{16Ha^3 b}{\pi d^4}$$

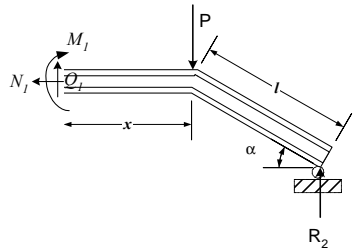
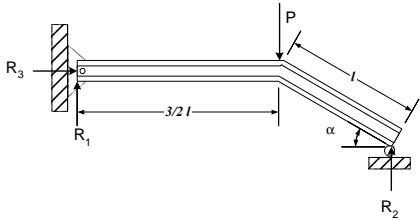
La deformada total del extremo libre es

$$\delta_{tot} = \delta_a + \delta_{b1} + \delta_{b2} = \frac{64}{\pi d^4} \left( \frac{Ha^4}{8E} + \frac{Hab^3}{3E} + \frac{Ha^3 b}{4G} \right)$$

8.10. La viga de la figura tiene una sección transversal como se muestra Hallar los esfuerzos en los puntos A y B, de la sección A-A.



Solución.-



$$\Sigma M_0 = 0 \quad P(3l/2) - R_2(3l/2 + l \cos \alpha) = 0$$

$$R_2 = \frac{3P}{(3 + 2 \cos \alpha)}$$

Las reacciones internas

$$\Sigma M_1 = 0 \quad M_1 + Px - R_2(l \cos \alpha + x) = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad Q_1 + R_2 - P = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad N_1 = 0$$

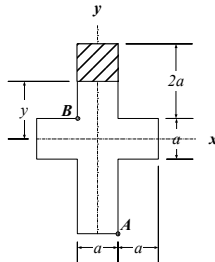
Para  $x = l$

$$M_1 = \frac{Pl \cos \alpha}{(3 + 2 \cos \alpha)}$$

$$Q_1 = \frac{2P \cos \alpha}{(3 + 2 \cos \alpha)}$$

$$N_1 = 0$$

Componentes del esfuerzo.



Esfuerzos normales por Cargas de Flexión.-

$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} \quad \sigma_B = \frac{Mc_B}{I}$$

Esfuerzos de corte por Cargas de Flexión.-

$$\tau_A = \frac{QS_A}{Ib_A} \quad \tau_B = \frac{QS_B}{Ib_B}$$

Para A

$$c_A = 5a/2$$

$$A_{\text{parcial}} = 2 a a$$

$$y_{\text{cg parcial}} = a$$

$$S_{\text{max A}} = 2 a^3$$

Para B

$$c_B = a/2$$

$$A_{\text{parcial}} = 0$$

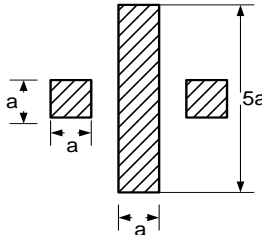
$$y_{\text{cg parcial}} = 0$$

$$S_{\text{max B}} = 0$$

$$b_B = a$$

La inercia

$$I = \frac{a(5a)^3}{12} + 2 \frac{aa^3}{12} = \frac{127a^4}{12}$$



$$\sigma_A = \frac{Pl \cos \alpha}{(3 + 2 \cos \alpha)} \frac{5a}{2} = \frac{30Pl \cos \alpha}{127(3 + 2 \cos \alpha)a^3}$$

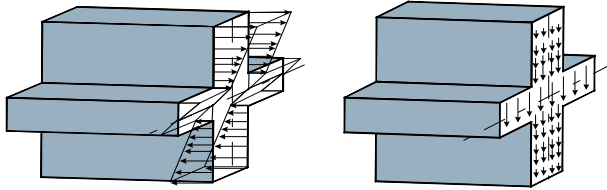
Remplazando

$$\sigma_B = - \frac{Pl \cos \alpha}{(3 + 2 \cos \alpha)} \frac{a}{2} = - \frac{6Pl \cos \alpha}{127(3 + 2 \cos \alpha)a^3}$$

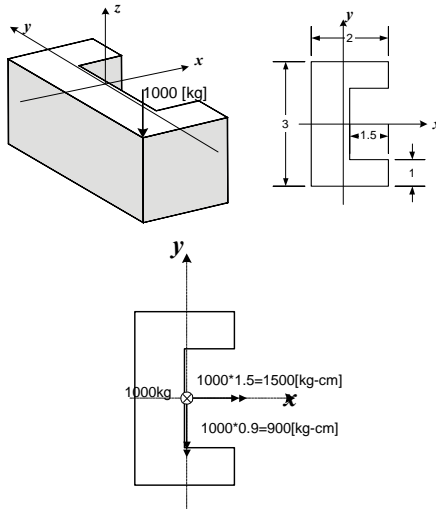
El esfuerzo en el punto B es de compresión, por eso el signo negativo.

$$\tau_A = \frac{2P \cos \alpha}{(3 + 2 \cos \alpha)} \frac{2a^3}{127a^4 a} = \frac{48P \cos \alpha}{127(3 + 2 \cos \alpha)a^2}$$

$$\tau_B = 0$$



8.11. El bloque de la figura de peso despreciable se somete a dos fuerzas verticales, que se aplican en diferentes esquinas. Determinar la distribución del esfuerzo normal que actúa en la sección mostrada. (Las unidades geométricas están en [cm])



Solución.-

Esfuerzos normales:

$$\sigma_A = \frac{P}{A} = \frac{1000 \text{ Kg}}{45 \text{ cm}^2} = 222.22 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

El esfuerzo de flexión

$$\sigma_{fc} = \frac{M \cdot c}{I}$$

siendo:

$$x_0 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 - 1.5 \cdot 1 \cdot 1.25}{2 \cdot 3 - 1.5 \cdot 1} \quad y_0 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1.5 - 1.5 \cdot 1 \cdot 1.5}{6 - 1.5}$$

$$x_0 = 0.9167 \text{ m} \quad y_0 = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$$I_{xx} = \frac{0.5 + 1.5^3}{12} + 0.5 \cdot 1.5 \cdot \left(\frac{1.5}{2}\right)^2 + \frac{1.5 \cdot 1^3}{12} + 1.5 \cdot 1 \cdot 1^2$$

$$I_{xx} = 2.3697 \text{ m}^4$$

$$I_{yy} = 2 \cdot \left[ \frac{1 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 1 \cdot (1 - 0.9167)^2 \right] + \frac{1 \cdot 0.5^3}{12} + 1 \cdot 0.5 \cdot \left(0.91 - \frac{0.5}{2}\right)^2$$

$$I_{yy} = 1.589 \text{ cm}^4$$

Esfuerzo máximo de compresión de  $M_x$  con  $c=3/2$

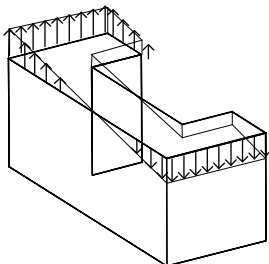
$$\sigma_{fc} = \frac{M_x \cdot c}{I_{xx}}$$

$$\sigma_{fc} = 949.487 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

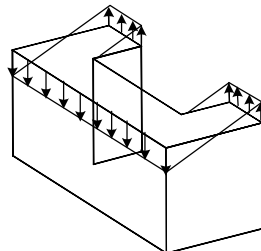
Esfuerzo máximo de compresión de  $M_y$  con  $c=0.916$

$$\sigma_{fc} = \frac{M_y \cdot c}{I_{yy}}$$

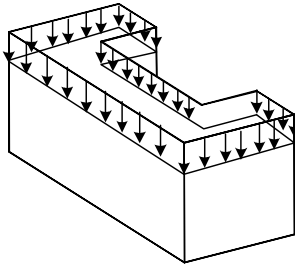
$$\sigma_{fc} = 528.847 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$



Esfuerzo debido a  $M_x$

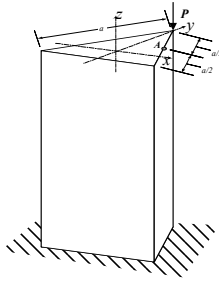


Esfuerzo debido a  $M_y$



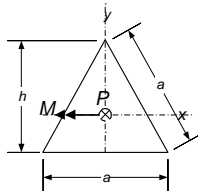
Esfuerzo debido a P

8.12. Determinar el esfuerzo máximo que ocurre en el Punto A de la columna mostrada en la figura



Solución.-

Siendo la sección transversal de la columna, la que se muestra en la figura, tomaremos en cuenta los datos indicados a continuación.



$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$



$$A = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Las fuerzas trasladadas al centro de gravedad serán un momento y la respectiva carga:

$$M = P \cdot \frac{2}{3} h$$

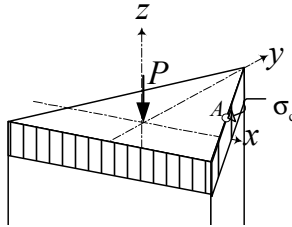
$$M = \frac{1}{3} \cdot P \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

Este momento está en la dirección x como se ve en la anterior figura.

La carga axial que actúa sobre la columna provocará la compresión de la misma y el esfuerzo que se suceda por este efecto será:

$$\sigma_c = \frac{P}{A}$$

la distribución de los esfuerzos en la sección transversal será el mostrado en la siguiente figura:

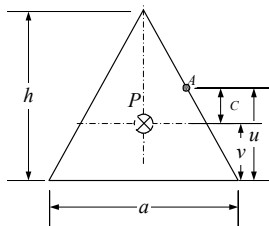


Debido a que el punto A se encuentra por sobre el eje del centro de gravedad, determinaremos el esfuerzo de compresión debido al momento de flexión con:

$$\sigma_{fc} = \frac{M \cdot c}{I}$$

donde c: la distancia del la línea del cg (eje neutro) al punto A en análisis.

I: Inercia respecto del eje xx de la sección transversal.

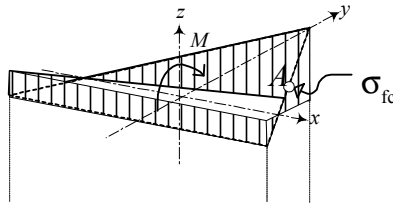


$$c = u - v \quad u = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{2} \quad v = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Remplazando las relaciones mostradas en la figura en la anterior ecuación:

$$\sigma_{fc} = \frac{8}{3} \cdot \frac{P}{a^2} \cdot \sqrt{3}$$

el diagrama de esfuerzos debido a la flexión es el mostrado en la siguiente figura:



El esfuerzo total que ocurre en el punto A es:

$$\sigma_A = \sigma_c + \sigma_{fc}$$

remplazando las anteriores expresiones, y simplificando, tenemos:

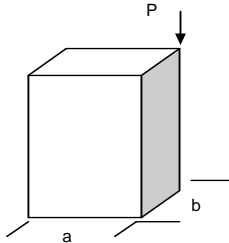
$$\sigma_A = 4 \cdot \frac{P}{a^2} \cdot \sqrt{3}$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS

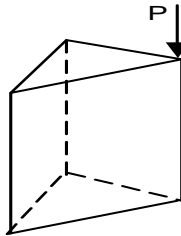
8.13. En una pieza se verifican los siguientes esfuerzos :  $\sigma_x = 90 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_y = 350 \text{ kg/cm}^2$  y  $\tau_{xy} = 30 \text{ kg/cm}^2$ . Hallar los esfuerzos en direcciones con ángulos de 0 hasta 360 con un intervalo de 10.

8.14. En el problema 8.13, hallar los esfuerzos máximos y las direcciones en las que estos ocurren.

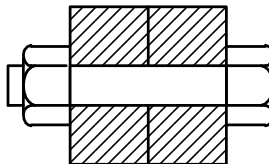
8.15. Hallar la combinación de esfuerzos normales del sistema de la figura



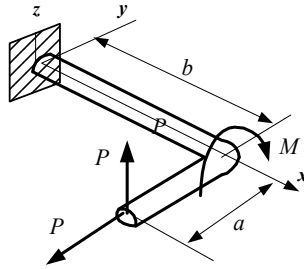
8.16. Hallar la combinación de esfuerzos normales del sistema de la figura, Cada lado del triángulo  $l = 3 \text{ cm}$  y la carga  $P = 800 \text{ kg}$



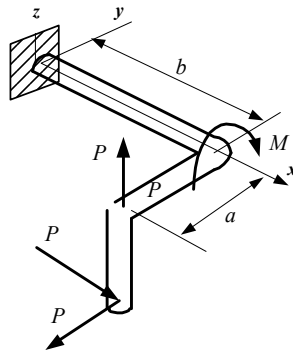
8.17. Una perno en el momento de su apriete esta sometida a cargas de torsión y a cargas de tracción. Hallar la combinación de esfuerzos



8.18. Una manivela de sección circular y diámetro "d" soporta varias cargas puntuales como se ve en la figura. Hallar los esfuerzos máximos



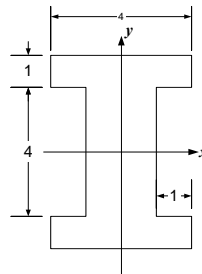
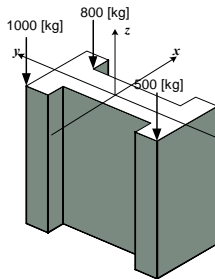
8.19. Una manivela de sección circular y diámetro “d” soporta varias cargas puntuales como se ve en la figura. Hallar los esfuerzos máximos



8.20. Hallar las deformaciones horizontal y vertical del extremo libre del problema 8.18

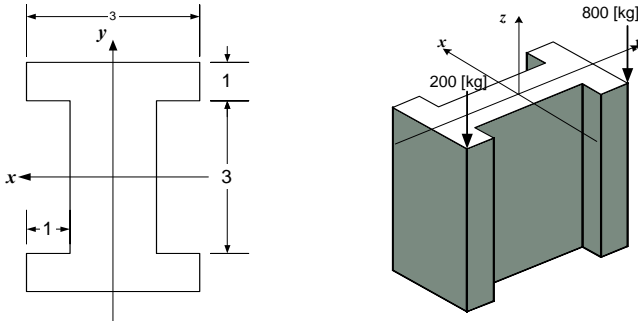
8.21. Hallar las deformaciones horizontal y vertical del extremo libre del problema 8.19

8.22. Determinar los diagramas de esfuerzo para cada una de las cargas, mostradas en la figura:

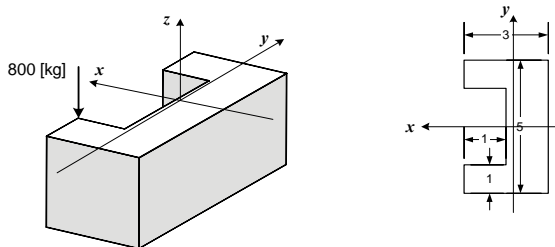


8.23. Para el problema anterior determinar el esfuerzo total en el punto donde se aplica la carga de 500kg

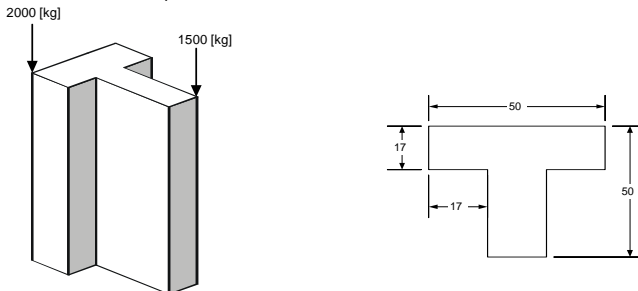
8.24. Determinar el esfuerzo máximo de compresión de la columna mostrada en la figura.



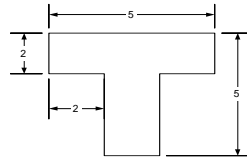
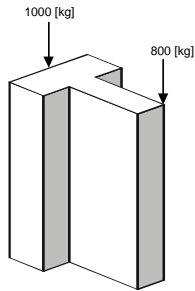
8.25. Determinar el esfuerzo máximo que soporta la columna mostrada en la figura



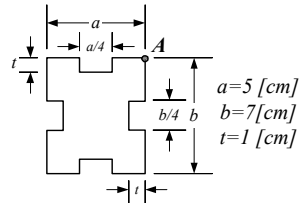
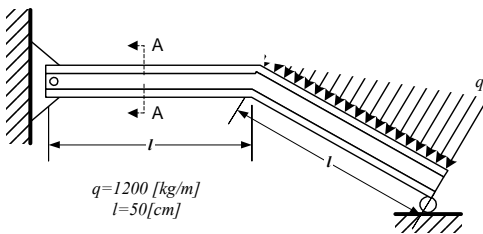
8.26. Determinar el esfuerzo máximo de compresión sobre la viga mostrada en la figura. (Dimensiones en mm)



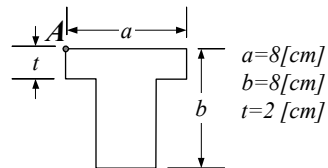
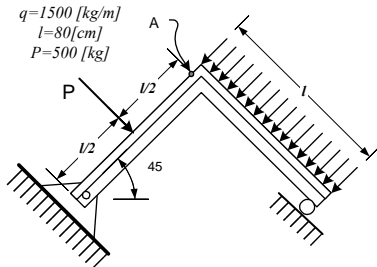
8.27. Hallar los esfuerzos para la columna mostrada en la figura.



8.28. Hallar los esfuerzos totales en los puntos indicados:

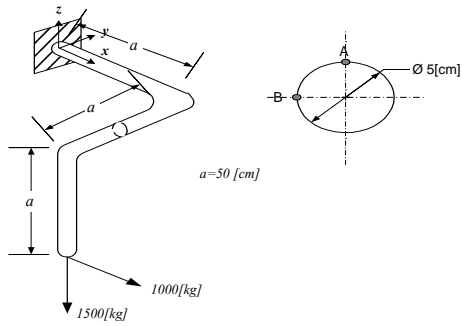


8.29. Determinar el esfuerzo máximo en la sección indicada en la figura.



8.30. En el problema anterior determinar una fórmula genérica para determinar los esfuerzos de compresión en el punto A.

8.31. Hallar las ecuaciones de los esfuerzos en cada una de las barras del sistema de la figura.



8.32. En el problema anterior, determinar el esfuerzo máximo en el punto A.

## 9.- MÉTODOS ENERGÉTICOS

### 9.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiarán Métodos Energéticos que nos posibilitarán hallar las deformaciones para los diferentes tipos de carga estudiados anteriormente.

En la zona elástica (cuando los esfuerzos son inferiores a los límites de fluencia) los materiales se comportan elásticamente y las deformaciones se almacenan como energía potencial de deformación.

### 9.2.- TRABAJO DE DESPLAZAMIENTO

El trabajo, en mecánica clásica, es el producto de una fuerza por la distancia que recorre y por el coseno del ángulo que forman ambas magnitudes vectoriales entre sí. Si la fuerza es variable el trabajo se calcula mediante la integral del producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento.

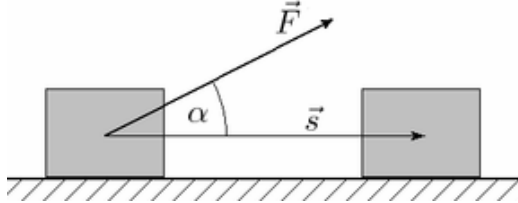


Fig. 9.1 Trabajo realizado por una fuerza debido a su Desplazamiento

$$W = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (9.)$$

$$W = F s \cos \alpha \quad (9.2)$$

El trabajo es el área bajo la curva Fuerza – Deformación

### 9.3.- TRABAJO Y ENERGÍA POTENCIAL DE DEFORMACIÓN



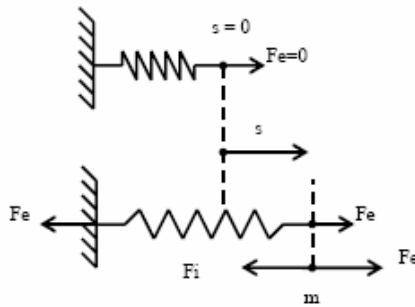


Fig. 9.2 Trabajo y Energía de Deformación

Considere un resorte indeformado  $s=0$  antes de la aplicación de la fuerza  $F_e$  cuando se aplica la fuerza  $F_e$  se produce un alargamiento del resorte  $s$  y aparece una fuerza interior  $F_i = Ks$  producida por la resistencia al alargamiento del resorte. El trabajo que efectúa la fuerza  $F_i$  durante su desplazamiento es  $dW = F_i ds = -k s ds$

$$W = \int_0^s F_i ds = \int_0^s -k s ds = -\frac{1}{2} k s^2 \quad (9.3)$$

Este trabajo es negativo pues se realiza en contra de la fuerza  $F_i$  del resorte, El trabajo que efectúa la carga  $F_e$ , es

$$W = \int_0^s T_e ds = \int_0^s k s ds = \frac{1}{2} k s^2 \quad (9.4)$$

Se puede decir que el trabajo de la fuerza externa ( $T_e$ ) se gasta en deformar el resorte (elemento interno) que acumula el trabajo en forma de una Energía Elástica Potencial de Deformación ( $U$ ). Si retiramos la fuerza  $F_e$  la partícula regresara a su posición original  $s = 0$  y la  $F_i$  producirá un Trabajo positivo producto de la Energía acumulada.

#### 9.4.- ENERGÍA POTENCIAL DE DEFORMACIÓN PARA LOS DIFERENTES TIPOS DE CARGA

##### a) ENERGÍA PARA ESFUERZOS NORMALES

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2} (\sigma A) (\epsilon dl) \quad (9.5)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (9.6)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (9.7)$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2} \frac{P^2 dl}{EA} \quad (9.8)$$

$$-W_i = U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2 dl}{EA} \quad (9.9)$$

b) ENERGÍA PARA CARGAS DE CORTE

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2} (\tau b dy)(\gamma dl) \quad (9.10)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (9.11)$$

$$\tau = \frac{QS}{Ib} \quad (9.12)$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2G} \left( \frac{QS}{Ib} \right)^2 b dy dl \quad (9.13)$$

Llamando coeficiente de forma a (que depende del tipo de sección)

$$\frac{\chi}{A} = \int_{-y_i}^{y_s} \frac{S}{I^2 b} dy \quad (9.14)$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2} \chi \frac{Q^2}{GA} dl \quad (9.15)$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2} \int_0^l \chi \frac{Q^2}{GA} dl \quad (9.16)$$

e) ENERGÍA DEL MOMENTO DE TORSIÓN

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2} (M_t)(d\theta) \quad (9.17)$$

$$d\theta = \frac{M_t dl}{GI_o} \quad (9.18)$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2} \frac{M_t dl}{GI_o} \quad (9.19)$$

$$-W_i = U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f^2 dl}{GI_o} \quad (9.20)$$

d) ENERGÍA DEL MOMENTO FLECTOR

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2} (M_f)(d\theta) \quad (9.21)$$

$$d\theta = \frac{M_f dl}{EI} \quad (9.22)$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2} \frac{M_f dl}{EI} \quad (9.23)$$

$$-W_i = U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f^2 dl}{EI} \quad (9.24)$$

Resumiendo

Estado	Fuerza/Momento	Deformada	Energía
Traccion/Compresión	P	$\delta = \int \frac{Pdx}{EA}$	$U = \frac{1}{2} \int \frac{P^2 dx}{EA}$ <b>(8.8)</b>
Corte	Q	Despreciable	Despreciable
Torsión	M	$\theta = \int \frac{Mdx}{GI_o}$	$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{GI_o}$ <b>(8.9)</b>
Flexion	M	$\theta = \int \frac{Mdx}{EI}$	$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI}$ <b>(8.10)</b>

9.5.- TEOREMAS DE CASTIGLIANO

Consideremos un sólido elástico que esta sometida a un sistema de cargas mismas que fueron aplicadas progresivamente (desde cero hasta su valor final de una) manera continua. En este caso, el trabajo W realizado por todas las cargas que actúan sobre el sólido quedaría almacenado como energía elástica de deformación U en el sólido. Entonces :

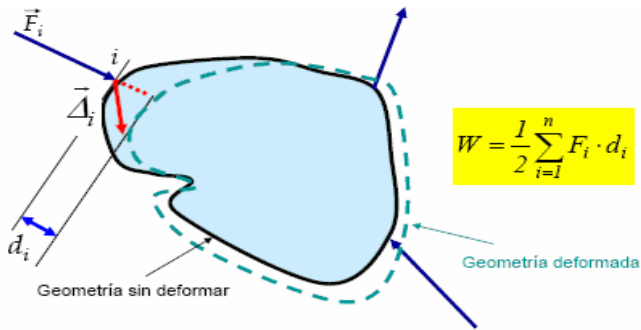


Fig. 9.3 Trabajo y Energía de Deformación de un Sólido

$$U = W \quad (9.25)$$

$$W_i = U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i d_i \quad (9.26)$$

El trabajo realizado por las cargas exteriores aplicadas a un sólido es la mitad de la suma del producto de dichas cargas por los desplazamientos de sus puntos de aplicación (en las direcciones de las mismas, por supuesto).

Derivando respecto a la Fuerza  $F_k$

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \left[ d_k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial d_i}{\partial F_k} F_i \right] \quad (9.27)$$

Pero  $d_i = d_{i1} F_1 + d_{i2} F_2 + \dots + d_{ik} F_k + \dots + d_{in} F_n$  (9.28)

$$\frac{\partial d_i}{\partial F_k} = \delta_{ik} = \delta_{ki} \quad (9.29)$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \left[ d_k + \sum_{i=1}^n d_{ki} F_i \right] = \frac{1}{2} [d_k + d_k] = d_k \quad (9.30)$$

Esta ecuación se conoce como el Primer Teorema de Castigliano, que dice :

La derivada parcial del Trabajo de Deformación respecto de una de las fuerzas, es igual al desplazamiento de su punto de aplicación medido en la dirección de la fuerza”.

$$\frac{\partial U}{\partial d_k} = F_k \quad (9.31)$$

De manera similar se halla la ecuación anterior que se conoce como el Segundo Teorema de Castigliano que dice

La derivada parcial del Trabajo de Deformación respecto del desplazamientos de un punto, es igual a la componente de la fuerza que sobre dicho punto actúa en dirección de este desplazamiento".

Si entre las cargas aplicadas existiera algún momento, bastaría con tener en cuenta que:

- donde se dijera fuerza se debería decir momento
- donde se dijera desplazamiento se debería decir giro
- donde se expresara trabajo ( $W=Fd$ , en el caso de fuerzas) se debería escribir  $W=M\theta$ .

### 9.6.- ECUACIONES DE CASTIGLIANO

Aplicando las ecuaciones de Castigliano a las ecuaciones de la energía se obtiene

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \frac{P}{E_0} \int \frac{dx}{A} \quad (9.32)$$

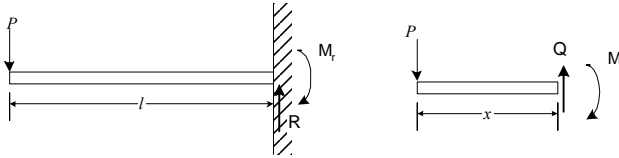
$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \frac{1}{E_0} \int_0^l \frac{M \left( \frac{\partial M}{\partial P_n} \right) dx}{I} \quad (9.33)$$

$$\theta_n = \frac{\partial U}{\partial M_n} = \frac{1}{E_0} \int_0^l \frac{M \left( \frac{\partial M}{\partial M_n} \right) dx}{I} \quad (9.34)$$

$$\theta_n = \frac{\partial U}{\partial M_n} = \frac{1}{G_0} \int_0^l \frac{M_t \left( \frac{\partial M_t}{\partial M_n} \right) dx}{I_o} \quad (9.35)$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

9.1.- Hallar la deformada en el extremo libre de una viga simplemente empotrada tiene una carga puntual.



Solución :

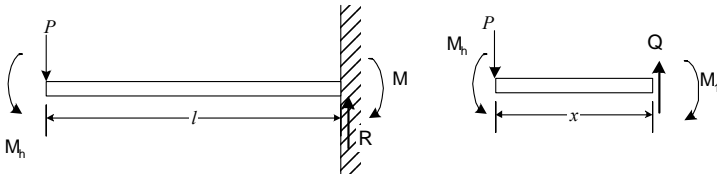
$$\Sigma M = 0 \quad M = P x$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^l M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) dx \right]$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \int_0^l (Px) x dx = \frac{Px^3}{3EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

9.2.- Hallar la deformada angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada tiene una carga puntual



Solución :

Se introduce un momento ficticio  $M_h$  y el momento:

$$M = P x + M_h$$

$$\theta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^l M \left( \frac{\partial M}{\partial M_h} \right) dx \right]$$

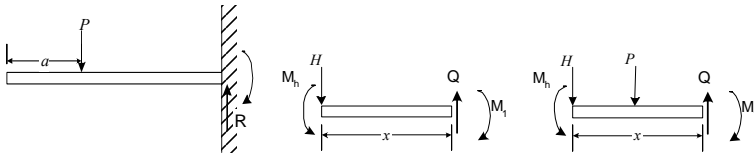
$$\theta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^l (Px + M_h)(1) dx \right]$$

$$\theta_{\max} = (M_h x + Px^2/2) 1/EI$$

Pero  $M_h = 0$

$$\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

9.3.- Hallar las deformadas lineal y angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una carga puntual interna



Solución :

Se introducen una fuerza y un momento ficticio H y  $M_h$  :

Los momentos son :

$a \geq x \geq 0$

$$M_1 = Hx + M_h$$

$l \geq x \geq a$

$$M_2 = Hx + P(x - a) + M_h$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) dx + \int_a^l M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial H} \right) dx \right]$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a [Hx + M_h] x dx + \int_a^l [Hx + P(x - a) + M_h] x dx \right]$$

Pero  $H = M_h = 0$

$$\delta_{\max} = \frac{P}{EI} \left[ \frac{l^3 - a^3}{3} - \frac{a(l^2 - a^2)}{2} \right]$$

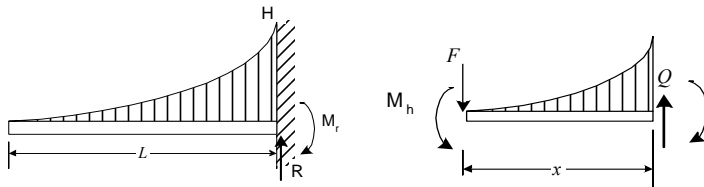
$$\theta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial M_h} \right) dx + \int_a^l M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial M_h} \right) dx \right]$$

$$\theta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a [Hx + M_h](1) dx + \int_a^l [Hx + P(x - a) + M_h](1) dx \right]$$

Con  $H = M_h = 0$

$$\theta_{\max} = \frac{P}{EI} \left[ \frac{l^2 - a^2}{2} - a(l - a) \right]$$

9.4.- Hallar las deformadas lineal y angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una distribuida  $p = H(x/l)^n$



Solución :

Se introducen una fuerza y un momento ficticio  $F$  y  $M_h$  :

De 5.10 sin  $F$  ni  $M_b$  :

$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)}$$

con  $F$  y  $M_b$  :

$$M = Fx - \frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} + M_b$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^l M \left( \frac{\partial M}{\partial F} \right) dx \right]$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left[ Fx + \frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} + M_b \right] x dx$$

Pero  $H = M_b = 0$

$$\delta_{\max} = \frac{Hl^4}{EI(n+4)(n+2)(n+1)}$$

$$\theta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^l M \left( \frac{\partial M}{\partial M_b} \right) dx \right]$$

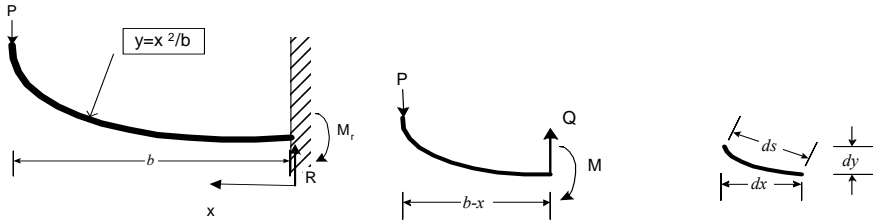
$$\theta_{\max} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left[ Fx + \frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} + M_b \right] (1) dx$$



Con  $H = Mh = 0$

$$\theta_{\max} = \frac{Hl^3}{EI(n+3)(n+2)(n+1)}$$

9.5.- Hallar las deformadas lineal en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una carga puntual



Solución :

$$M = P(b - x)$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\text{longitud}} M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) ds \right]$$

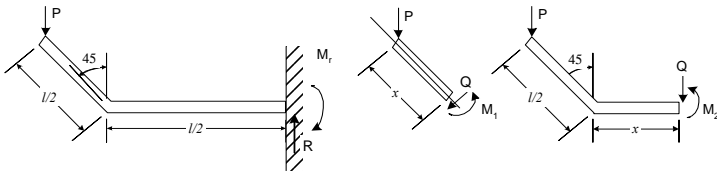
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dy = 2(x/b)dx$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \int_0^b [P(b-x)](b-x) \sqrt{1 + 4(x/b)^2} dx$$

$$\delta_{\max} = K \frac{Pb^3}{EI}$$

9.6.- Hallar las deformadas lineal en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una carga puntual en el extremo



Solución :

Los momentos son :

$$l/2 \geq x \geq 0 \quad M_1 = -P \sin 45 x$$

$$l \geq x \geq a \quad M_2 = -P (l/2 \sin 45 + v)$$

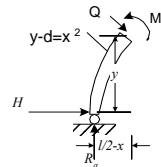
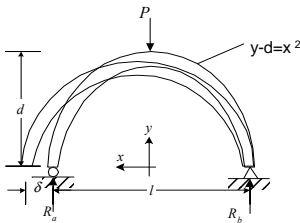
$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{l/2} M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial P} \right) dx + \int_0^{l/2} M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial P} \right) dv \right]$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{l/2} P (x \sin 45)^2 dx + \int_0^{l/2} P (l/2 \sin 45 + v)^2 dv \right]$$

$$\delta_{\max} = \frac{P}{EI} \left[ \frac{\sin^2 45}{3} x^3 \Big|_0^{l/2} + \left( (l/2) \sin 45 \right)^2 + (l \sin 45 v) + v^2 \right] \Big|_0^{l/2}$$

$$\delta_{\max} = \frac{Pl^3}{EI} \frac{[4 \sin^2 45 + 3 \sin 45 + 1]}{24}$$

9.7.- Hallar el desplazamiento que tiene el apoyo móvil de una viga con forma parabólica y carga puntual en su centro



Solución :

Se introducen una fuerza ficticia H. Por simetría

$$R_a = R_b = P/2$$

$$l/2 \geq x \geq 0 \quad M_1 = R_a x - H y$$

$$M_1 = (P/2) (l/2 - x) - H (x^2 + d)$$

Hay dos intervalos. Por simetría se duplica solo uno

$$\delta_{\max} = \frac{2}{EI} \left[ \int_0^{l/2} M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) ds \right]$$

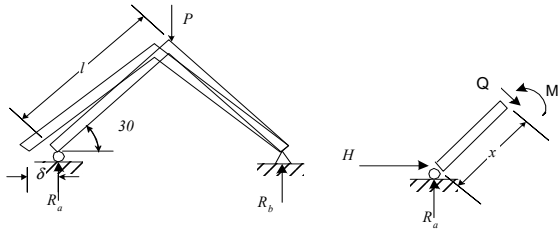
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dy = 2x dx$$

$$\delta_{\max} = \frac{2}{EI} \left[ \int_0^{l/2} \left[ \frac{Px}{2} - H(x^2 + d) \right] x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx \right]$$

$$\delta_{\max} = K \frac{Pl^3}{EI}$$

9.8.- Hallar el desplazamiento que tiene el apoyo móvil de una viga con forma parabólica y carga puntual en su centro



Solución :

Se introducen una fuerza ficticia H.

Por simetría  $R_a = R_b = P/2$

$$l/2 \leq x \leq 0 \quad M_1 = Ra x \cos 30 - H x \sin 30$$

$$M_1 = \frac{Px\sqrt{3}}{4} - \frac{Hx}{2}$$

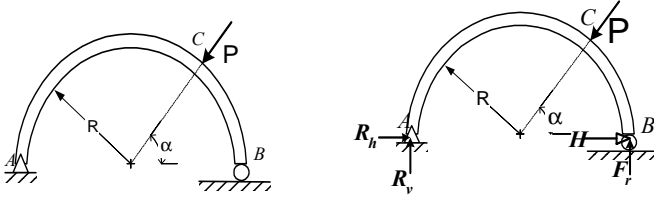
Hay dos intervalos. Por simetría se duplica solo uno

$$\delta_{\max} = \frac{2}{EI} \left[ \int_0^l M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) dx \right]$$

$$\delta_{\max} = \frac{2}{EI} \left[ \int_0^l \left[ \frac{Px\sqrt{3}}{4} - \frac{Hx}{2} \right] \left( -\frac{x}{2} \right) dx \right]$$

$$\delta_{\max} = \frac{Pl^3 2\sqrt{3}}{12 EI}$$

9.9.- En el sistema de la figura: a) Hallar el desplazamiento horizontal producido por la fuerza P. b) El valor de  $\alpha$ , para que el desplazamiento sea nulo.



Solución :

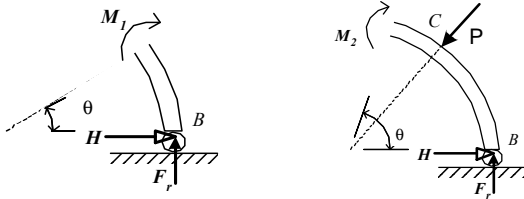
$$\text{a) } \Sigma M_a = 0 \quad F_r 2R - PR \sin \alpha (1 + \cos \alpha) + P \cos \alpha R \sin \alpha = 0$$

$$F_r = (P/2) \sin \alpha$$

Se incluye una ficticia H en B para calcular la deformada horizontal de este punto

$$\delta_{BH} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^\alpha M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) dx + \int_\alpha^\pi M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial H} \right) dx \right]$$

(I)



$$0 \leq \theta \leq \alpha \quad M_1 = F_r R (1 - \cos \theta) + HR \sin \theta$$

$$M_1 = (P/2) R \sin \alpha (1 - \cos \theta) + HR \sin \theta$$

(ii)

$$\alpha \leq \theta \leq \pi \quad M_2 = \left( \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{3}{2} \sin \alpha \cos \theta - \cos \theta \sin \theta - \cos \alpha \sin \alpha \right) RP + HR \sin \theta$$

(iii)

De i, ii y iii y simplificando

$$\delta_{BH} = \frac{PR^3 \sin(\alpha)}{3EI} (3 \cos \alpha - 1 + \cos^2 \alpha)$$

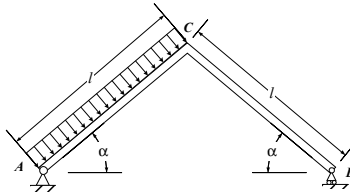
b) Para que el desplazamiento sea nulo

$$(3 \cos \alpha - 1 + \cos^2 \alpha) = 0$$

De donde:

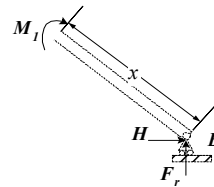
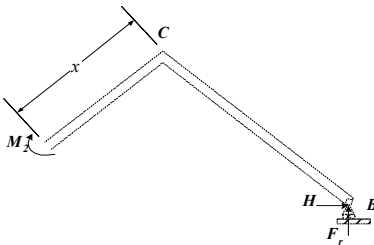
$$\alpha = 72.376^\circ$$

9.10.- El bastidor A,B,C, articulado en uno de sus extremos y apoyado en el otro esta cargado, en uno de sus tramos con una carga uniformemente distribuida, como se muestra en la figura. Hallar el desplazamiento horizontal de B (Considerar solamente efectos de flexión)



Solución :  
De la estática:

$$\Sigma M_a = 0 \quad 2 F_r L \cos \alpha - (qL/2) \cos^2 \alpha - (qL/2) \sin^2 \alpha = 0$$



$$F_r = (qL)/(4 \cos \alpha)$$

En el tramo derecho:

$$0 \leq x \leq L \quad M_1 = F_r x \cos \alpha + H x \sin \alpha$$

$$M_1 = (qLx)/4 + H x \sin \alpha$$

En el tramo izquierdo:

$$0 \leq x \leq L \quad M_2 = F_r (L \cos \alpha + x \cos \alpha) + H (L - x) \sin \alpha - qx^2/2$$

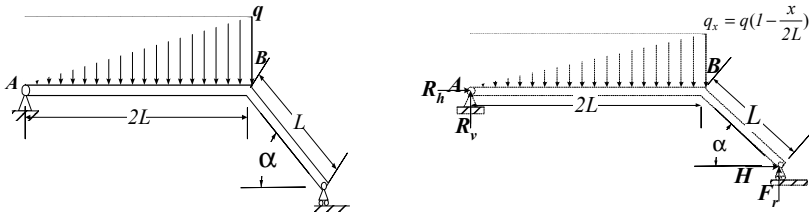
$$M_2 = qL^2/4 + qLx/4 + H \sin \alpha - H x \sin \alpha - qx^2/2$$

reemplazando en la ecuación de desplazamiento y simplificando:

$$\delta_{BH} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^L M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) dx + \int_0^L M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial H} \right) dx \right]$$

$$\delta_{BH} = \frac{5}{24EI} qL^4 \sin \alpha$$

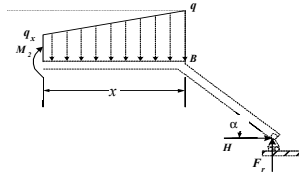
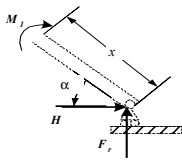
9.11.- El bastidor ABC mostrado en la figura soporta una carga lineal en uno de sus tramos. Hallar una expresión para calcular el desplazamiento horizontal del extremo derecho. Solamente considerar esfuerzos de flexión.



Solución :

$$\sum M = 0 \quad F_r (2L + L \cos \alpha) - (2/3)(qL^2)(4/3) + HL \sin \alpha = 0$$

$$F_r = (8qL - 9 H \sin \alpha) / (18 + 9 \cos \alpha)$$



$$0 \leq x \leq L$$

$$M_1 = F_r L \cos \alpha + H L \sin \alpha$$

$$M_1 = 2L (4 qL \cos \alpha + 9 H \sin \alpha) / (18 + 9 \cos \alpha)$$

$$0 \leq x \leq 2L$$

$$M_2 = F_r (L \cos \alpha + x) + H L \sin \alpha - qx^2/2 - (q - q_x) x^2/9$$

con

$$q_x = q (1 - x/(2L))$$

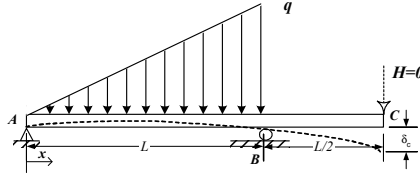
$$M_2 = \frac{1}{9} \frac{(8qL - 9H \sin(\alpha))}{(2 + \cos(\alpha))} \cdot (L \cos(\alpha) + x) + H \sin(\alpha) \cdot L - \frac{1}{2} q \left(1 - \frac{1x}{2L}\right) \cdot x^2 - \left[ \frac{1}{9} q - \frac{1}{9} q \left(1 - \frac{1x}{2L}\right) \right] \cdot x^2$$

reemplazando en la ecuación de desplazamiento y simplificando:

$$\delta_{BH} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^L M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) dx + \int_0^{2L} M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial H} \right) dx \right]$$

$$\delta_{BH} = \frac{16}{135EI} qL^4 \sin \alpha \frac{(27 \cos \alpha + 4)}{4 + 4 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$$

9.12.- Una viga simple AB, con un voladizo BC. Esta sometida a una carga linealmente variable en el tramo AB, como se ve en la figura. Determinar la expresión para calcular la deflexión  $\delta_C$  del punto C



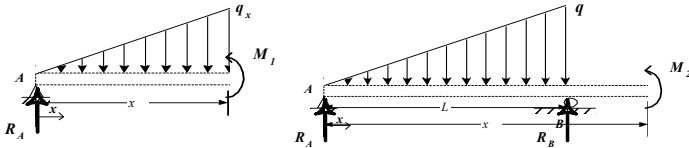
Solución :

Se aplica una carga ficticia H en el punto C

$$\Sigma M_a = 0$$

$$R_b = 3H/2 + qL/3$$

$$R_a = H/2 + qL/6$$



En el tramo izquierdo:

$$0 \leq x \leq L$$

$$M_1 = R_a x - q x x/2 (x/3)$$

$$q_x = qx/L$$

$$M_1 = \left(\frac{qL}{6} - \frac{H}{2}\right)x - \frac{q_x x^2}{6}$$

$$M_2 = \left(\frac{qL}{6} + \frac{H}{2}\right)x + \left(\frac{3H}{2} + \frac{qL}{3}\right)(x-L) - \frac{qL}{2}\left(x - \frac{2L}{3}\right)$$

$$L \leq x \leq 3L/2$$

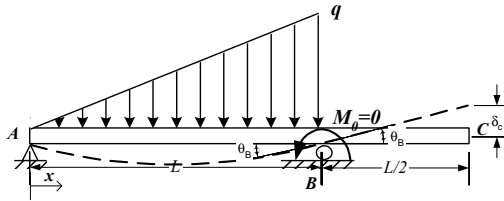
La deformación total en el extremo libre será dada por la expresión:

$$\delta_C = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^L M_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial H}\right) dx + \int_L^{3L/2} M_2 \left(\frac{\partial M_2}{\partial H}\right) dx \right]$$

$$\delta_C = \frac{-7qL^4}{360EI}$$

resolviendo

9.13.- En el problema anterior, hallar el ángulo de deformación del punto B. (Use el momento  $M_0=0$  aplicado en el punto B. Ver figura).



Solución :

Se aplica en B un momento ficticio  $M_o$

$$\Sigma M_a = 0$$

$$R_a = qL/6 + M_o / L$$

$$R_b = qL/3 - M_o / L$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$M_1 = (R_a x - qx \cdot x/2)(x/3)$$

$$qx = qx/L$$

$$M_1 = \frac{qx^3}{3L} - \frac{qx^2}{3} + \left(\frac{qL}{6} + \frac{M_o}{L}\right)x$$

$$M_2 = \left(\frac{qL}{6} - \frac{M_o}{L}\right)x + \left(\frac{qL}{3} + \frac{M_o}{L}\right)(x-L) + M_o$$

$$L \leq x \leq 3L/2$$

La deformación angular es

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^L M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial M_o} \right) dx + \int_L^{3L/2} M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial M_o} \right) dx \right]$$

$$\theta_B = \frac{7qL^3}{180EI}$$

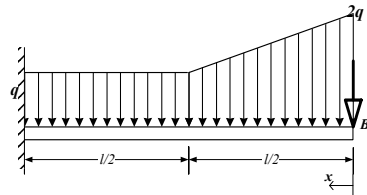
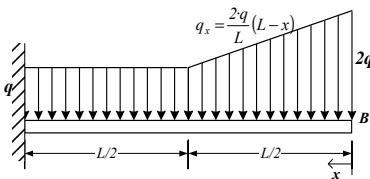
resolviendo:

ahora bien la deformación en C es

$$\delta_c = \theta_B L/2$$

$$\delta_c = \frac{7qL^4}{360EI}$$

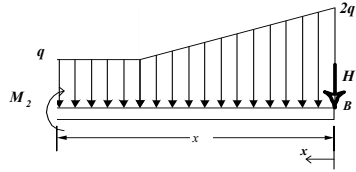
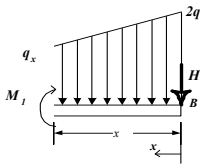
9.14. -Determinar el desplazamiento que se produce en el extremo libre de la viga mostrada y cargada como se ve en la figura.



Solución :

Se incluye una fuerza ficticia H





Para el tramo derecho:

$$0 \leq x \leq L/2 \quad M_1 = Hx - \frac{q_x x^2}{2} - \frac{(2q - q_x) 2x}{2} \frac{2x}{3}$$

con

$$q_x = 2q(l-x)/l$$

$$M_1 = \frac{(-3Hl - 3qlx + qx^2)x}{3l}$$

En el tramo izquierdo

$$L/2 \leq x \leq L \quad M_2 = -Hx - \frac{qLx}{4} + \frac{qL^2}{24} - \frac{qx^2}{2}$$

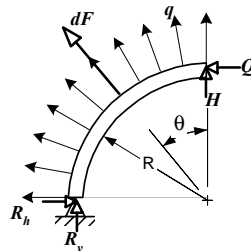
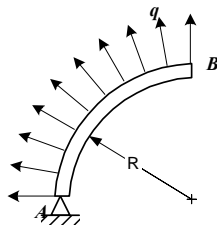
La deformación total en el extremo libre será dada por la expresión:

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) dx + \int_{L/2}^L M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial H} \right) dx \right]$$

$$\delta_B = \frac{361qL^4}{1920EI}$$

resolviendo

9.15.- Hallar las deformaciones horizontal y vertical del punto B de la viga curva mostrada en la figura, la carga aplicada en toda su longitud tiene dirección radial.



Solución :

Se incluyen las cargas ficticias H y Q

$$M_1 = QR(1 - \cos\theta) + HR\sin\theta + \int_0^\theta qR^2 \cos\beta(\sin\theta - \sin\beta)d\beta + \int_0^\theta qR^2 \sin\beta(\cos\beta - \cos\theta)d\beta$$

simplificando  $M_1 = QR - QR \cos \theta + HR \sin \theta + qR^2 (1 - \cos \theta)$

Las deformaciones

$$\delta_V = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\alpha/4} M \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right) R d\theta \right]$$

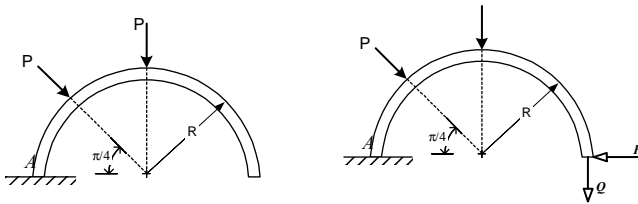
$$\delta_H = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\alpha/4} M \left( \frac{\partial M}{\partial Q} \right) R d\theta \right]$$

$$\delta_V = -\frac{(2\sqrt{2}-3)qR^3}{4EI}$$

resolviendo:

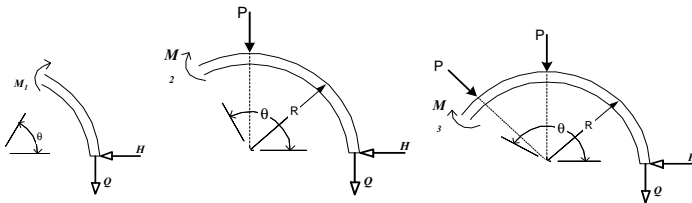
$$\delta_H = -\frac{\left(\frac{3\pi}{8} - \sqrt{2} + \frac{1}{4}\right)qR^3}{EI}$$

9.16.- La viga curva semicircular, empotrada en el extremo A, esta cargada en dos puntos como se muestra en la figura, determinar la deformación horizontal y vertical que se produce en el extremo libre de dicha barra.



Solución:

Se incluyen dos cargas ficticias ( $H = 0$  y  $Q = 0$ ).



Los momentos son

$$\begin{aligned}
 0 \leq \theta \leq \pi/2 & \quad M_1 = -QR(1 - \cos \theta) - HR \sin \theta \\
 \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4 & \quad M_2 = PR \cos \theta - HR \sin \theta - QR(1 - \cos \theta) \\
 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi & \quad M_3 = PR \cdot 2^{1/2}/2 [(\cos \theta + 2^{1/2}/2) + (\sin \theta - 2^{1/2}/2)] + PR \cos \theta \\
 & \quad - HR \sin \theta - QR(1 - \cos \theta)
 \end{aligned}$$

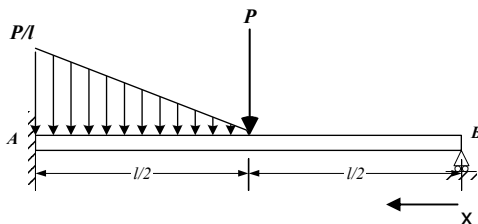
Las deformaciones en el extremo libre son:

$$\begin{aligned}
 \delta_h &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\pi/2} M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) R d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial H} \right) R d\theta + \int_{3\pi/4}^{\pi} M_3 \left( \frac{\partial M_3}{\partial H} \right) R d\theta \right] \\
 \delta_v &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\pi/2} M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial Q} \right) R d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial Q} \right) R d\theta + \int_{3\pi/4}^{\pi} M_3 \left( \frac{\partial M_3}{\partial Q} \right) R d\theta \right]
 \end{aligned}$$

resolviendo y simplificando:

$$\begin{aligned}
 \delta_h &= -\frac{PR}{16EI} (-8 - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}\pi) \\
 \delta_v &= \frac{PR}{16EI} (-8\sqrt{2} + 32 + 4\pi + \sqrt{2}\pi)
 \end{aligned}$$

9.17.- Determinar la fuerza de reacción que soporta el extremo apoyado B en la viga mostrada en la figura.



Solución :

La deformada vertical en B es nula

$$\delta_{bv} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{l/2} M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial R_b} \right) dx + \int_{l/2}^l M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial R_b} \right) dx \right] = 0$$

Los momentos son

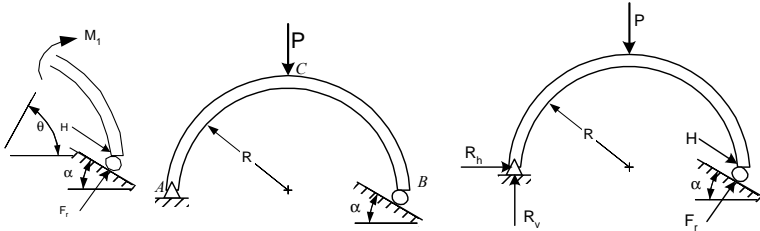
$$\begin{aligned}
 0 \leq x \leq l/2 & \quad M_1 = R_b x \\
 l/2 \leq x \leq l & \quad M_2 = R_b x - P(x - l/2) - q_x(x - l/2)^2 / 6 \\
 \text{con} & \quad q_x = (P/l)(2x/l - 1) \\
 & \quad M_2 = (24 R_b x - 30 P x + 13 P l - 8 P x^3/l^2 + 12 P x^2/l)/24
 \end{aligned}$$

$$\delta_{bv} = \frac{l^3}{1920EI} (640R_b - 209P) = 0$$

simplificando:

$$R_b = (209/640)P$$

9.18.- Una Barra curva delgada de forma semicircular esta articulada en A y simplemente apoyada en B, Como s muestra en la figura. En C actúa una carga vertical P. Determinar el desplazamiento vertical  $\delta_v$  y el desplazamiento horizontal  $\delta_h$  en el extremo B, que se encuentra apoyado en una superficie inclinada.



Solución :

$$\Sigma M_a = 0 \quad F_r 2R \cos \alpha - H 2R \sin \alpha - PR = 0$$

$$F_r = (H \sin \alpha + P/2) / \cos \alpha$$

Los momentos son

$$0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad M_1 = R \sin \theta (H \cos \alpha + F_r \sin \alpha) + R(1 - \cos \alpha)(-H \sin \alpha + F_r \cos \alpha)$$

$$\pi/2 \leq \theta \leq \pi \quad M_2 = R \sin \gamma (H \cos \alpha + F_r \sin \alpha) + R(1 + \cos \gamma)(-H \sin \alpha + F_r \cos \alpha) - PR \cos \gamma$$

con  $\gamma = \pi - \theta$

Simplificando  $M_2 = (R/2)(P + P \cos \theta + 2 H \sin \theta / \cos \alpha + P \tan \alpha \sin \theta)$

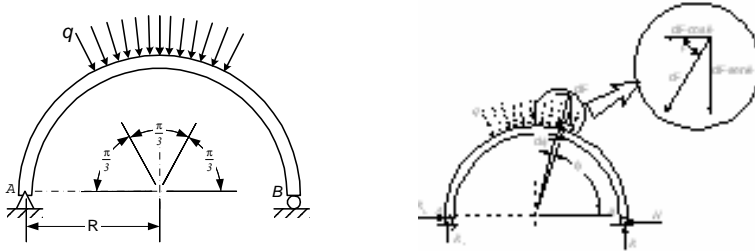
La deformada

$$\delta = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\pi/2} M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) R d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial H} \right) R d\theta \right]$$

Reemplazando y simplificando

$$\delta = \frac{PR^3}{EI} \frac{(2 \cos \alpha + \pi \sin \alpha)}{4 \cos^2 \alpha}$$

9.19.- Una barra curva delgada AB de forma semicircular esta articulada en A y simplemente apoyada en el extremo B una carga distribuida que actúa en dirección radial, como se muestra en la figura, provoca que el extremo B se desplace horizontalmente, determinar una expresión para calcular éste desplazamiento.



Solución :

Considerando una fuerza ficticia H y de la estática

$$R_v = \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} qR \sin \phi d\phi = \frac{qR}{2}$$

Los momentos son

$$0 \leq \phi \leq \pi/3 \quad M_1 = (qR^2/2) (1 - \cos \phi) - HR \sin \phi$$

$$M_2 = \frac{3}{8} \cdot qR^2 - \frac{1}{2} qR^2 \cdot \cos(\theta) - HR \sin(\theta) + \frac{1}{2} qR^2 \cdot \cos(\theta)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{3} qR^2 \cdot \sin(\theta)$$

$$\pi/3 \leq \phi \leq \pi/2$$

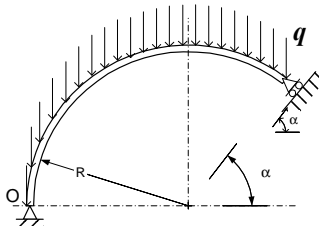
$$\delta = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{\pi/3} M_1 \left( \frac{\partial M_1}{\partial H} \right) R d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} M_2 \left( \frac{\partial M_2}{\partial H} \right) R d\theta \right]$$

La deformada

Reemplazando y simplificando

$$\delta = -\frac{qR^4}{EI} \frac{(1 + 2\sqrt{3}\pi)}{24}$$

9.20.- La barra mostrada en la figura, se encuentra sometida a la acción de la carga uniforme q en dirección vertical, determinar una expresión para calcular el desplazamiento del extremo apoyado, considerando que el apoyo tiene una inclinación de  $\pi/3$ .



Solución :

De la estática  $R_h + H \cos \alpha - F_r \sin \alpha = 0$

$$R_v - q R \pi + q R \alpha + F_r \cos \alpha + H \sin \alpha = 0$$

de donde

$$R_h = -\frac{H \cos \alpha - q R \pi \sin \alpha + q R \alpha \sin \alpha + q R - q R \cos^2 \alpha + H}{1 + \cos \alpha}$$

$$R_v = \frac{q R \pi - q R \alpha + q R \sin \alpha \cos \alpha - H \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

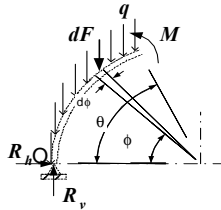
$$F_r = \frac{q R \pi - q R \alpha - q R \sin \alpha - H \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$R_h = -H + \frac{2}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot q \cdot R \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot q \cdot R$$

$$R_v = \frac{4}{9} \cdot q \cdot R \cdot \pi + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot q \cdot R - \frac{1}{3} \cdot H \cdot \sqrt{3}$$

$$F_r = \frac{4}{9} \cdot q \cdot R \cdot \pi - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot q \cdot R - \frac{1}{3} \cdot H \cdot \sqrt{3}$$

con  $\alpha = \pi/3$



El momento

$$M = R_v R (1 - \cos \theta) - R_h R \sin \theta - \int_0^\theta q R^2 (\cos \phi - \cos \theta) d\phi$$

Simplificando y con  $H = 0$

$$M = q R^2 \left[ \frac{4\pi}{9} (1 - \cos \theta) + \frac{1}{6} (\sqrt{3} - \cos \theta) - \sin \theta \left( \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2} \right) + \theta \cos \theta \right]$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{2\pi/3} M \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right) R d\theta \right]$$

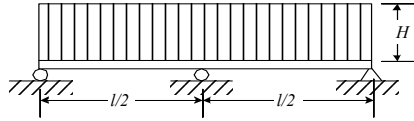
La deformada

$$\delta = -\frac{q R^4}{216 EI} (-108\pi - 189\sqrt{3} + 40\pi^2 \sqrt{3})$$

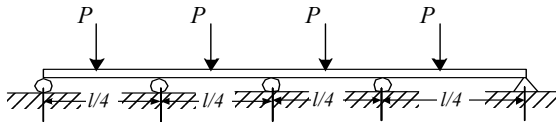
Simplificando

## PROBLEMAS PROPUESTOS

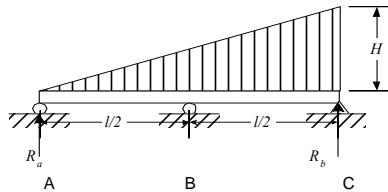
9.21.- Hallar las reacciones del sistema de la figura



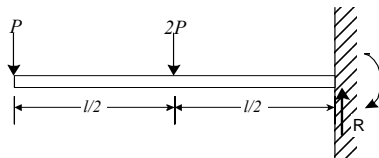
9.22.- Hallar las reacciones del sistema de la figura



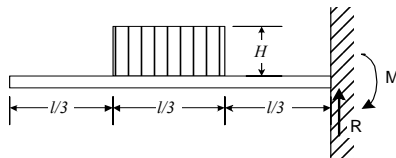
9.23.- Hallar las reacciones del sistema de la figura



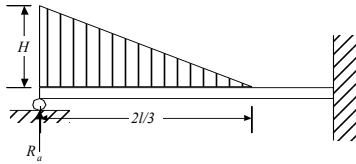
9.24.- Hallar la deformada lineal y angular del sistema de la figura



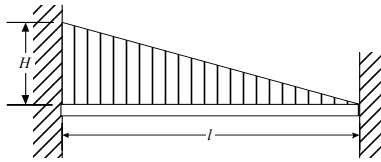
9.25.- Hallar la deformada lineal y angular del sistema de la figura



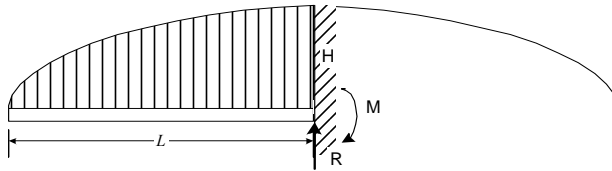
9.26.- Hallar las reacciones del sistema de la figura



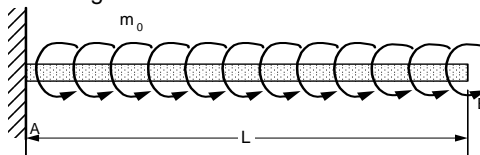
9.27.- Hallar las reacciones del sistema de la figura



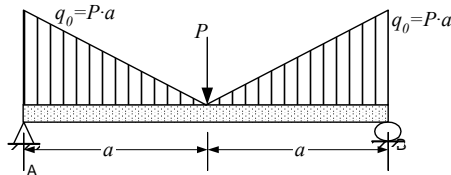
9.28.- Hallar las deformadas lineal y angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una carga distribuida  $p = H \sin(\pi x/2l)$



9.29.- Hallar las deformadas lineal y angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada cargada con un momento uniformemente y constante  $m_0$

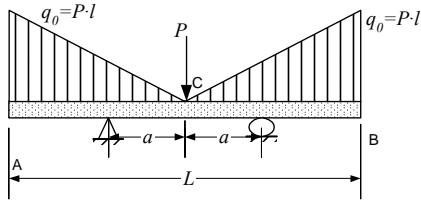


9.30.- Hallar la deformación máxima del sistema de la figura

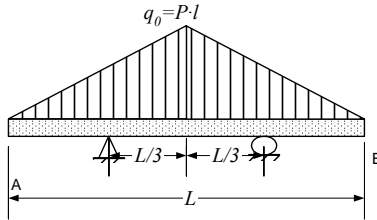


9.31.- Determinar la relación  $a/l$  para que la deformada en el centro sea nula.

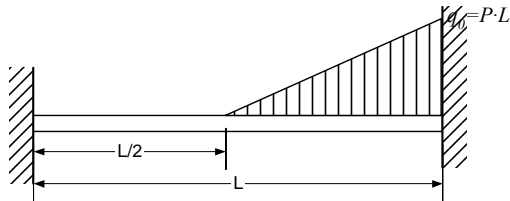




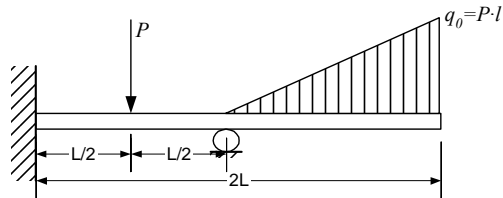
9.32.- Hallar la deformada en el centro y en los extremos del sistema de la figura.



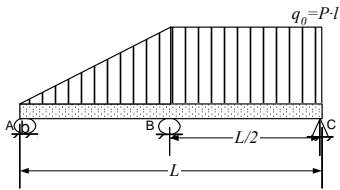
9.33.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura.



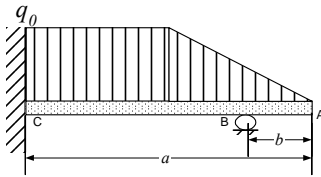
9.34.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura.



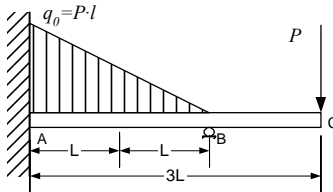
9.35.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura



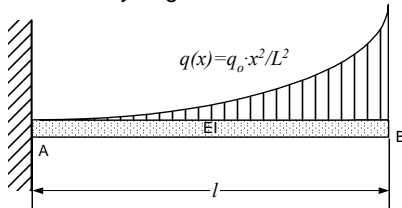
9.36.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura.



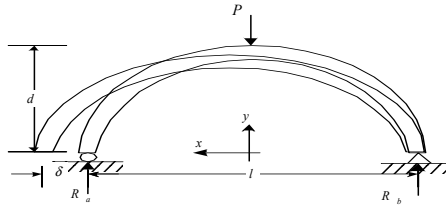
9.37.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura



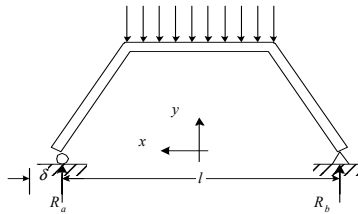
9.38.- Hallar las deformadas lineal y angular máximas en el sistema de la figura.



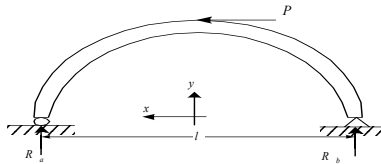
9.39.- Hallar el desplazamiento que tiene el apoyo móvil de una viga con forma cosenoidal y carga puntual en su centro



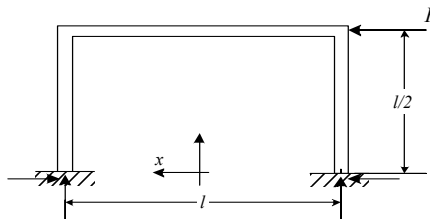
9.40.- Hallar el desplazamiento que tiene el apoyo móvil de una viga con forma cosenoidal y carga puntual en su centro



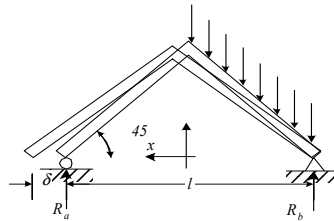
9.41.- Hallar las reacciones de la viga de forma cosenoidal de la figura



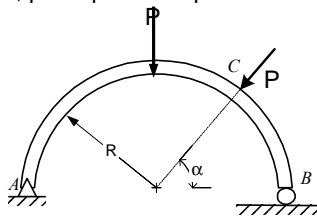
9.42.- Hallar las reacciones de los empotramientos del pórtico de la figura



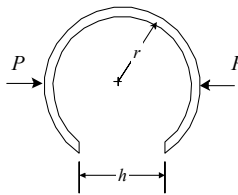
9.43.- Hallar el desplazamiento del sistema de la figura



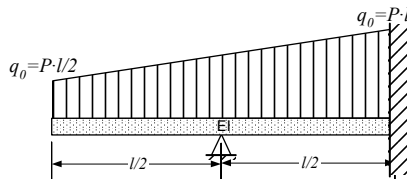
9.44.- En el sistema de la figura: a) Hallar el desplazamiento horizontal producido por las fuerzas P. b) El valor de  $\alpha$ , para que el desplazamiento sea nulo.



9.45.- Un anillo de radio "R" de alambre de acero de radio "r" tiene una separación de h. Se pide la fuerza P que cierra esta separación



9.46.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura



## **10.- PANDEO DE COLUMNAS**

### **10.1.- INTRODUCCIÓN**

Los procedimientos de análisis de esfuerzos y deformaciones se estudiaron en detalle en los capítulos anteriores. En este capítulo se tratará la cuestión de la posible inestabilidad de sistemas estructurales.

No hay inestabilidad en barras “cortas” sometidas a fuerzas de compresión sin embargo en barras “largas” sometidas a fuerzas de compresión hay inestabilidad y la consideración de la sola resistencia del material no es suficiente para predecir la falla. Cuando una pieza larga y delgada esta sometida a compresión se verifica que la falla de la misma ocurre mucho antes de que los esfuerzos sobrepasen el limite de fluencia del material. Este tipo de sollicitación se conoce como pandeo

Este fenómeno se presenta en numerosas situaciones con cargas de compresión. Así, Placas delgadas no pueden transmitir compresión. Vigas angostas sin arriostramiento lateral, pueden doblarse lateralmente. Tanques de almacenamiento y silos metálicos pueden deformarse gravemente por la presión externa (viento) o interna (líquidos o granos). Un tubo de pared delgada puede arrugarse cuando se somete a una torsión.

### **10.2.- TIPOS DE APOYOS**

Los apoyos de las columnas son los mismos de las vigas, es decir :

- Apoyo móvil
- Apoyo Fijo
- Empotramiento

### **10.3.- TIPOS DE COLUMNAS**

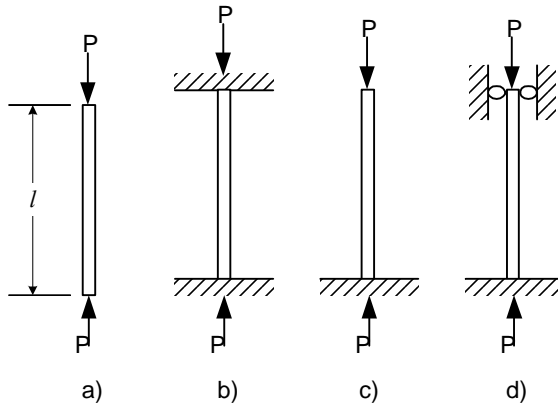


Fig. 10.1 Tipos de Columnas

De la combinación de estos apoyos se obtienen los cuatro tipos de Columnas básicas

- a) Extremos articulados o libres
- b) Ambos extremos empotrados
- c) Un extremo empotrado el otro libre
- d) Un extremo empotrado el otro articulado

### 10.3.- CARGA DE PANDEO DE EULER PARA COLUMNAS CON EXTREMOS ARTICULADOS

Analizando una columna con extremos articulados

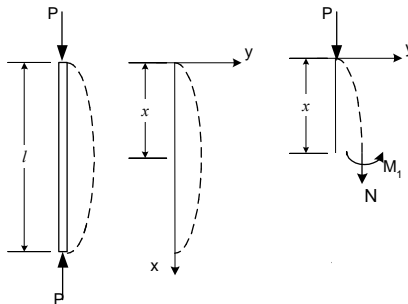


Fig. 10.2 Elástica de una Columna con Extremos Articulados

A una distancia "x" lña deformada de la columna es "y"

De la estática

$$M = Py \quad (10.1)$$

$$N = P \quad (10.2)$$

$$Q = 0 \quad (10.3)$$

De la ecuación de doble integración en flexión

$$d^2y/dx^2 = M/EI \quad (10.4)$$

$$d^2y/dx^2 = -Py/EI \quad (10.5)$$

$$d^2y/dx^2 + Py/EI = 0 \quad (10.6)$$

La Solución de esta ecuación es

$$y = C1 \sin C2x + C3 \cos C4x \quad (10.7)$$

$$dy/dx = C1C2 \cos C2x - C3C4 \sin C4x \quad (10.8)$$

$$d^2y/dx^2 = -C1C2^2 \sin C2x - C3C4^2 \cos C4x \quad (10.9)$$

Reemplazando 8.7 y 8.9 en 8.6

$$(-C1C2^2 \sin C2x - C3C4^2 \cos C4x) + P(C1 \sin C2x + C3 \cos C4x)/EI = 0 \quad (10.10)$$

$$\sin C2x(-C1C2^2 + PC1/EI) + \cos C4x(-C3C4^2 + PC3/EI) = 0 \quad (10.11)$$

$$-C1C2^2 + PC1/EI = 0 \quad C2 = (P/EI)^{1/2} \quad (10.12)$$

$$-C3C4^2 + PC3/EI = 0 \quad C4 = (P/EI)^{1/2} \quad (10.13)$$

$$y = C1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C3 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \quad (10.14)$$

Las constantes  $c1$  y  $c3$  se hallan de las condiciones de borde. En los extremos de la columna no hay deformación.

Cuando  $x=0$   $y=0$

$$0 = C1 \sin(0) + C3 \cos(0) \quad (10.15)$$

$$0 = C3 \quad (10.16)$$

Cuando  $x=l$   $y=0$

$$0 = C1 \sin(P/EI)^{1/2} l \quad (10.17)$$

Hay dos posibilidades :

$$C1=0 \quad \text{descartada ya que anula toda Solución}$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}l = n\pi \quad \text{Solución} \quad (10.18)$$

Entonces 
$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (10.19)$$

Empleando la relacion  $I = A k^2$  donde A es el área y k es el radio de giro

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 E}{\left(\frac{l}{k}\right)^2} \quad (10.20)$$

Donde  $l/k$  recibe el nombre de relacion de esbeltez de la columna.

#### 10.4.- PANDEO ELÁSTICO DE COLUMNAS CON DIFERENTES RESTRICCIONES EN SUS EXTREMOS

Procedimientos iguales a los estudiados en la sección anterior se pueden utilizar para determinar las cargas de pandeo elástico de columnas con diferentes condiciones de borde. Las soluciones de tales problemas son muy sensibles a las restricciones de extremo. Por ejemplo la carga crítica de pandeo para una columna empotrada en su base con una carga vertical en su extremo libre superior, es

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{(2l)^2} \quad (10.21)$$

En este caso extremo la carga crítica es sólo 1/4 de la de extremos articulados

Para una columna empotrada en un extremo y articulada en el otro

$$P_{cr} = 2.05 \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (10.22)$$

En tanto que para una columna empotrada en ambos extremos

$$P_{cr} = 4 \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (10.23)$$

Las dos últimas ecuaciones indican que mediante la restricción en los extremos las cargas de pandeo críticas van aumentando notablemente por encima del caso fundamental.

Todas las fórmulas anteriores pueden asemejarse al caso fundamental siempre que en vez de la longitud real de la columna se utilice la longitud efectiva de la misma

Entonces 
$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (10.24)$$



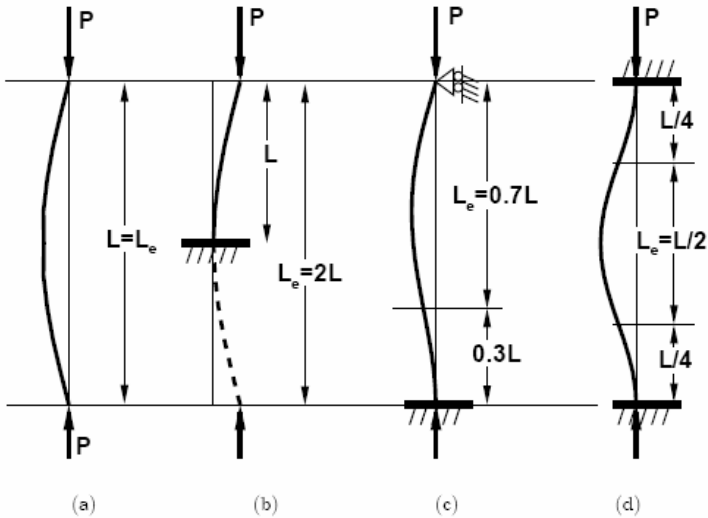


Fig. 10.3 Longitudes Equivalentes

### 10.5.- FALLA POR COMPRESIÓN VS FALLA POR PANDEO

En piezas cortas sometidas a compresión la falla ocurre cuando los esfuerzos superan los límites de fluencia. En piezas largas y esbeltas sometidas a compresión, la falla ocurre por pandeo a pesar de que los esfuerzos son mucho menores al límite de fluencia

Gráficamente

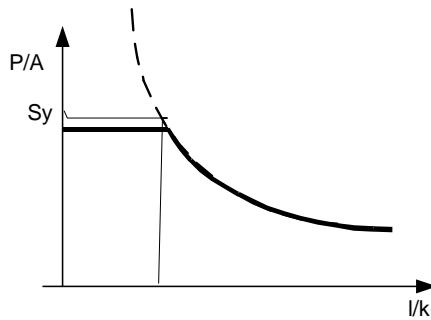


Fig. 10.4 Compresión VS Pandeo

En la grafica se tiene la relación de esbeltez ( $l/k$ ) como abcisa y la carga por unidad de área ( $P/A$ ) como ordenada. Entonces para elementos con relacion de esbeltez bajos la falla ocurre cuando la carga por unidad de área es mayor a la fluencia. Para elementos con relacion de esbeltez altos la falla se determina por la ecuación 8.22.

10.6.- ECUACIÓN DE LA SECANTE

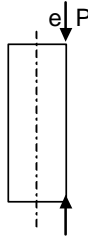


Fig. 10.5 Columna con Carga Excéntrica

Cuando una columna se encuentra cargada excéntricamente, es decir que la acción de la carga no coincide con el eje centroidal de la columna ocurre que esta excentricidad produce un momento inicial de magnitud  $Pe$ . En estos casos se deduce una ecuación llamada formula de la secante cuyo formula es

$$P/A = S_y / (1 + (ec/k^2) \text{Sec}[(1/k)(P/4Ae)^{1/2}]) \tag{10.25}$$

En esta ecuación  $c$  es la distancia del plano neutro de flexión a la superficie exterior.

En la grafica se comparan los resultados de la ecuación de Euler con los de la Secante

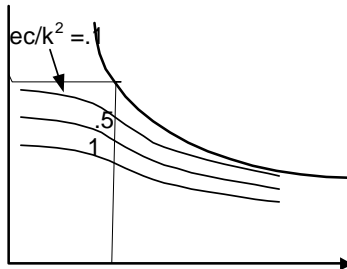


Fig. 10.6 ecuación de la Secante

## PROBLEMAS RESUELTOS

10.1. Se pide hallar la carga que provoca pandeo para los cuatro tipos de columnas. Material acero; longitud 10 m y diámetro 1 cm.

Solución :

$$I = \pi d^4/64$$

$$P_{cr} = \lambda \pi^2 E (\pi d^4/64)/l^2$$

$$\lambda = 1 \quad P_{cr} = 1.01 \text{ Kg}$$

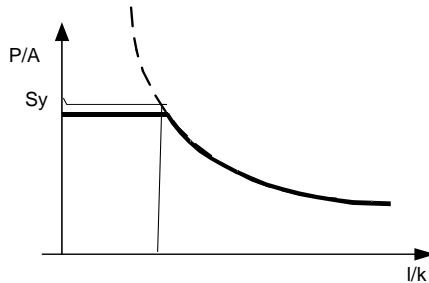
$$\lambda = 4 \quad P_{cr} = 4.06 \text{ Kg}$$

$$\lambda = 1/4 \quad P_{cr} = 0.25 \text{ Kg}$$

$$\lambda = 2 \quad P_{cr} = 2.03 \text{ Kg}$$

10.2. Determinar la relación de esbeltez crítica. Encima de la cual la falla se produce por pandeo y debajo de la cual la falla se debe a esfuerzos que superan la fluencia. Tomar  $\lambda = 1$ ,  $S_y = 1800 \text{ Kg/cm}^2$ .

Solución :



Falla por compresión

$$P/A = S_y$$

Falla por pandeo

$$P_{cr}/A = \lambda \pi^2 E / (l/k)^2$$

Igualando  $\lambda \pi^2 E / (l/k)^2 = S_y$

$$(l/k) = (\lambda \pi^2 E / S_y)^{1/2} = 107.3$$

10.3. En el anterior problema. Si el diámetro de la barra es 1 cm cual es la longitud que da la relacion de esbeltez calculada.

Soluciona :

$$I = \pi d^4/64$$

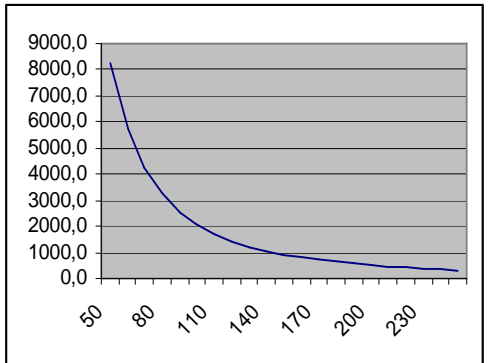
$$A = \pi d^2/4$$

$$k = (I/A)^{1/2} = d^2/16 = 0.0625 \text{ cm}^2$$

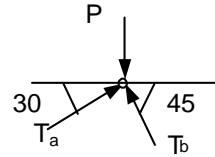
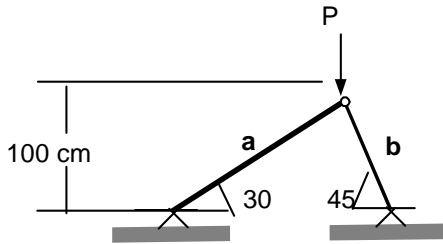
$$l = k \cdot 107.3 = 6.7 \text{ cm}$$

10.4. Hallar (P/A) para valores de (l/k) de 0 a 250 en la formula de Euler. Graficar los resultados. Tomar  $\lambda = 1$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^6$  y  $S_y = 1800 \text{ Kg/cm}^2$

(l/k)	$P_{cr}/A = \lambda \pi^2 E/(l/k)^2$
50	8290,5
60	5757,3
70	4229,8
80	3238,5
90	2558,8
100	2072,6
110	1712,9
120	1439,3
130	1226,4
140	1057,5
150	921,2
160	809,6
170	717,2
180	639,7
190	574,1
200	518,2
210	470,0
220	428,2
230	391,8
240	359,8
250	331,6



10.5. Hallar la carga máxima que puede soportar el sistema antes de sufrir Pandeo. Material acero y diámetro 1 cm



Solución:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad T_a \cos 30 = T_b \cos 45 & (i) \\ \Sigma F_y = 0 & \quad T_a \sin 30 + T_b \sin 45 = P & (ii) \\ \text{DE i y ii} & \quad T_b \cos 45 / \cos 30 \sin 30 + T_b \sin 45 = P & (iii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_b &= 0.8965 P \\ T_a &= 0.732 P \\ L_a \sin 30 &= 100 & l_a &= 200 \text{ cm} \\ L_b \sin 45 &= 100 & l_b &= 141.42 \text{ cm} \end{aligned}$$

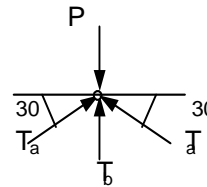
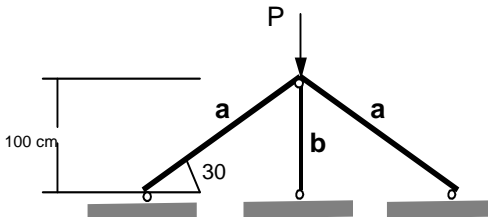
$$P_{cr} = \lambda \pi^2 EI / l^2$$

Para A  $0.732 P = \pi^2 2.1 \times 10^6 \pi (1)^4 / 64 / 200^2$   
 $P = 34.74 \text{ Kg}$

Para B  $0.8965 P = \pi^2 2.1 \times 10^6 \pi (1)^4 / 64 / 141.42^2$   
 $P = 56.74 \text{ Kg}$

De donde  $P_{max} = 34.74 \text{ Kg}$

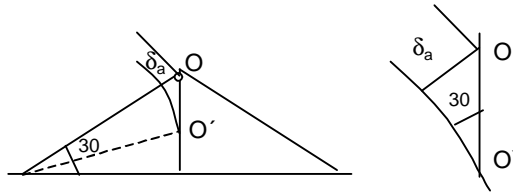
10.6. Hallar la carga máxima que puede soportar el sistema antes de sufrir Pandeo. Material acero y diámetro 1 cm



Solución:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad T_a \cos 30 = T_a \cos 30 & \text{No aporta} \\ \Sigma F_y = 0 & \quad 2 T_a \sin 30 + T_b = P & (i) \\ \Sigma M = 0 & \quad \text{Las fuerzas son concurrentes} & \text{No aporta} \end{aligned}$$

El 10. es hiperestático por lo que se debe hallar la ec de deformadas



$$\begin{aligned} \delta_b &= OO' \\ \delta_a &= OO' \sin 30 \\ \delta_b &= \delta_a / \sin 30 \\ T_b l_b / EA &= T_a l_a / (EA \sin 30) \\ l_a \sin 30 &= l_b \quad ; \quad l_a = 200 \text{ cm} \\ T_b l_a \sin 30 &= T_a l_a / \sin 30 \\ T_b &= T_a / \sin^2 30 \\ T_b &= 4 T_a \end{aligned} \quad (ii)$$

De i y ii

$$2 (4 T_b) \sin 30 + T_b = P$$

$$T_b = 0.2 P$$

$$T_a = 0.8 P$$

Para A

$$0.2 P = \pi^2 \cdot 2.1 \times 10^6 \cdot \pi (1)^4 / 64 / 2002$$

$$P = 127.17 \text{ Kg}$$

Para B

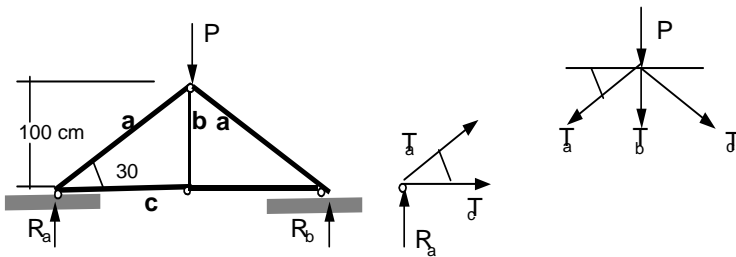
$$0.8 P = \pi^2 \cdot 2.1 \times 10^6 \cdot \pi (1)^4 / 64 / 1002$$

$$P = 127.17 \text{ Kg}$$

De donde

$$P_{\max} = 127.17 \text{ Kg}$$

10.7. Si  $P = 1000 \text{ Kg}$  hallar el diámetro de los elementos sometidos a compresión para evitar el Pandeo. Material acero



Solución :

Por simetría  $R_a = R_b = P/2 = 500 \text{ Kg}$

En el apoyo izquierdo

$$\Sigma F_x = 0 \quad T_a \cos 30 + T_c = 0 \tag{i}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad T_a \sin 30 + R_a = 0 \tag{ii}$$

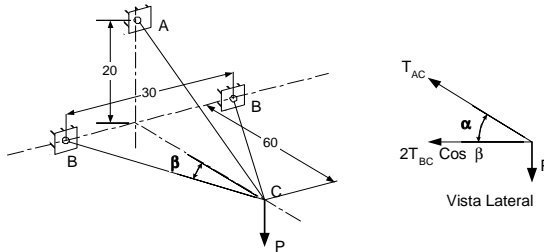
$$T_a = -R_a / \sin 30 = -1000 \text{ Kg (Compresión)}$$

$$T_c = -T_a \cos 30 = 866.2 \text{ Kg (Tracción)}$$

$$T_a = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 E \left( \frac{\pi d^4}{64} \right)}{(100 / \sin 30)^2}$$

De donde  $d = 2.5 \text{ cm}$

10.8. Se pide hallar el diámetro de la barras BC. Material acero



Solución :

Del 10.12 del capítulo 1 :

$$T_{AC} = 3163.09 \text{ Kg} \quad \text{tracción}$$

$$T_{BC} = -1546.56 \text{ kg} \quad \text{Compresion - Pandeo}$$

$$L_{BC} = (152+602)1/2$$

$$L_{BC} = 61.84 \text{ cm}$$

$$P_{cr} = \pi^2 EI/l^2 = \pi^2 \cdot 2.1 \times 10^6 (\pi d^4 / 64) / l^2 = 1546.56$$

$$d_{BC} = 1.55 \text{ cm}$$

Compárese con

$$d_{AC} = 1.49 \text{ cm hallados en el capítulo 1}$$

10.9. Graficar la relacion fuerza sobre área  $P/A$  vs relacion de esbeltez  $l/k$  utilizando la formula de la secante. Tomar  $ec/k^2 = 0, 0.1, 0.5$  y  $1$ .  $S_y = 1800 \text{ Kg/cm}^2$

Solución :

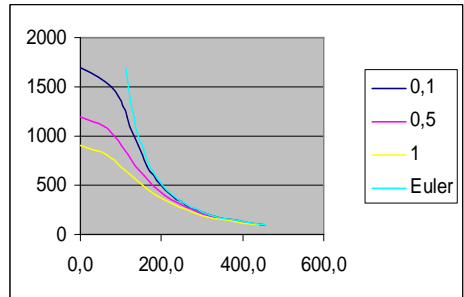
$$P/A = S_y / (1 + (ec/k^2) \text{Sec}[(l/k)(P/4Ae)^{1/2}]) \quad (8.23)$$

En la ecuación no se puede despejar P/A pero si l/k

$$\frac{l}{k} = \frac{1}{\sqrt{\frac{P/A}{4E}}} \text{Cos}^{-1} \frac{ec/k^2}{\frac{S_y}{P/A} - 1}$$

Graficando

P/A	$\frac{l}{k} = \frac{1}{\sqrt{\frac{P/A}{4E}}} \text{Cos}^{-1} \frac{ec/k^2}{\frac{S_y}{P/A} - 1}$			
100	455,3	453,6	446,7	438,2
200	321,9	319,4	309,1	296,2
300	262,8	259,5	246,1	229,2
400	227,6	223,5	206,9	185,6
500	203,6	198,6	178,5	152,4
600	185,9	179,9	156,0	123,9
700	172,1	165,1	136,6	96,5
800	161,0	152,8	118,8	65,9
900	151,8	142,1	101,2	0,0
1000	144,0	132,5	82,1	
1100	137,3	123,5	58,3	
1200	131,4	114,6	0,0	
1300	126,3	105,1		
1400	121,7	94,0		
1500	117,5	78,4		
1600	113,8	46,6		
1700	110,4	0,0		



Nótese que la curva de Euler es la de la secante con  $ec/k^2 = 0$



## PROBLEMAS PROPUESTOS

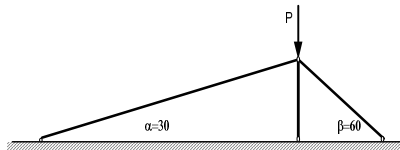
10.10. Que ancho debe tener una barra cuadrada para que no se produzca pandeo para los cuatro tipos de columnas. Material acero, carga 100 Kg. y longitud 10 m

10.11. Determinar la relacion de esbeltez critica para los cuatro tipos de columnas. Encima de la cual la falla se produce por pandeo y debajo de la cual la falla se debe a esfuerzos que superan la fluencia.  $S_y = 1800 \text{ Kg/cm}^2$ .

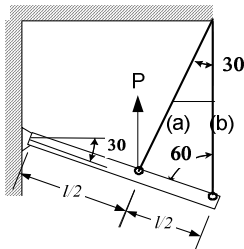
10.12. Hallar el diámetro de una barra circular solida que tiene la misma resistencia al pandeo que otra hueca con diámetros externo e interno  $D$  y  $d$  respectivamente

10.13. Hallar  $(P/A)$  para valores de  $(l/k)$  de 0 a 250 para los cuatro tipos de columnas en la formula de Euler. Graficar los resultados. Tomar  $E = 2.1 \cdot 10^6$  y  $S_y = 1800 \text{ Kg/cm}^2$

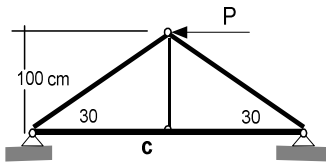
10.14. Si  $P = 1000 \text{ Kg}$  hallar el diámetro de los elementos sometidos a compresión para evitar el Pandeo. Material acero



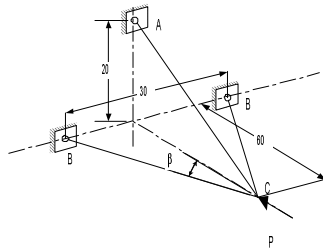
10.15. Hallar la carga máxima que puede soportar el sistema antes de sufrir Pandeo. Material acero y diámetro 1 cm



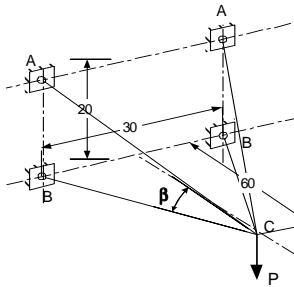
10.16. Hallar la carga máxima que puede soportar el sistema antes de sufrir Pandeo. Material acero y diámetro 1 cm



10.17. Hallar la carga máxima que puede soportar el sistema antes de sufrir Pandeo. Material acero y diámetro 1 cm



10.18. Se pide hallar el diámetro de la barras BC. Material acero



10.19. Graficar la relacion fuerza sobre área  $P/A$  vs relacion de esbeltez  $l/k$  utilizando la formula de la secante. Tomar  $ec/k^2 = 0, 0.1, 0.5$  y  $1$ .  $S_y = 3000 \text{ Kg/cm}^2$