

Diagrama triangular

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, green, cursive font. The text is set against a background of a light blue and orange gradient that resembles a stylized flame or a sunburst.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

-- --

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Diagrama triangular (DT) es una herramienta que permite realizar
nente “balances”, representar condiciones o especificaciones, etc.

Otras cosas, el DT sirve para resolver gráficamente problemas en los
lleva a cabo una mezcla o una separación de dos o más sistemas.

Se puede también encontrar soluciones a problemas en los que se impone una
de especificaciones simultáneas.

Se puede encontrar el extremo (máximo o mínimo) de una función objetivo que
depende de la composición de una mezcla

Los diagramas DT pueden además representarse diagramas termodinámicos de
energía de fases y determinar cómo varía la microestructura y la

composición de una mezcla o un material al fundirse o solidificarse. Esta última
aplicación del DT es la más frecuente, sobre todo en materiales cerámicos, pero dado el

tema general de MatII y la limitación de tiempo, **no** se trata en esta asignatura.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



s la extensión a mezclas ternarias de los diagramas binarios
cidos en termodinámica (p.ej. las curvas de punto de rocío y de burbuja de
binarias de líquidos se representan sobre un “diagrama binario”, es decir un
o; el DT es la extensión de este segmento).
o para sistemas compuestos de tres componentes independientes
(SiO₂, Al₂O₃ y MgO en una cerámica) y un número arbitrario de otros
componentes no independientes (p.ej. H₂O estructural, ver más adelante)
y por tanto los cálculos que con él se realizan, puede estar en una base
volumétrica o molar. En lo que sigue usaremos el símbolo x_i^P
referirnos en general a la fracción (sea másica, volumétrica o molar) del
elemento i en el compuesto P .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



sarse un DT equilátero, pero no es esencial.

ices representan los “ingredientes” de los que está compuesto el

. Estos “ingredientes” pueden ser elementos, compuestos

os, o cualquier otra sustancia o mezcla física.

unto en el DT representa una única composición del sistema de tres

entes.

T hay sólo 2 grados de libertad: basta dar las fracciones (másicas,

s, volumétricas) de dos componentes, p.ej. A y B, para que la

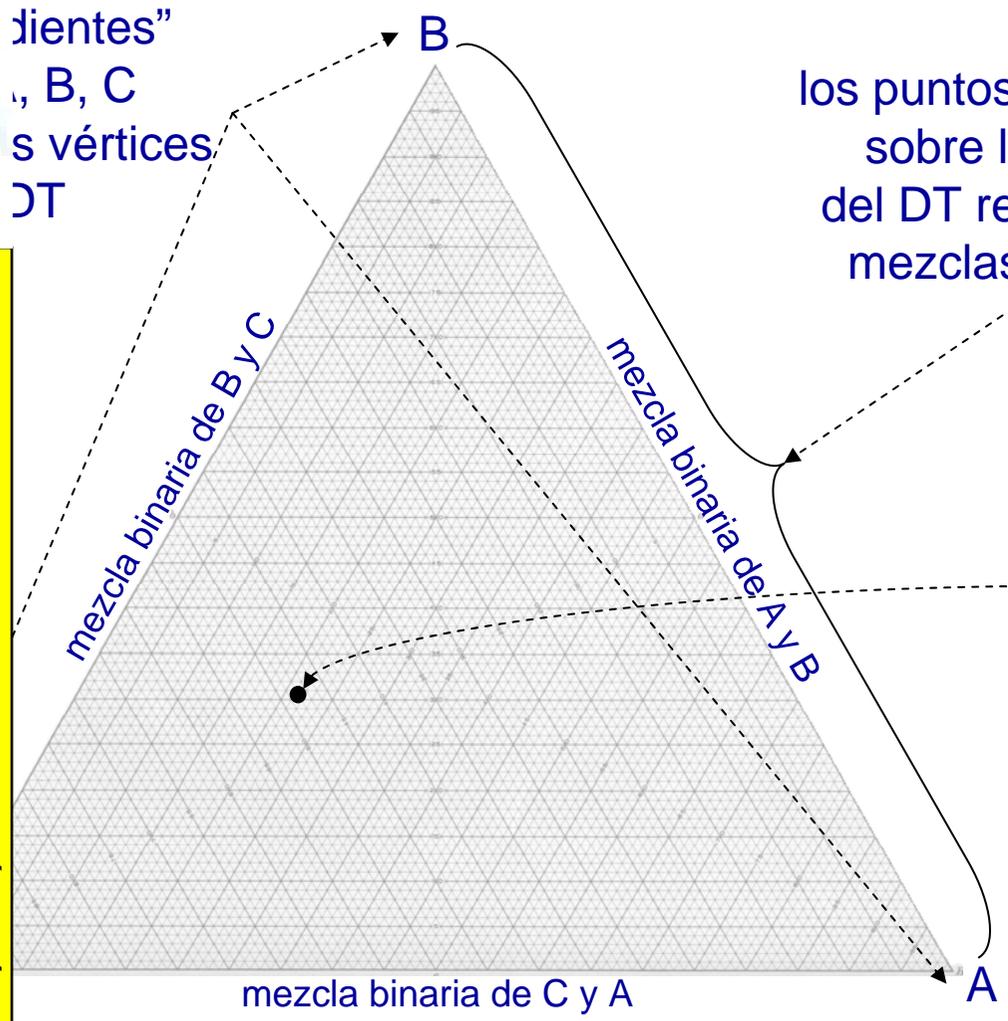
posición del sistema quede definida.

ción del tercer componente C es la diferencia a 1:

$$x_C = 1 - x_A - x_B$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
-- --
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70





los puntos que están sobre los lados del DT representan mezclas binarias

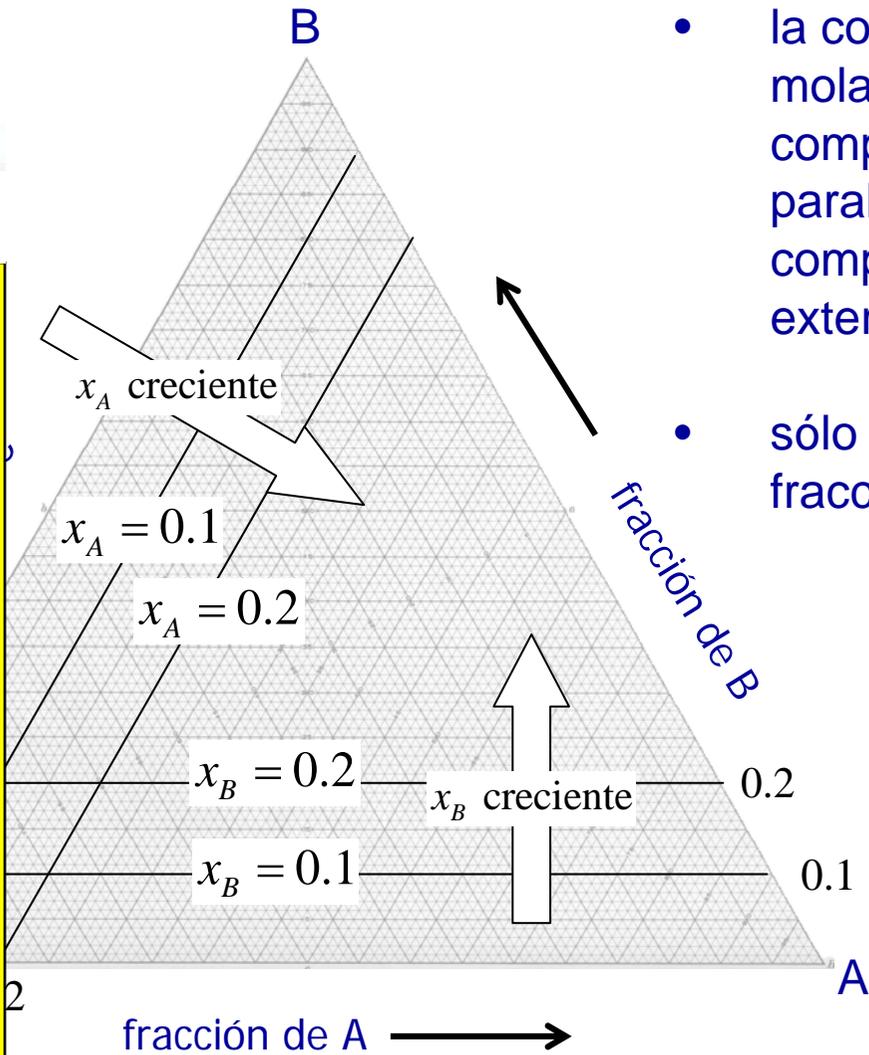
los puntos interiores representan mezclas ternarias

los vértices del DT

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



- la composición (fracción másica, molar, volumétrica) de cada componente se lee en líneas paralelas al lado opuesto al componente, o bien en los lados externos, en sentido antihorario.
- sólo es necesario leer las fracciones de dos componentes:

$$x_A, x_B$$

$$(x_C = 1 - x_A - x_B)$$

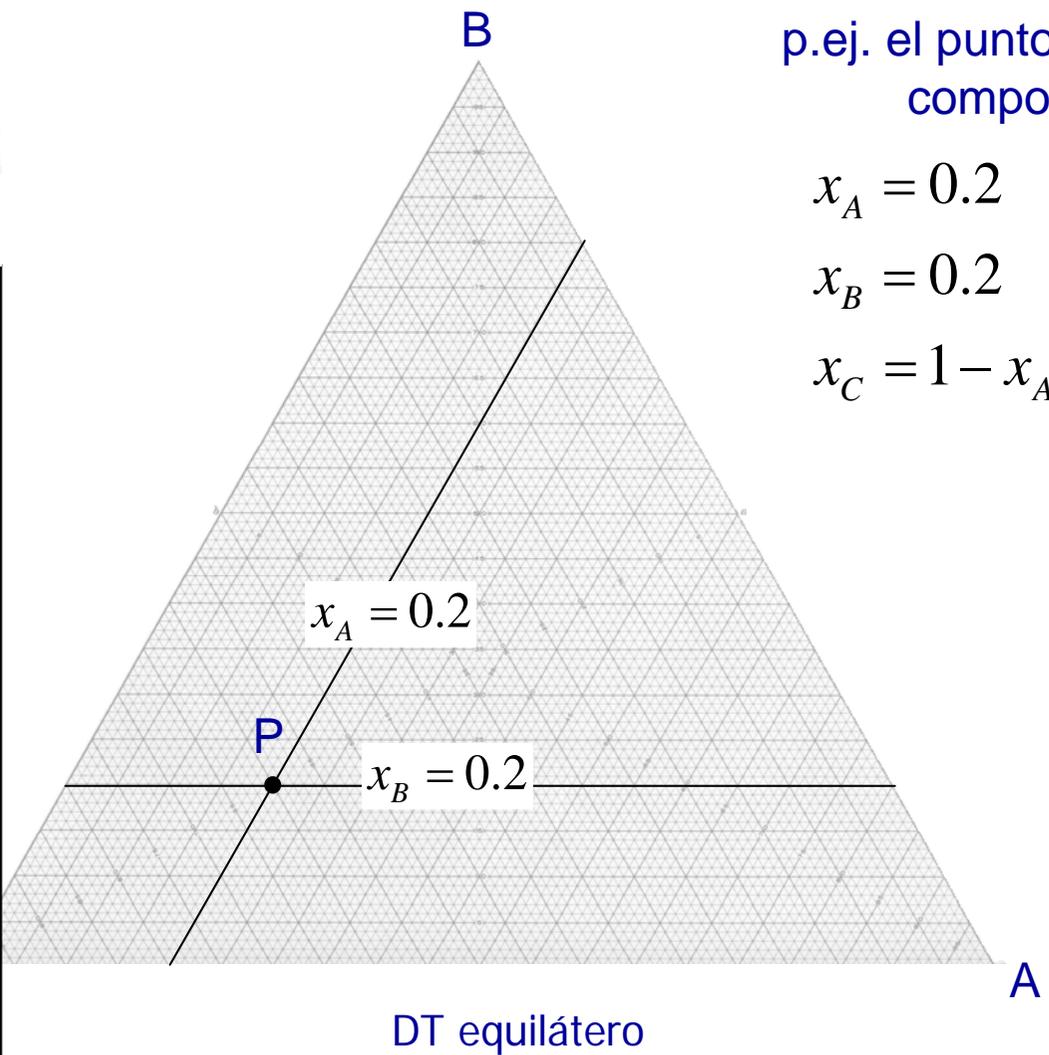


p.ej. el punto P tiene una composición:

$$x_A = 0.2$$

$$x_B = 0.2$$

$$x_C = 1 - x_A - x_B = 0.6$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
-- --
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



mezcla M de dos sistemas P y Q, que están disponibles en cantidades Z^P y Z^Q (masa, mol, o volumen), y cuyas composiciones son:

$$x_A^P, x_B^P, x_C^P = 1 - x_A^P - x_B^P$$

$$x_A^Q, x_B^Q, x_C^Q = 1 - x_A^Q - x_B^Q$$

Aplicando el principio de conservación de masa, mol, o volumen (según el tipo de diagrama) de los tres componentes:

Conservación (balance) de A:

$$Z^P x_A^P + Z^Q x_A^Q = Z^M x_A^M$$

Conservación (balance) de B:

$$Z^P x_B^P + Z^Q x_B^Q = Z^M x_B^M$$

Conservación (balance total) de A, B y C juntos:

$$Z^M = Z^P + Z^Q$$

Dividimos la ecuación de conservación de A entre Z^M y definiendo $a \equiv \frac{Z^P}{Z^M}$ (cantidad de P / cantidad de P + Q) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z^P}{Z^M} x_A^P + \frac{Z^Q}{Z^M} x_A^Q &= x_A^M \\ \frac{Z^P}{Z^M} x_B^P + \frac{Z^Q}{Z^M} x_B^Q &= x_B^M \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} ax_A^P + (1-a)x_A^Q &= x_A^M \\ ax_B^P + (1-a)x_B^Q &= x_B^M \end{aligned} \right\}$$

Consideramos $\begin{cases} (x_A^P, x_B^P) \\ (x_A^Q, x_B^Q) \\ (x_A^M, x_B^M) \end{cases}$

como las componentes de tres vectores $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{M}$ en un plano cuyos ejes son x_A, x_B , los sistemas P, Q y M pueden representarse por medio de estos vectores:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Las ecuaciones de conservación pueden entonces escribirse como:

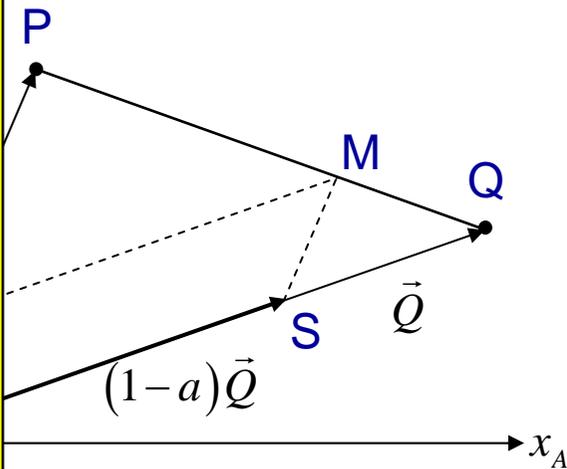
$$\left. \begin{aligned} ax_A^P + (1-a)x_A^Q &= x_A^M \\ ax_B^P + (1-a)x_B^Q &= x_B^M \end{aligned} \right\} \Rightarrow a\vec{P} + (1-a)\vec{Q} = \vec{M}$$

Por lo tanto, el punto M representativo de la mezcla de P y Q se puede obtener considerando vectorialmente $a\vec{P}$ y $(1-a)\vec{Q}$.

Por semejanza de los triángulos $\triangle OPQ, \triangle RPM, \triangle SMQ$ se cumple:

$$\frac{\overline{MS}}{\overline{MQ}} = \frac{|a\vec{P}|}{\overline{MQ}} = \frac{|\vec{P}|}{\overline{PQ}} \Rightarrow \frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} = a = \frac{Z^P}{Z^M} = \frac{Z^P}{Z^P + Z^Q} = \frac{\text{cantidad de P}}{\text{cantidad total (P+Q)}}$$

$$\frac{\overline{MR}}{\overline{MP}} = \frac{|(1-a)\vec{Q}|}{\overline{MP}} = \frac{|\vec{Q}|}{\overline{PQ}} \Rightarrow \frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}} = 1-a = \frac{Z^Q}{Z^M} = \frac{Z^Q}{Z^P + Z^Q} = \frac{\text{cantidad de Q}}{\text{cantidad total (P+Q)}}$$



Por tanto, el punto M representativo de la mezcla de P y Q se encuentra en la recta que une los puntos P y Q, y a distancias de P y Q que cumplen las relaciones anteriores (regla de la palanca).

Esta construcción, que depende sólo de paralelismo y de proporcionalidad, es válida tanto en ejes ortogonales, como en ejes oblicuos (los del diagrama triangular estándar). Y también es válida para cualquier valor de a, incluso negativos o mayores que 1.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

to que representa la mezcla M de dos sistemas P y Q, que están disponibles en cantidades Z^P y Z^Q , (masa, mol, o volumen), representados por puntos P y Q, está sobre la recta definida por P y Q.

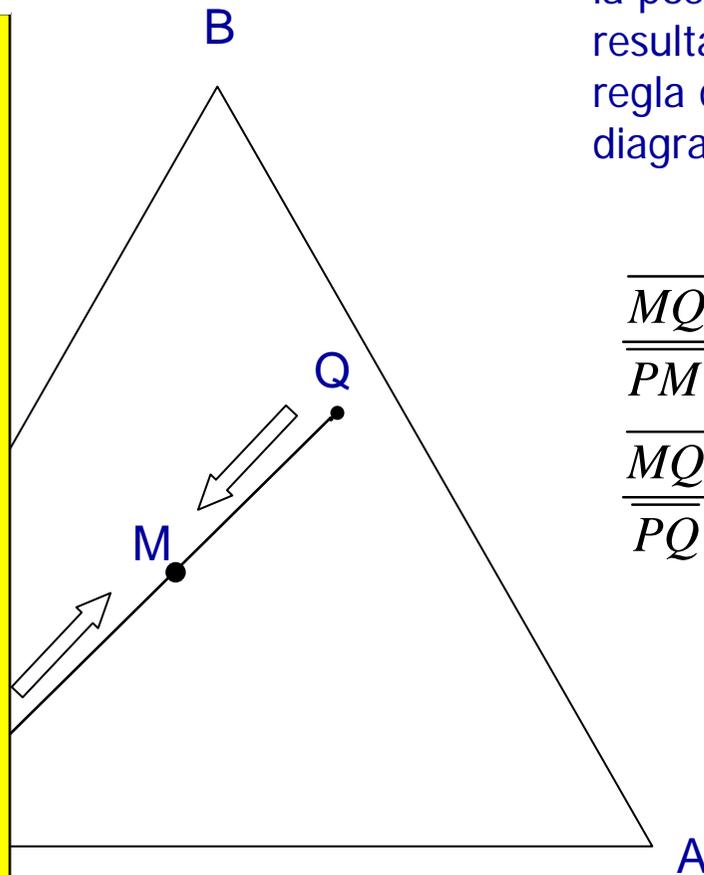
to M está entre P y Q.

- la posición del punto M (el producto resultante) se obtiene gráficamente por la regla de la palanca, igual que en un diagrama binario:

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{PM}} = \frac{\text{cantidad de P}}{\text{cantidad de Q}} = \frac{Z^P}{Z^Q}$$

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\text{cantidad de P}}{\text{cantidad total (P+Q)}} = \frac{Z^P}{Z^P + Z^Q}$$

(el punto de mezcla M está más cerca del punto que representa el sistema que está en mayor cantidad)

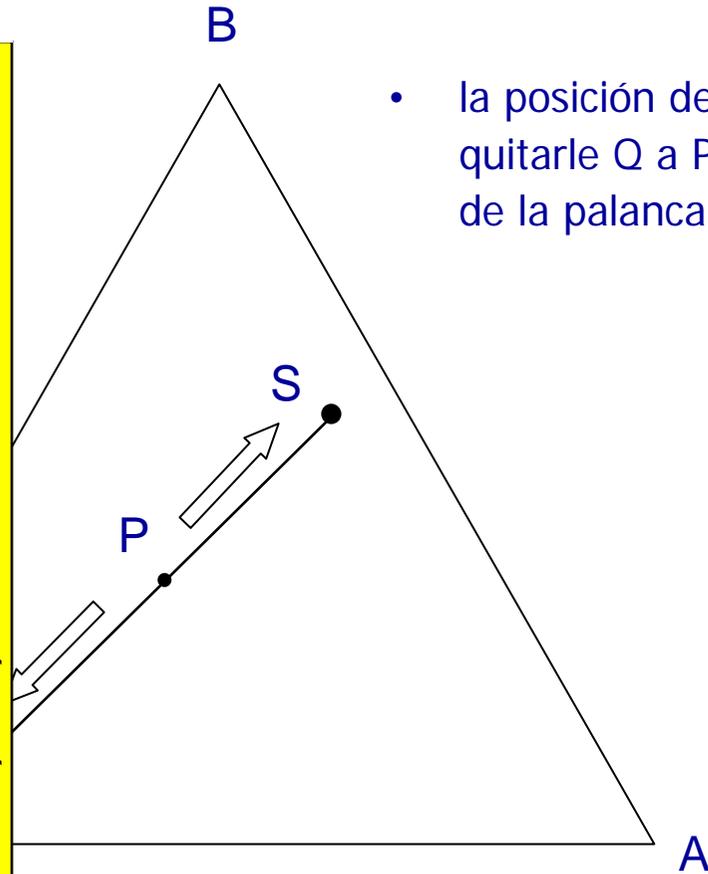


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Si el punto S que representa la “resta” o separación de dos sistemas P y Q (es decir, la diferencia de P cuando le quitamos Q) está igualmente sobre la recta definida por el sistema original, entonces el sistema resultante S está fuera del segmento PQ.

Si el punto S está fuera del segmento PQ.



- la posición del punto S (el producto resultante de quitarle Q a P) se obtiene igualmente por la regla de la palanca:

$$\frac{PQ}{PS} = \frac{\text{cantidad de S}}{\text{cantidad de Q}}$$

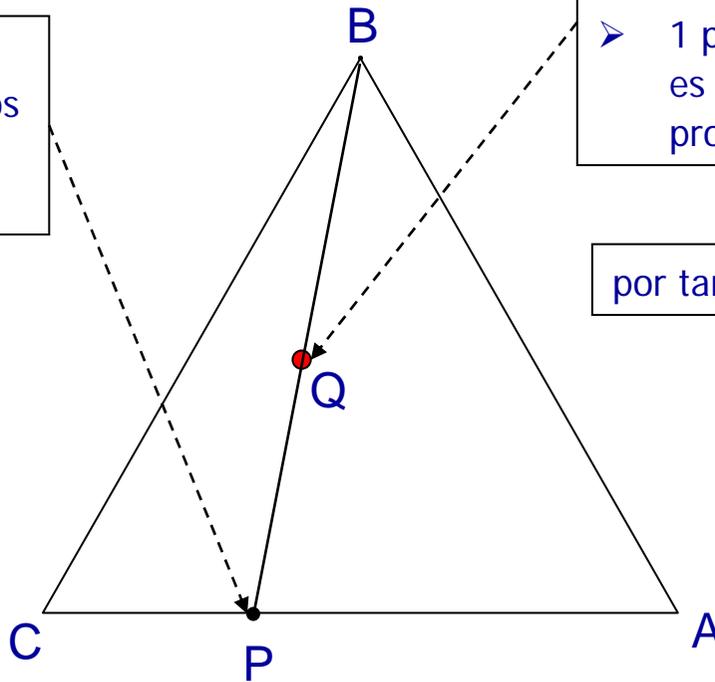
$$\frac{PQ}{QS} = \frac{\text{cantidad de S}}{\text{cantidad inicial de P}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



los puntos que se encuentran sobre una recta que pasa por uno de los vértices (p.ej. B) representan mezclas que pueden obtenerse añadiendo B a una mezcla dada de A y C (representada por el punto P).
 Por tanto, la relación de las composiciones de los otros dos componentes (A y C) es constante a lo largo de toda la línea que une P con B:



P es mezcla de C y A en proporción 2:1 (dos partes de C y una de A)

Q es mezcla de:

- 1 parte de B y
- 1 parte de P (que a su vez es una mezcla de C y A en proporción 2:1)

por tanto la composición de Q es:

$$x_A^Q = 0.167$$

$$x_B^Q = 0.500$$

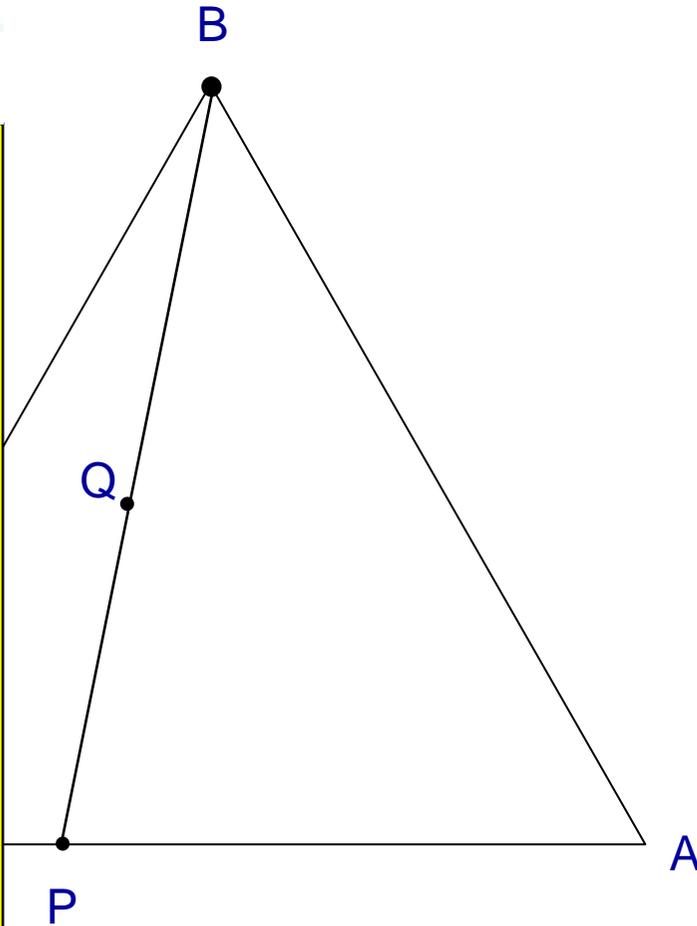
$$x_C^Q = 0.333$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



los puntos que se encuentran sobre una recta que pasa por uno de los vértices (p.ej. B) representan sistemas en las que la relación de las proporciones de los otros dos “ingredientes” (p.ej. A y C) es constante:



en P, se cumple:

$$x_A^P = \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}; \quad x_C^P = 1 - x_A^P; \quad x_B^P = 0$$

$$\frac{x_A^P}{x_C^P} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}$$

en B, se cumple:

$$x_A^B = 0; \quad x_C^B = 0; \quad x_B^B = 1$$

en los demás puntos del segmento BP (p.ej. Q) se cumple:

$$\frac{x_A^Q}{x_C^Q} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}; \quad x_B^Q \neq 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

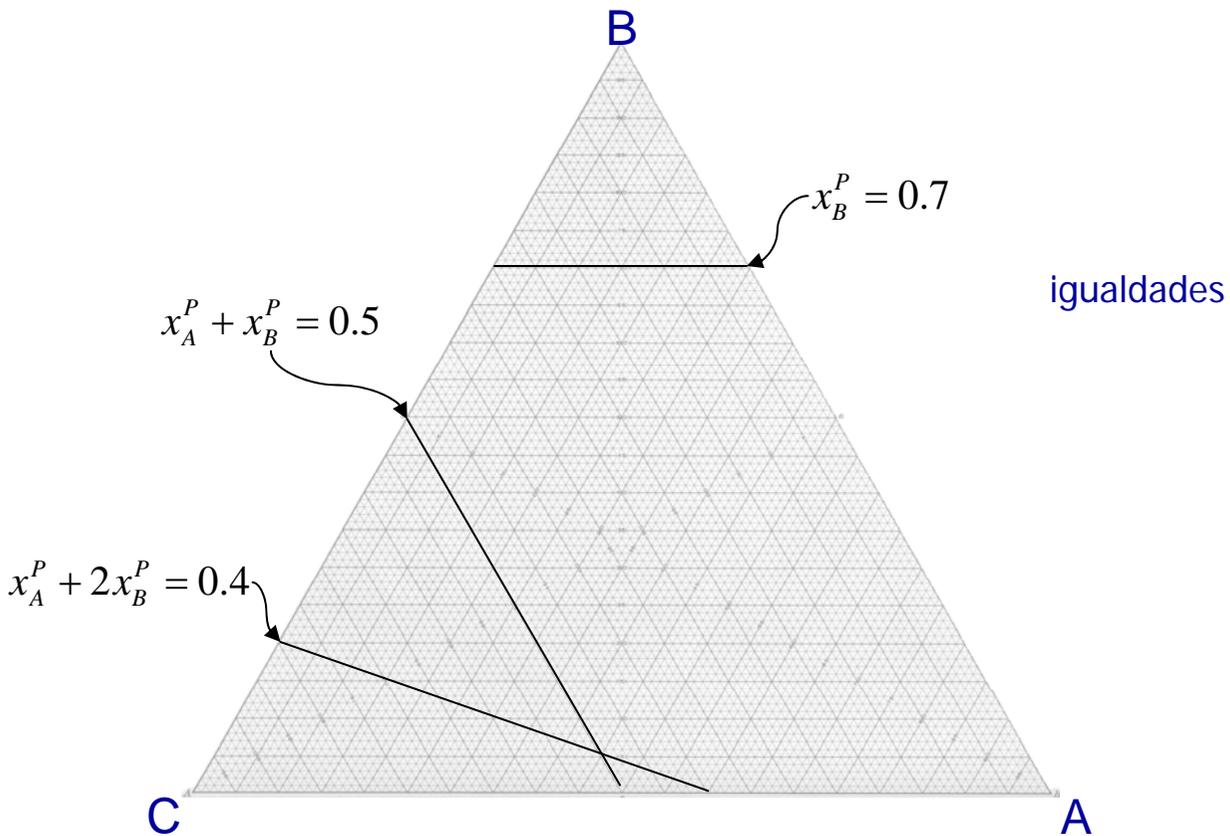
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Las aplicaciones se exigen especificaciones o relaciones entre las fracciones de los componentes.

Las especificaciones (igualdades o desigualdades) son con frecuencia relaciones lineales entre las concentraciones de los componentes

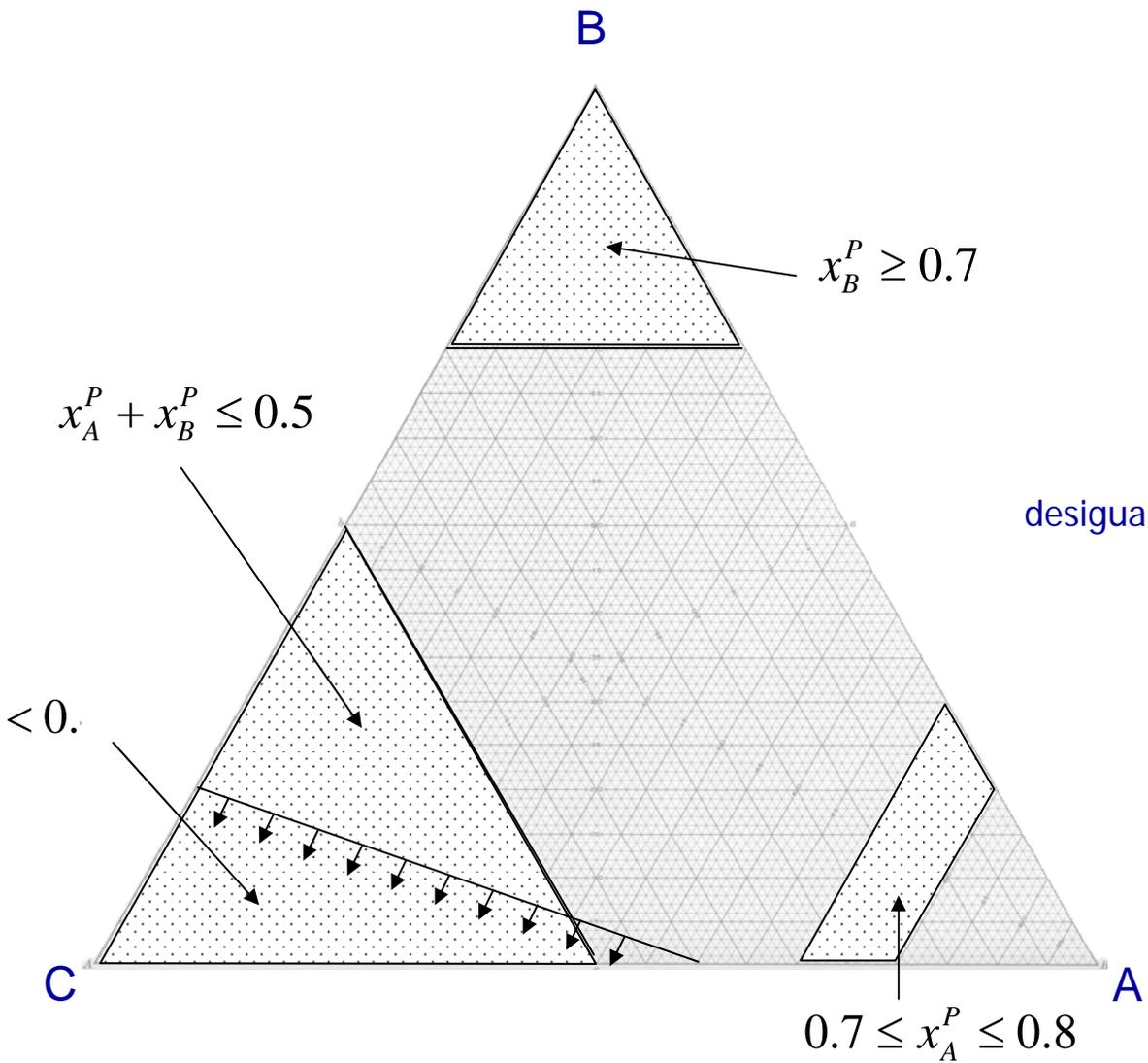
o se pueden representar con ayuda de líneas rectas en el DT:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



desigualdades



Cartagena99

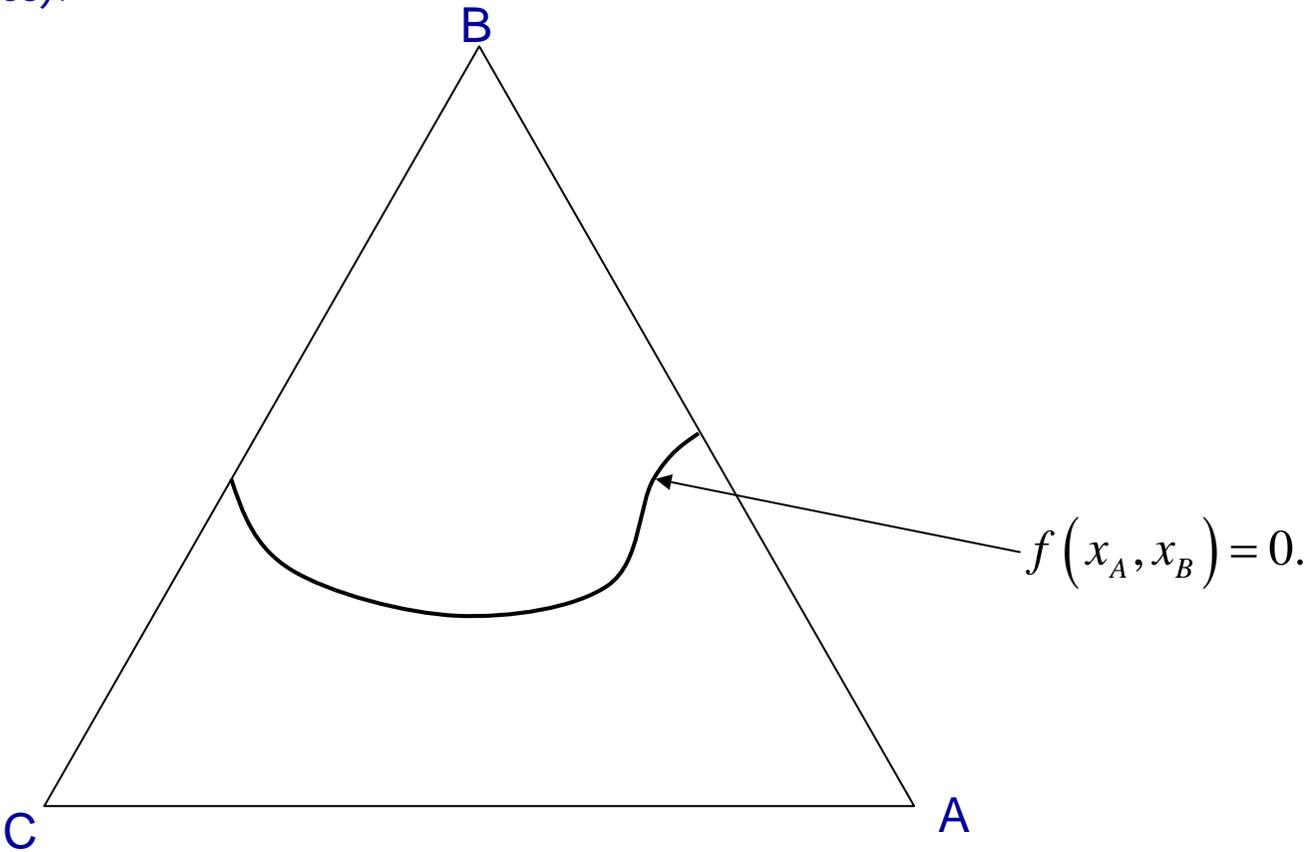
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
-- --
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



es posible representar especificaciones o relaciones entre las
iones de los componentes que no sean lineales entre las concentraciones
nponentes

este caso su representación no será una recta en el DT

reciso representarla de forma aproximada uniendo varios puntos
es que cumplan la especificación (recordando que sólo hay dos variables
entes).



modo de representar especificaciones lineales entre las concentraciones de los componentes es determinar dos puntos cualesquiera que cumplan la especificación y unirlos por una recta. Por ejemplo para la especificación: $2x_A + 3x_B = 1.5$

$x_A^P = 0.$

Hacemos: $x_B^P = 0.$

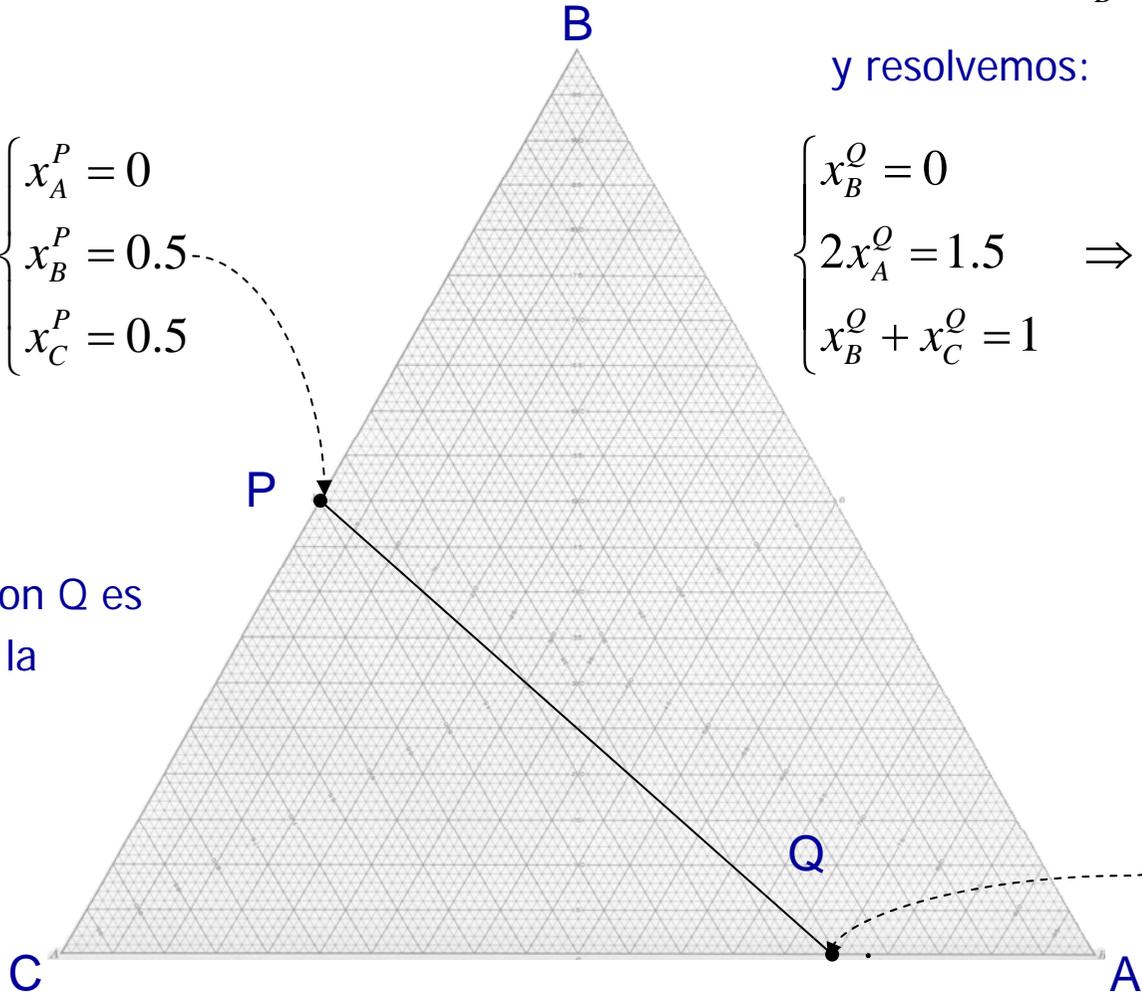
Entonces:

y resolvemos:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A^P = 0 \\ x_B^P = 0.5 \\ x_C^P = 0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^Q = 0 \\ 2x_A^Q = 1.5 \\ x_B^Q + x_C^Q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A^Q = 0.75 \\ x_B^Q = 0 \\ x_C^Q = 0.25 \end{cases}$$

La línea que une P con Q es la representación de la especificación dada



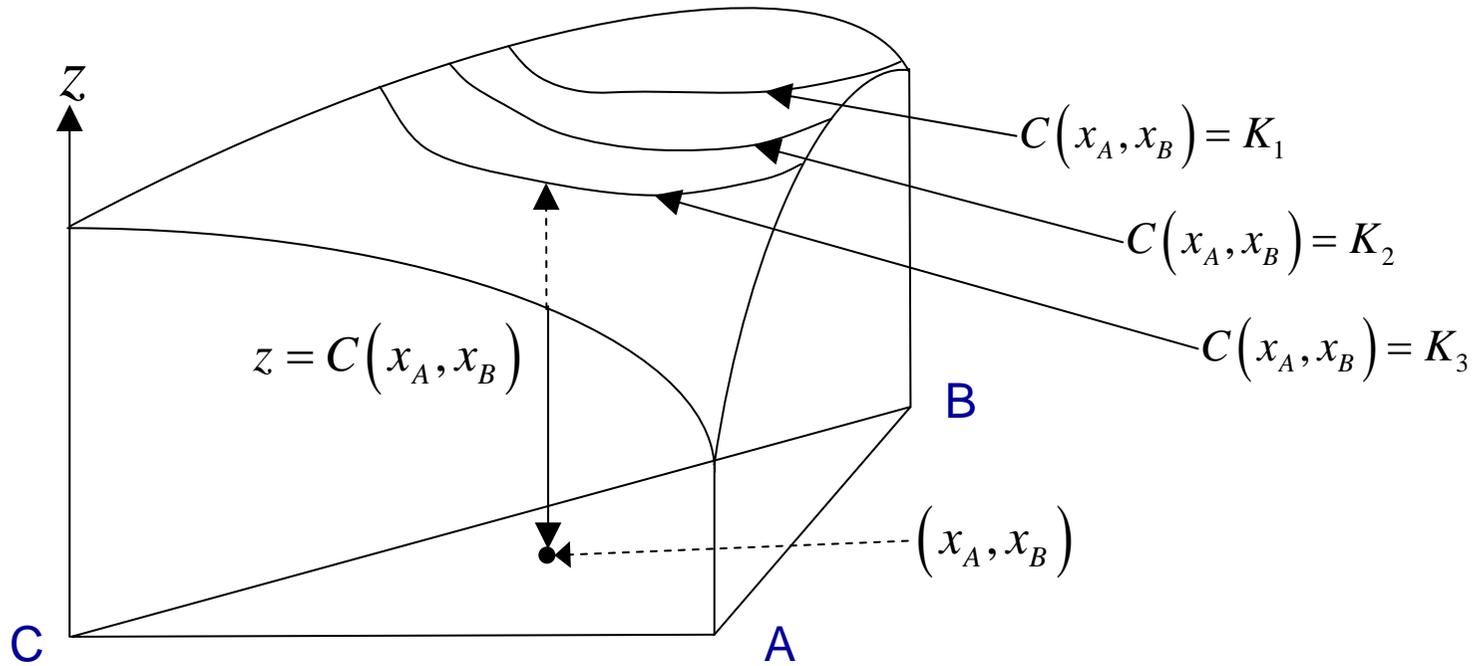
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



ne también aplicación cuando se busca maximizar o minimizar una
 ojetivo (p.ej. el precio o el coste de producción) que depende de la
 ón del sistema $C(x_A, x_B)$ y sujeta a especificaciones (ligaduras).

ción objetivo (que sólo depende de dos variables) puede visualizarse
 superficie cuya "altura" z sobre el DT está dada por $C(x_A, x_B)$

s de nivel de esta superficie unen puntos en los que la función objetivo
 mismo valor.

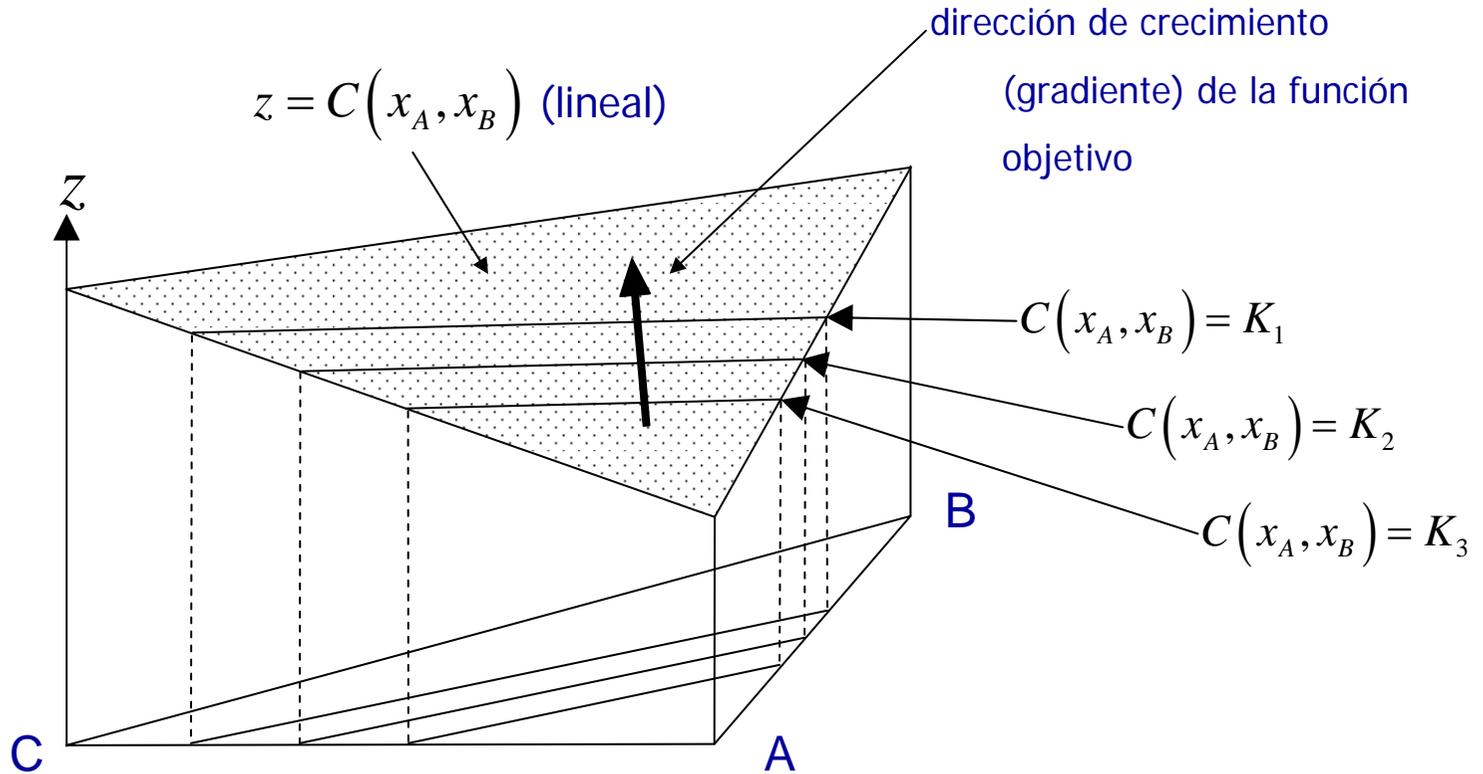


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ción objetivo (p.ej. el precio o el coste de producción) es una función a composición del sistema, la superficie que representa la función es un plano.

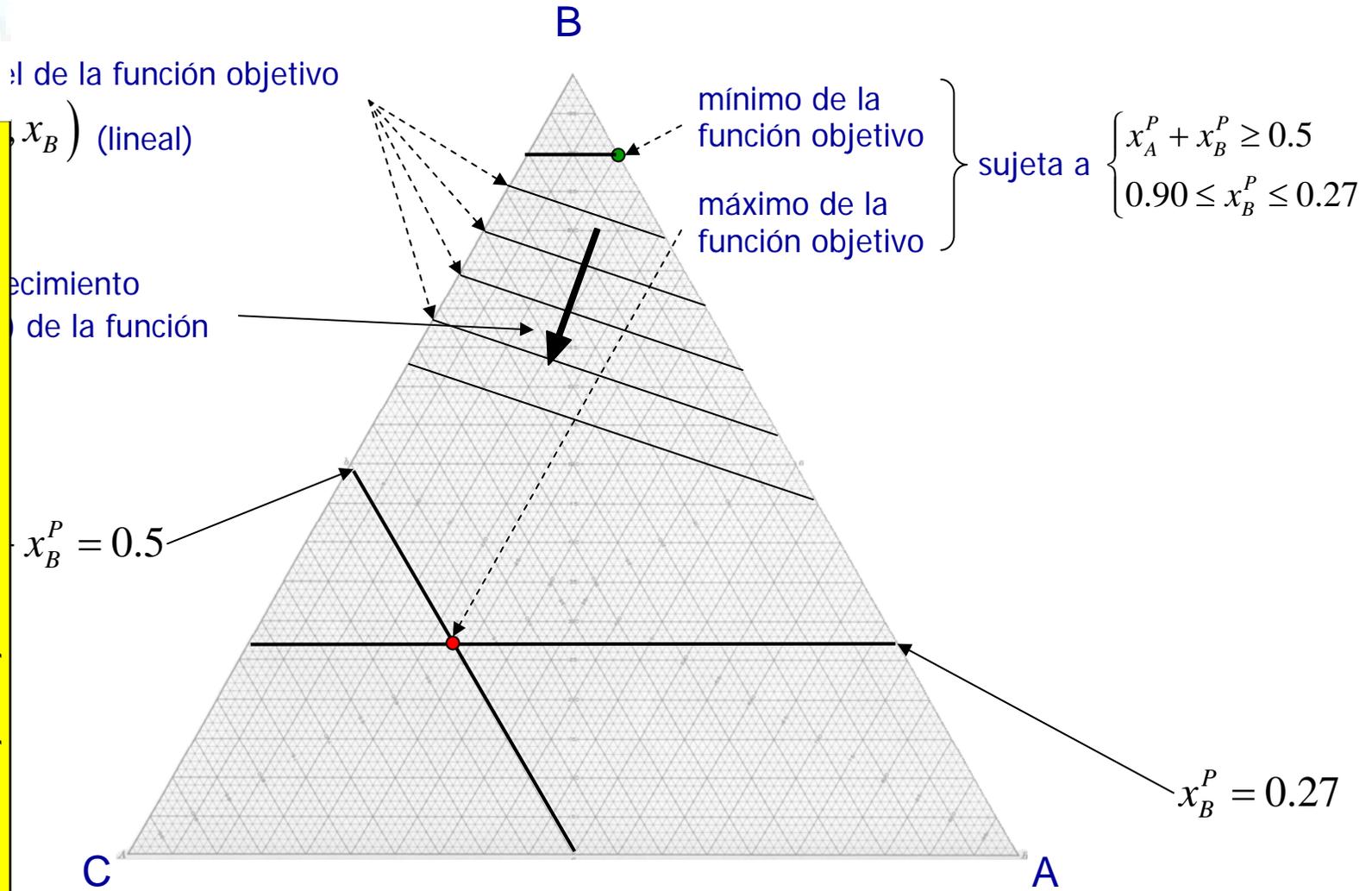
as de nivel son rectas, y las proyecciones de las líneas de nivel sobre el ualmente rectas:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

caso el DT permite hallar de forma gráfica el extremo (máximo o mínimo) de la función objetivo sujeta a restricciones, y de modo especialmente as son lineales:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Es posible trabajar también con sistemas en los que además de los tres componentes principales (o independientes) existan además otros componentes,

Si estos otros componentes están relacionados con los componentes principales a través de proporciones fijas.

Por lo tanto, los otros componentes no son variables independientes, sino que se eliminan a la hora de realizar los cálculos, y se vuelven a añadir una vez realizados los cálculos de los componentes principales en las proporciones fijas conocidas.

Este procedimiento es exactamente el mismo que se usa cuando se trabaja en "base seca" para hacer balances de masa en reacciones.

Los ejemplos típicos son los diagramas de arcillas cuya estructura puede describirse por medio de los componentes principales y H_2O :

Por ejemplo, si $A=Al_2O_3$, $B=SiO_2$ y $C=CaO$, entonces $Al_2O_3 \cdot SiO_2 \cdot 2H_2O=AB \cdot 2H_2O$, o en base seca AB.

Para esta arcilla el agua estructural aparece siempre en una proporción fija respecto a los componentes principales, los cálculos se pueden realizar en un DT cuyos vértices representan A, B y H_2O en el que el agua no aparece.

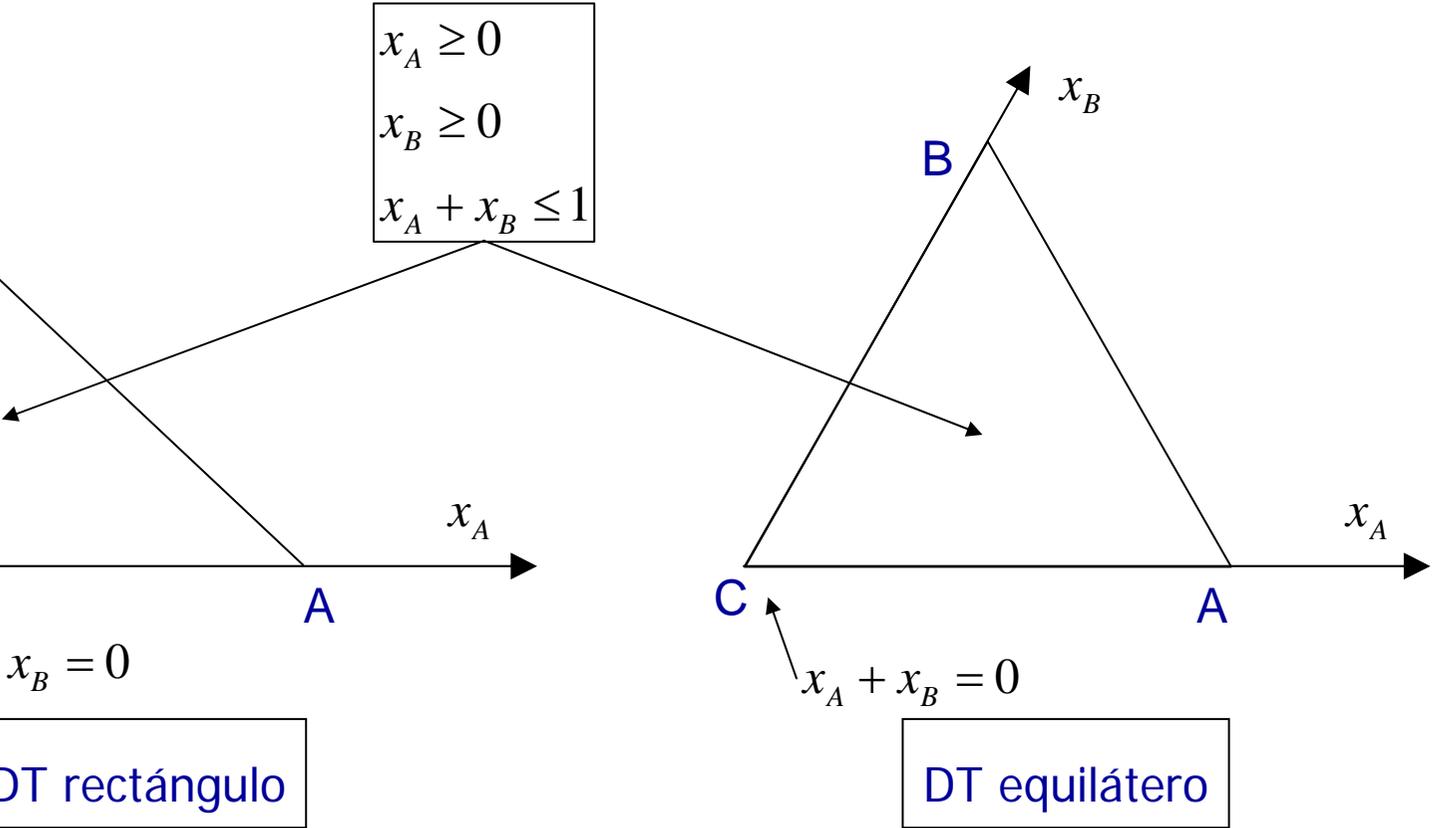
Una vez resuelto el problema "en base seca", se añade a la arcilla el agua correspondiente a la estructura, p.ej. $AB \cdot 2H_2O$, es decir, 2 moles de H_2O por cada mol de AB.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ral, es útil tener en cuenta que el DT es análogo a un diagrama normal, pero en el que los ejes no son perpendiculares sino oblicuos, y sólo se usa la región definida por $x_A \geq 0$, $x_B \geq 0$, $x_A + x_B \leq 1$



$$\begin{aligned} x_A &\geq 0 \\ x_B &\geq 0 \\ x_A + x_B &\leq 1 \end{aligned}$$



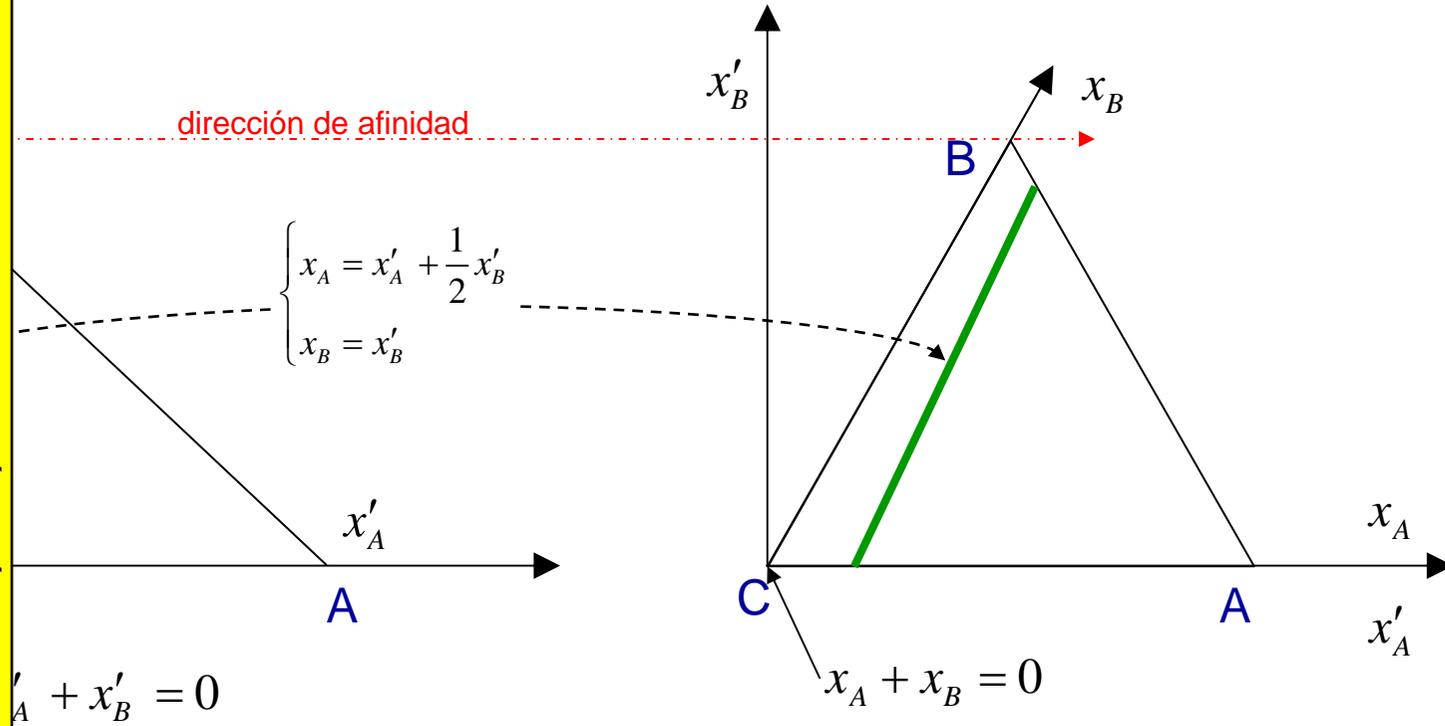
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

denadas en ejes cartesianos y en los ejes del DT equilátero están relacionados transformación afín (ver p.ej. el cap. 4 del libro de Ingeniería Gráfica y diseño):

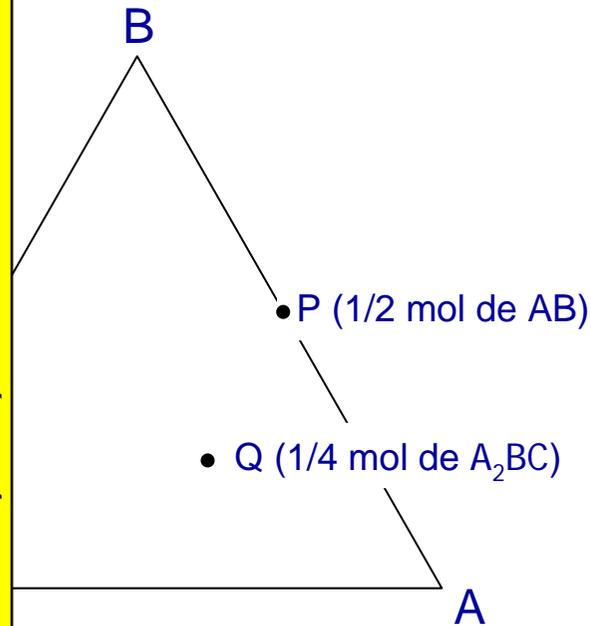
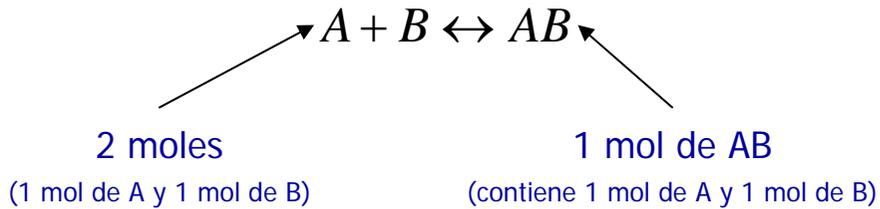
$$\begin{cases} x_A = x'_A + \frac{1}{2}x'_B \\ x_B = x'_B \end{cases}$$

transformación no conserva los ángulos entre líneas, ni las distancias entre puntos, transforma líneas rectas en otras líneas rectas y mantiene las proporcionalidades segmentos (base de la regla de la palanca).



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

en todos los puntos del DT existe en total 1 unidad de la base de cálculo que se haya
 (molar o volumétrica). Cuando se trabaja en base molar es frecuente no tener esto
 para obtener resultados erróneos. La razón es que en el DT se conserva la masa y el volumen
 (por mezcla aditiva de volúmenes), pero en general el número de moles no se conserva:



P.ej. si en el DT existe un compuesto (p.ej. AB), el punto representativo de este compuesto (P en el diagrama molar) contiene 1/2 mol de AB, es decir, 1/2 mol de A y 1/2 de B, y por tanto 1 mol en total. Igualmente, el punto Q representativo de un compuesto A_2BC contiene 1/4 de mol de A_2BC (2/4 de mol de A, 1/4 de mol de B y 1/4 de mol de C, en total 1 mol entre A, B y C).

