

Mecánica Clásica
Tema 1
Configuración y actitud del sólido rígido

EIAE

25 de septiembre de 2011

Referencias	2
Modelos	3
Grados de libertad	4
Grados de Libertad de un Sólido	5
Sistemas de referencia y vectrices	6
Vectrices y matrices de componentes	7
Configuración del sólido rígido	8
Matriz de rotación del sólido rígido	9
Matriz de giro y cambio de base	11
Giro respecto a un eje fijo	12
Propiedades de las matrices de giro	13
Las matrices de rotación son ortogonales	14
Teorema de Euler	18
Matriz de giro con ángulos de Euler	19
Ángulos de Euler clásicos / Tait-Bryan	23
Sistemas de representación de la actitud	24



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Referencias

- Material de la asignatura (Disponibles gradualmente en Moodle)
 - Transparencias de teoría, enunciados y soluciones de problemas
- Material de apoyo
 - M. Prieto Alberca, *Curso de Mecánica Racional: Cinemática y Estática*, ADI, Madrid, 1990.
 - W.T. Thomson, *Introduction to Space Dynamics*, Dover 1986.
 - Beer y Johnston, *Mecánica Vectorial para Ingenieros*. Tomo 2 Dinámica. McGraw-Hill.
 - H. Schaub y J. Junkins, *Analytical Mechanics of Space Systems*, AIAA, Reston, Virginia, 2003. (cap. 3 y 4)
 - L. Meirovich, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill 1970 (cap. 3 y 4).
 - Jesús Peláez, *Problemas de Mecánica*, Publ. ETSIA

Modelos

Partícula o Punto: Un cuerpo cuyas dimensiones u orientación no influyen en el movimiento. Se modela como un punto geométrico.

Sólido rígido: Conjunto de partículas finito o infinito cuyas distancias relativas se mantienen constantes (y conocidas):

$$|\mathbf{r}_{ij}| = \text{Const.} \quad \forall i, j$$

- En cinemática, los puntos no tienen masa; en dinámica sí. En dinámica se usa también un modelo continuo, además del de puntos.
- Un sistema de referencia cumple las propiedades anteriores, y **en cinemática** se considera equivalente a un sólido.
- Para estudiar el movimiento de un sólido, se toma un sistema de referencia rígidamente unido a él: en este sistema, las coordenadas de los puntos del sólido son siempre constantes.
- Los sólidos reales sufren deformaciones, pero suelen ser muy pequeñas, y en Mecánica Clásica se desprecian.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow and orange gradient bar at the bottom.

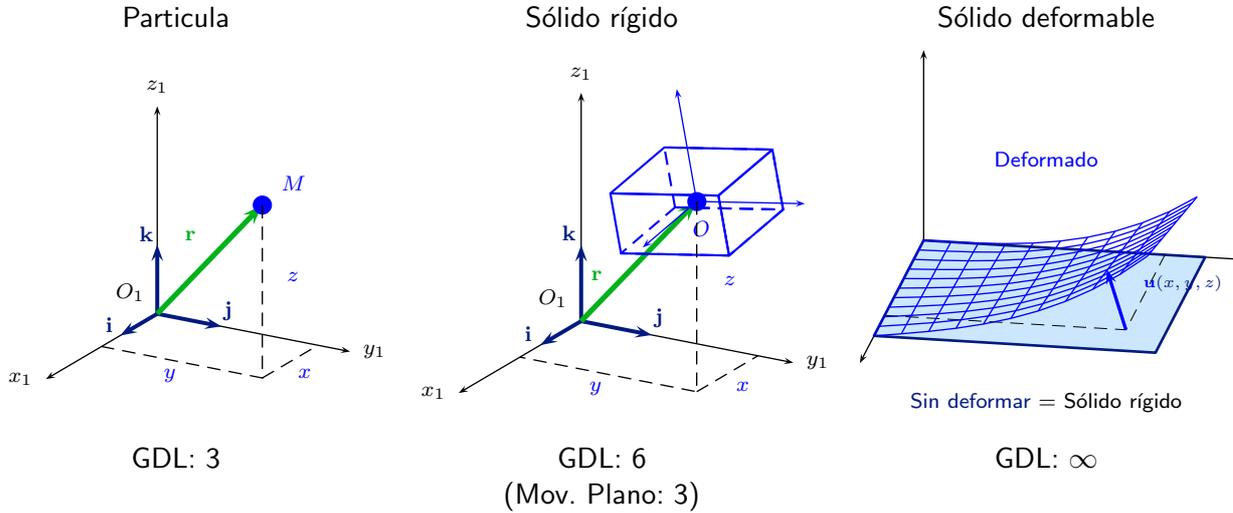
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Grados de libertad

Grados de libertad: Número de parámetros **independientes** necesarios para describir la configuración de un sistema.

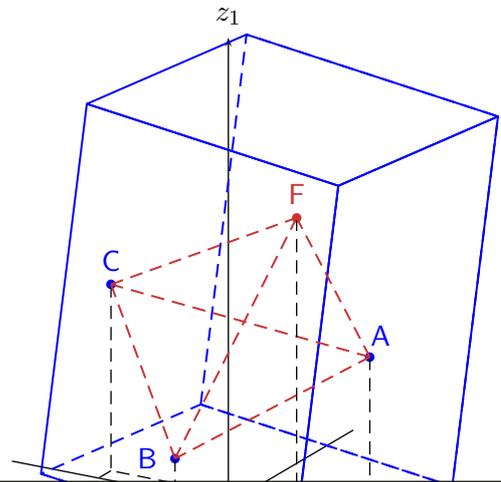
Para sistemas **libres** (sin ligaduras):



Grados de Libertad de un Sólido

- Un sólido puede tener ∞ puntos, pero solo hacen falta 6 parámetros para determinar su configuración.

Pto	Coord	GDL	Ligaduras
A	x_A, y_A, z_A	3	-
B	x_B, y_B, z_B	2	$ \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = d_{AB}$
C	x_C, y_C, z_C	1	$ \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C = d_{AC}$ $ \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C = d_{BC}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
F	x_F, y_F, z_F	0	$ \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_F = d_{AF}$ $ \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_F = d_{BF}$ $ \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_F = d_{CF}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

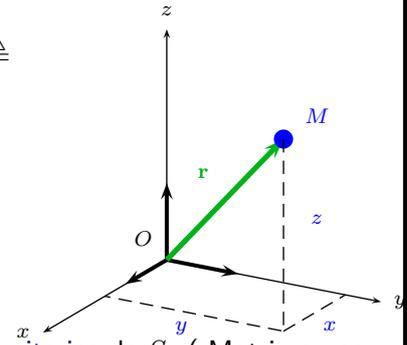
Sistemas de referencia y vectrices

Vector posición de la partícula M en el sistema de referencia $S_1 \triangleq Oxyz$

$$\mathbf{r}^M = \mathbf{OM} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Coordenadas cartesianas de la partícula M en S_1

$$x = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{i}, \quad y = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{j}, \quad z = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{k}$$



Vectriz \mathcal{R}_1 del sistema de referencia S_1 : matriz fila de los **vectores unitarios** de S_1 (¡Matriz cuyas componentes son vectores!)

$$\mathcal{R}_1 = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$$

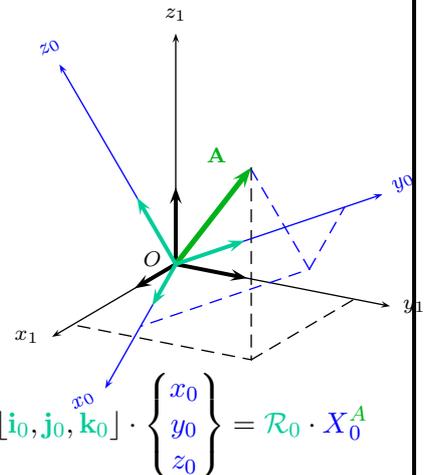
Matriz de componentes X_1^M del vector \mathbf{r}^M en S_1 : Matriz columna de las coordenadas cartesianas de M en S_1

$$X_1^M = [x, y, z]^T$$

Vectrices y matrices de componentes

- El **vector A** es una entidad geométrica del espacio vectorial \mathbb{R}^3
- Se maneja mediante su **matriz de componentes** en un sistema de referencia determinado
- Para evitar ambigüedades, se especifica el sistema mediante su vectriz

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \mathcal{R}_1 \cdot X_1^A = \\ &= x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0 = [\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0] \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^A \end{aligned}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Configuración del sólido rígido

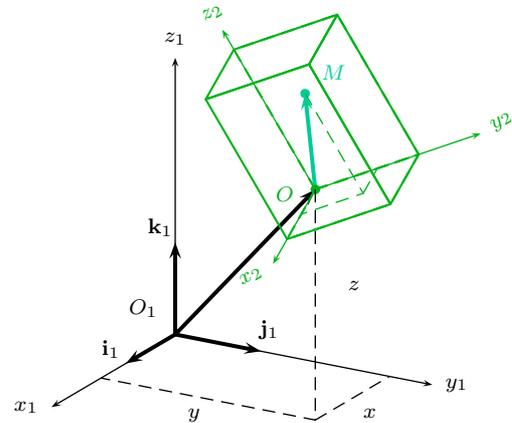
- Para especificar la configuración de un sólido:
 - Se escoge un punto O del sólido (no necesariamente el CDM)
 - Se le fija un sistema de referencia $S_2 \triangleq O x_2 y_2 z_2$
- Así, el vector posición de un punto cualquiera M del sólido es:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_1 \mathbf{M} &= \mathbf{O}_1 \mathbf{O} + \mathbf{O} \mathbf{M} = \\ &= x \mathbf{i}_1 + y \mathbf{j}_1 + z \mathbf{k}_1 + \xi \mathbf{i}_2 + \eta \mathbf{j}_2 + \zeta \mathbf{k}_2 = \\ &= \mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M \end{aligned}$$

Nótese que

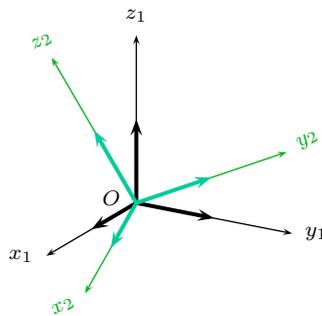
$$X_2^M = [\xi, \eta, \zeta]^T$$

es constante porque M es parte del sólido rígido. X_1^O y \mathcal{R}_2 cambian al moverse el sólido.



Matriz de rotación del sólido rígido

Para calcular $\mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M$, hay que conocer $\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1)$ ó $\mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2)$,



para tenerlos proyectados en los mismos ejes.

Los cosenos directores de los versores de \mathcal{R}_2 son

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_2 &= (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j}_2 &= (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 &= (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 \end{aligned}$$

En forma matricial,

$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Grados de libertad del sólido rígido libre

- Vector posición de un punto M de S_2 en ejes fijos:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_1\mathbf{M} &= \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{X}_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{X}_2^M = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{X}_1^O + \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M = \\ &= \mathcal{R}_1 \cdot \left(\mathbf{X}_1^O + \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M \right) \end{aligned}$$

- \mathbf{X}_2^M es constante: identifica de qué punto del sólido se trata.
- La configuración requiere 12 parámetros: $3 (\mathbf{X}_1^O) + 9 (\mathbf{Q}_{12})$
- Solo **3** componentes de \mathbf{Q}_{12} son independientes. Sus columnas son las matrices de componentes de los versores de S_2 , que cumplen **6** condiciones:

- Ortogonales: $\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 0 \quad \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 0 \quad \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 0$
- Unitarios: $\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = 1 \quad \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 1 \quad \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 1$

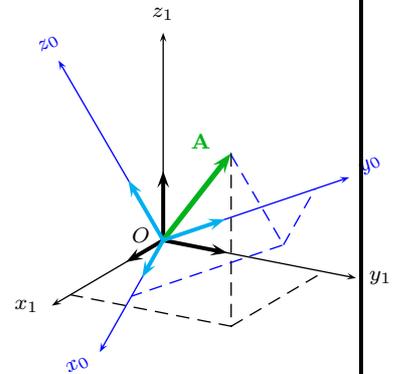
- Un sólido rígido tiene **6** Grados de Libertad:

- 3** coordenadas de un punto \mathbf{X}_1^O Traslación
- 3** de la matriz de rotación \mathbf{Q}_{12} Rotación

Matriz de giro y cambio de base

\mathbf{Q}_{10} determina la orientación de un sistema de referencia S_0 (\equiv Sólido) respecto a otro S_1 : Puede usarse para cambiar de ejes un vector

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0] \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \\ &= \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{X}_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot \mathbf{X}_0^A \end{aligned}$$



Como $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{10} \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \cdot \mathbf{Q}_{10}^T$,

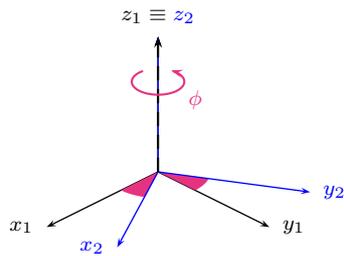
$$\mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{X}_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot \mathbf{X}_0^A = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{10} \cdot \mathbf{X}_0^A \Rightarrow \boxed{\mathbf{X}_1^A = \mathbf{Q}_{10} \cdot \mathbf{X}_0^A}$$

$$\mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{X}_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot \mathbf{Q}_{10}^T \cdot \mathbf{X}_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot \mathbf{X}_0^A \Rightarrow \boxed{\mathbf{X}_0^A = \mathbf{Q}_{10}^T \cdot \mathbf{X}_1^A}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Giro respecto a un eje fijo

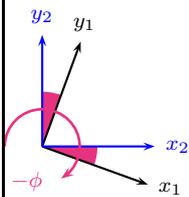


Giro ϕ alrededor del eje Oz : $S_1 \rightarrow S_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_2 &= \cos \phi \mathbf{i}_1 + \sin \phi \mathbf{j}_1 + 0 \cdot \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j}_2 &= -\sin \phi \mathbf{i}_1 + \cos \phi \mathbf{j}_1 + 0 \cdot \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 &= 0 \cdot \mathbf{i}_1 + 0 \cdot \mathbf{j}_1 + 1 \cdot \mathbf{k}_1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_2 = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12}$$

Giro inverso:



$$[\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{21} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T$$

Propiedades de las matrices de giro

- El elemento nulo del grupo de los giros es la matriz unidad:

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Obvio: } \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{U}$$

- La composición de giros se hace con el producto de matrices:

$$\left. \begin{aligned} S_1 \rightarrow S_2 : \mathcal{R}_2 &= \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12} \\ S_2 \rightarrow S_3 : \mathcal{R}_3 &= \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{23} \end{aligned} \right\}$$

$$S_1 \rightarrow S_3 : \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{13}$$

- No es conmutativa, pero sí asociativa, como el producto de matrices.

$$\mathbf{Q}_{14} = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{Q}_{34} = (\underbrace{\mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23}}_{\mathbf{Q}_{13}}) \cdot \mathbf{Q}_{34} = \mathbf{Q}_{12} \cdot (\underbrace{\mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{Q}_{34}}_{\mathbf{Q}_{24}})$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Las matrices de rotación son ortogonales

- Giro directo $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$:

$$[\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$

- Las **columnas** son las componentes de los **versores girados** en ejes fijos
- Las filas, las de los versores fijos en **ejes girados**

- Giro inverso $S_2 \xrightarrow{Q_{21}} S_1$: Las filas/**columnas** están intercambiadas.

$$[\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{bmatrix}$$

La matriz del giro inverso es la traspuesta de la del directo:

$$Q_{12} = Q_{21}^T$$

$$Q_{21} = Q_{12}^T$$

Las matrices de rotación son ortogonales

- Se considera el giro identidad $S_1 \xrightarrow{Q_{11}} S_1$ como composición de un giro $S_1 \xrightarrow{Q_{12}} S_2$ y su inverso $S_2 \xrightarrow{Q_{21}} S_1$

$$Q_{11} = Q_{12} \cdot Q_{21} = Q_{12} \cdot Q_{12}^T = \mathbf{U} \Rightarrow Q_{12}^{-1} = Q_{12}^T$$

La matriz inversa de una matriz de giro es su traspuesta .

- Por esta propiedad Q_{12} es **ortogonal**. Pertenece a $SO(3)$ (Special Orthogonal Group) en \mathbb{R}^3 , no conmutativo, con elemento neutro \mathbf{U} y elemento inverso [En la notación de álgebra, $\mathcal{O}^+(3, \mathbb{R})$].
- Las matrices con $|Q| = -1 \in \mathcal{O}^-(3, \mathbb{R})$. No son matrices de rotación, sino de rotación + simetría .
Ej: además de girar un coche, lo transforman en coche inglés.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades de la matriz de rotación

- Las matrices de rotación cumplen $|Q| = 1$
 - Por ser ortogonales, $|Q \cdot Q^T| = |U| = 1 \rightarrow |Q| = \pm 1$.
 - Las de rotación,

$$|Q_{12}| = |[i_2 \ j_2 \ k_2]| = \left| \begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \right| = i_2 \cdot (j_2 \wedge k_2) = i_1 \cdot (j_1 \wedge k_1) = +1$$

por ser el volumen de un cubo de lado 1.

- $|Q - U| = |Q - Q \cdot Q^T| = |Q| \cdot |U - Q^T| = |U - Q^T| = |U - Q| = -|Q - U| \Rightarrow |Q - U| = 0$

Propiedades de la matriz de rotación

- Los autovalores cumplen
 - $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |Q_{12}| = 1$
 - $Q_{12} u_i = \lambda_i u_i$; $\bar{u}_i^T \underbrace{Q_{12}^T Q_{12}}_U u_i = \lambda_i \bar{\lambda}_i \bar{u}_i^T \cdot u_i \Rightarrow \lambda_i \bar{\lambda}_i = 1$

- Autovalores posibles:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

trivial: $Q_{12} = U$

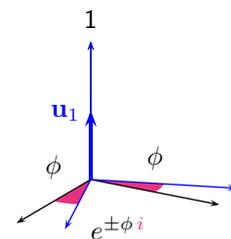
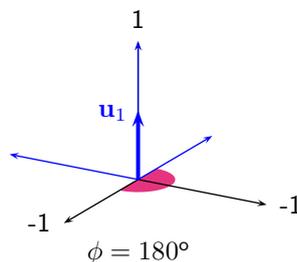
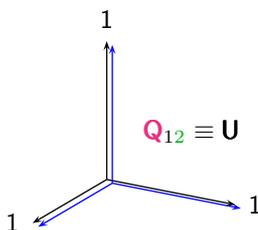
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

giro de 180° alrededor de u_1

(\bar{a} : complejo conjugado de a).

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi}$$

giro ϕ alrededor de u_1



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Teorema de Euler

- El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo es un giro de ángulo ϕ alrededor de un eje que pasa por el punto fijo.
 - Eje: dirección del autovector \mathbf{u}_1 asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ de \mathbf{Q}_{12}
 - Ángulo de giro: exponente ϕ del par de autovalores complejos conjugados $\lambda_{2,3} = e^{\pm\phi i}$ de \mathbf{Q}_{12}
- Parametrización del giro \mathbf{Q}_{12} : (9)
 - Parámetros eje-ángulo de Euler: $\phi, \mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}$ (4)
 - Vector principal de rotación: $\phi = \phi \mathbf{a}$ (3)
 - Vector de Gibbs (Par. Rodrigues): $\mathbf{g} = \tan \frac{\phi}{2} \mathbf{a}$ (3)
 - Cuaternios: (Par. Euler) $\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{a} \right)$ (4)
 - Ángulos de Euler: ψ, θ, φ (3)
- Todas las parametrizaciones mínimas (3) tienen alguna singularidad

Matriz de giro con ángulos de Euler

- La rotación del sólido rígido tiene 3 grados de libertad
- La matriz de giro tiene 3 parámetros independientes
- \mathbf{Q} se puede formar con 3 giros independientes sucesivos:

$$1 \xrightarrow{\psi} 2 \xrightarrow{\theta} 3 \xrightarrow{\phi} 4 \quad \mathbf{Q}_{14} = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{Q}_{34}$$

- 2º y 3er giros alrededor de las nuevas posiciones de los ejes
- Se pueden repetir ejes, pero no seguidos (sería el mismo)
- 12 combinaciones posibles^a. Más comunes:

zxz	Ángulos de Euler clásicos	Maquinaria, Astronomía
zyz		Mecánica cuántica
zyx	Tait-Bryan	Mecánica del vuelo
xyz		VisualNastran (+), Maple (-)

^acfr. Peter C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics*, p. 20.

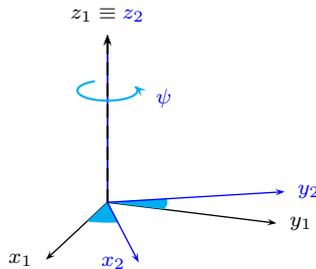
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Matriz de giro con ángulos de Euler

$$\mathcal{R}_1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\theta} \mathcal{R}_3 \xrightarrow{\phi} \mathcal{R}_4$$

- **Precesión:** Giro ψ alrededor de $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{k}_2$
- **Nutación:** Giro θ alrededor de $\mathbf{i}_2 \equiv \mathbf{i}_3$ (Eje de nodos)
- **Rotación propia:** Giro ϕ alrededor del eje $\mathbf{k}_3 \equiv \mathbf{k}_4$



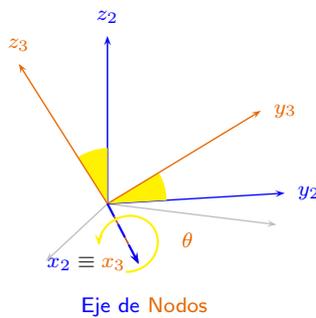
Precesión

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12}$$

EIAE - Mecánica Clásica

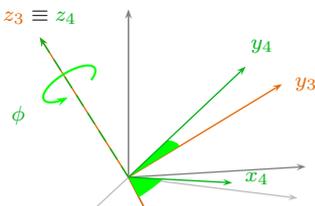
20 / 24

Matriz de giro con ángulos de Euler



Nutación

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{23}$$



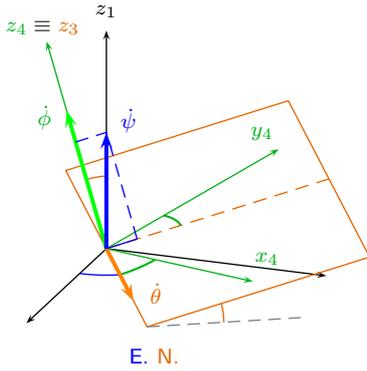
Rotación propia

$$\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_3 \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_3 \cdot \mathbf{Q}_{34}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Matriz de giro con ángulos de Euler



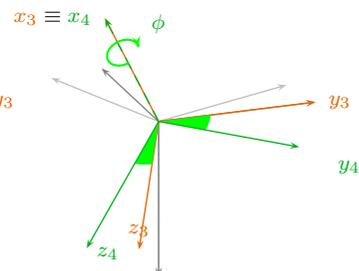
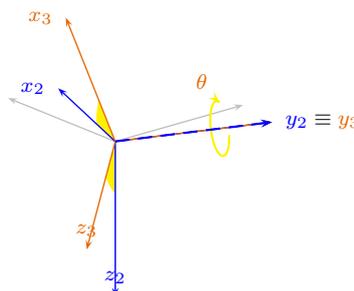
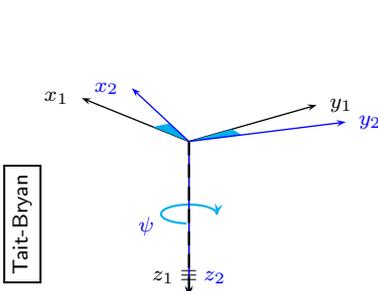
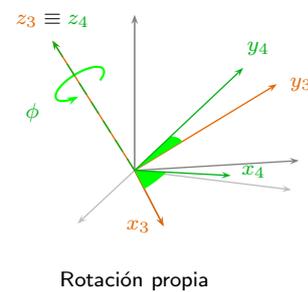
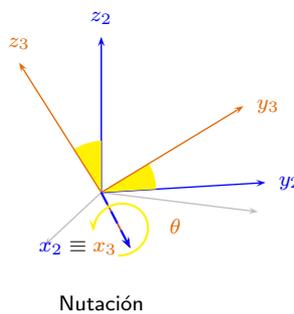
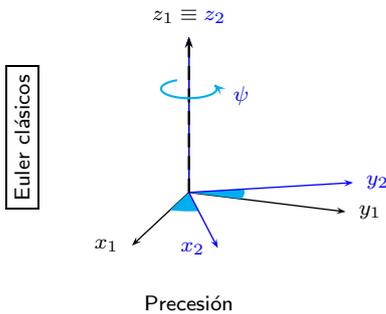
Para hallar la matriz del giro global, aplicamos la composición de giros sucesivos,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4 &= \underbrace{\mathcal{R}_3} \cdot \mathcal{Q}_{34} = \underbrace{\mathcal{R}_2} \cdot \mathcal{Q}_{23} \cdot \mathcal{Q}_{34} = \\ &= \underbrace{\mathcal{R}_1} \cdot \mathcal{Q}_{12} \cdot \mathcal{Q}_{23} \cdot \mathcal{Q}_{34} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{Q}_{14} \end{aligned}$$

Calculando el producto de las tres, se obtiene \mathcal{Q}_{14} :

$$\begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \cos \theta & -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \phi \cos \theta & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Ángulos de Euler clásicos / Tait-Bryan



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de representación de la actitud

Sistema	Pros	Contras	Aplicaciones
ϕ, θ, ψ	Mínimo Intuitivo Máquinas	Singular en $\theta = 0$ Muchos sin/cos Composición difícil	Docencia, M. Orbital Pre/Postprocesado Máquinas, Robots
g	Mínimo No sin/cos Composición fácil	∞ para π No intuitivo	Analítico
q	Regular No sin/cos Composición fácil Normalizable (\uparrow)	1 redundante No intuitivo	Sistemas de control de actitud (ACS) a bordo
ϕ, a	Intuitivo	1 redundante Singular en 0 Algunos sin/cos Composición difícil	Rotaciones sobre eje fijo
Q	Regular No sin/cos Normalizable (\downarrow)	6 redundantes	Analítico Cambio de ejes Multibody



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70