Técnicas de la automatización

(Cód. 201987)

2. Sistemas de eventos discretos (SED)

Escuela Politécnica Superior
UNIVERSIDAD DE ALCALÁ

Índice

Modelos

Para diseñar un SdC se utilizan modelos del SC que permiten predecir su comportamiento y corregirlo en función de los objetivos de control.

modelo.

(Del it. *modello*).

4. m. Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja [...] que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento. [DRAE `www.rae.es`]

Tipos de modelos

- Estructural. Describe las partes del sistema y la relación entre ellas. (¿cómo es el sistema?)
- Funcional. Describe la función del sistema: sus acciones sobre el entorno y sus reacciones a éste. (¿qué hace el sistema?)
- Procesal. Describe la actividad dinámica interna o proceso de un sistema. (¿cómo lo hace?)

Sistema dinámico

Los conceptos básicos en el modelado procesal son estado y transición entre estados:

- Estado. Información mínima necesaria en un instante dado para predecir la evolución de un sistema.
- Transición. Cambio en el estado de un sistema.
- Proceso. Sucesión de estados y transiciones.
- Función de transición. Determina el estado siguiente en función del estado actual y del estímulo que recibe el sistema.
- Función de salida. Determina la respuesta para el estado actual y el estímulo recibido.
- Variable dinámica. Función que representa el estado, el estímulo (entrada) o la respuesta (salida) de un sistema.

Sistemas continuos

- Sus variables dinámicas son funciones continuas en tiempo continuo:

$$
\begin{aligned}
x &: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N};\ \text{estado } x(t)\\
u &: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m, m \in \mathbf{N};\ \text{entrada } u(t)\\
y &: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^r, r \in \mathbf{N};\ \text{salida } y(t)
\end{aligned}
$$

- Su comportamiento dinámico se modela con ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x,u);\ f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n\\
y &= h(x,u);\ g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^r\\
x(0) &= x_0;\ \text{(estado inicial)}
\end{aligned}
$$

Sistemas discretos

- La variables dinámicas son funciones continuas en tiempo discreto:

$$x : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N};\ \text{estado } x^k = x(t)|_{t=kT_s}$$
$$u : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^m, m \in \mathbf{N};\ \text{entrada } u^k = u(t)|_{t=kT_s}$$
$$y : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^r, r \in \mathbf{N};\ \text{salida } y^k = y(t)|_{t=kT_s}$$

- Su comportamiento dinámico se modela con ecuaciones en diferencias:

$$x^{k+1} = f\left(x^k, u^k\right);\ f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$$
$$y^k = h\left(x^k, u^k\right);\ h : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^r$$
$$x^0 = x_0;\ \text{(estado inicial)}$$

Sistemas de eventos discretos (i)

- La variables dinámicas están definidas en conjuntos finitos y en tiempo discreto:

$$x : \mathbf{N} \to \mathbb{X};\ \mathbb{X} = \{q_1, \ldots, q_n\}, n \in \mathbf{N} \text{ estado } x(k) = x^k$$

$$u : \mathbf{N} \to \mathbb{U};\ \mathbb{U} = \{U_1, \ldots, U_m\}, m \in \mathbf{N} \text{ entrada } u(k) = u^k$$

$$y : \mathbf{N} \to \mathbb{Y};\ \mathbb{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_r\}, r \in \mathbf{N} \text{ salida } y(k) = y^k$$

- Su comportamiento dinámico se modela con una tabla de transición de estados y otra de salidas:

$$x^{k+1} = f\left(x^k, u^k\right), \text{ (también } x^+ = f(x, u));\ f : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \to \mathbb{X}$$

$$y^k = h\left(x^k, u^k\right), \text{ (también } y = h(x, u));\ h : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \to \mathbb{Y}$$

$$x^0 \in \mathbb{X};\ \text{(estado inicial)}$$

- La sextupla $\langle \mathbb{X}, \mathbb{U}, \mathbb{Y}, f, h, x^0 \rangle$ se denomina máquina secuencial finita determinista de Mealy . Si h no depende de u tenemos un máquina de Moore.

Sistemas de eventos discretos (ii)

- Llamamos comportamiento completo de un sistema de eventos discretos al conjunto

$$Б_f = \left\{(x, u, y) \in (\mathbb{X} \times \mathbb{U} \times \mathbb{Y})^{\mathbf{N}} : (x^+, y) = (f(x, u), h(x, u))\right\} \text{ y,}$$

- comportamiento manifiesto al conjunto

$$\begin{aligned} Б &= \operatorname{proy}_{(\mathbb{U}\times\mathbb{Y})^{\mathbf{N}}}(Б_f) \\ &= \left\{(u, y) \in (\mathbb{U} \times \mathbb{Y})^{\mathbf{N}} : \exists x \in \mathbb{X}^{\mathbf{N}} \text{ tal que } (x, u, y) \in Б_f\right\}. \end{aligned}$$

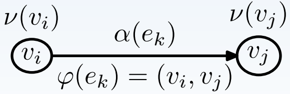
Índice

Grafos dirigidos

Def. 2.1— Un grafo dirigido o digrafo es la tupla $\langle \mathbb{V}, \mathbb{E}, \varphi \rangle$ donde:

1. $\mathbb{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}\,, n \in \mathbf{N}$ es un conjunto no vacío de vértices o nodos,
2. $\mathbb{E} = \{e_1, \ldots, e_p\}\,, p \in \mathbf{N}$ es el conjunto de arcos,
3. $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ es la aplicación de incidencia que asocia un par ordenado de vértices a cada arco.

Def. 2.2— Dado el digrafo $\langle \mathbb{V}, \mathbb{E}, \varphi \rangle$ y el conjunto de etiquetas $\mathbb{L}$ (no necesariamente finito y donde $\varepsilon \in \mathbb{L}$ es la etiqueta nula):

- $\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{L}$ es una función de etiquetado de arcos y,
- $\nu : \mathbb{V} \to \mathbb{L}$ es una función de etiquetado de nodos.
- Estas funciones se representan gráficamente:  .

Representación gráfica de máquinas de Moore

Def. 2.3— La representación gráfica de una máquina secuencial de Moore es el digrafo etiquetado $\langle \mathbb{V}, \mathbb{E}, \varphi, \mathbb{L}_u, \alpha_u, \mathbb{L}_y, \nu_y \rangle$ donde:

- $\mathbb{V} = \mathbb{X}$, $v_1 = x_0$ por convenio,
- $\mathbb{E} = \left\{ e_k \overset{\text{def}}{=} (q_i, q_j, U_\ell) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathbb{U} : q_j = f(q_i, U_\ell) \right\}$,
- $\varphi(e_k) = (q_i, q_j)$,
- $\mathbb{L}_u = \mathbb{U}$ (las entradas son etiquetas),
- $\alpha_u(e_k) = U_\ell$,
- $\mathbb{L}_y = \mathbb{Y}$ (etiquetas de salida), y
- $\nu_y(q_i) = h(q_i) = Y_{m_i}$.

$$\nu_i(q_i) = Y_{m_i} \quad q_i \xrightarrow{\alpha_u(e_k) = U_\ell} q_j \quad Y_{m_j} = \nu_y(q_j)$$

Índice

Variables binarias (i)

1. Definimos $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ y $\mathbf{2}^{\mathbf{N}} = \wp(\mathbf{N})$ como el conjunto formado por todas las funciones $f : \mathbf{N} \to \mathbf{2}$.
2. Supongamos un sistema discreto que tiene:
   (a) P entradas binarias $e = (e_1, \ldots, e_P) \in \mathbf{2}^P = \underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{P \text{ veces}}$ y
   (b) Q salidas binarias $s = (s_1, \ldots, s_Q) \in \mathbf{2}^Q$.
3. Podemos construir los conjuntos $\mathbb{U}$ e $\mathbb{Y}$ de un autómata finito a partir de las entradas anteriores

$$\mathbb{U} = \{U_1, \ldots, U_m\} \subseteq \mathbf{2}^P$$
$$\mathbb{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_r\} \subseteq \mathbf{2}^Q.$$

4. Para determinar los elementos de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{Y}$ se definen las funciones:

$$u_j : \mathbf{2}^P \to \mathbf{2} \text{ tal que } u_j(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = U_j \\ 0 & \text{si } e \neq U_j \end{cases} ; 1 \leqslant j \leqslant m$$

$$y_\ell : \mathbf{2}^Q \to \mathbf{2} \text{ tal que } y_\ell(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = Y_\ell \\ 0 & \text{si } s \neq Y_\ell \end{cases} ; 1 \leqslant \ell \leqslant r.$$

Variables binarias (ii)

5 Cada función u_j e y_ℓ se puede expresar de la forma:

$$u_j = u_j(e); \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$
$$y_\ell = y_\ell(s); \quad 1 \leqslant \ell \leqslant r,$$

6 y podemos expresar la entrada y salida de un sistema de eventos con entradas y salidas binarias de la forma:

$$u = \sum_{j=1}^{m} u_j U_j, \text{ con la condición } \sum_{j=1}^{m} u_j = 1$$

$$y = \sum_{\ell=1}^{r} y_\ell Y_\ell, \text{ con la condición } \sum_{\ell=1}^{r} y_\ell = 1$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i, \; x_i \in \mathbf{2}, \text{ con la condición } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$x(0) = q_i$ (estado inicial).

Ecuación de estado (i)

1. La dinámica de x viene determinada por la ecuación:

$$x^+ = f(x,u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i q_i, \sum_{j=1}^{m} u_j(e) U_j\right) = F(x,e).$$

2. Para determinar F introducimos la matriz de incidencia $C \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbf{2})$ cuyos términos se definen de la forma:

$$\boxed{C_{ij} \equiv \text{condición para desactivar } q_i \text{ en el instante } t \text{ y activar } q_j.}$$

3. La ecuación de estado para cada componente x_i es:

$$x_i^+ = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{x_j C_{ji}}^{\text{sí } (q_j \to q_i)} + x_i \overbrace{\prod_{i=1}^{n} \overline{C_{ij}}}^{\text{no } (q_i \to q_j)}$$

Ecuación de estado (ii)

4 La ecuación de estado del sistema es

$$x^+ = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j C_{ji} + x_i \prod_{j=1}^{n} \overline{C_{ij}} \right) q_i}_{x_i^+}$$

5 Esta ecuación se pueden escribir en forma matricial

$$x^+ = C^\intercal x + diag(x)\overline{C 1_n}$$

$$diag(x) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbf{2});\ 1_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n\times 1}(\mathbf{2}).$$

Ecuación de salida

1. La ecuación de salida toma la forma:

$$\begin{aligned} y &= h(x,u) \text{ (máquina de Mealy)} \\ &= h(x) \text{ (máquina de Moore)} \end{aligned}$$

2. Si expandimos los términos de la ecuación anterior tenemos:

$$\sum_{\ell=1}^{r} y_\ell Y_\ell = h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i q_i, \sum_{j=1}^{m} u_j U_j\right)$$

$$\sum_{\ell=1}^{r} y_\ell(s_1,\ldots,s_Q) Y_\ell = h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i q_i, \sum_{j=1}^{m} u_j(e_1,\ldots,e_P) U_j\right)$$

3. La expresión anterior conduce a un sistema de ecuaciones donde tenemos que despejar $s_1,\ldots,s_Q$:

$$s = \begin{cases} H(x,e) & \text{máquina de Mealy} \\ H(x) & \text{máquina de Moore.} \end{cases}$$

Índice

Referencias

Jörg Raisch.
Modelling of Engineering Phenomena by Finite Automata.
cap. 2 (pp. 3–22) de Control of Discrete-Event Systems.
Springer, 2013.